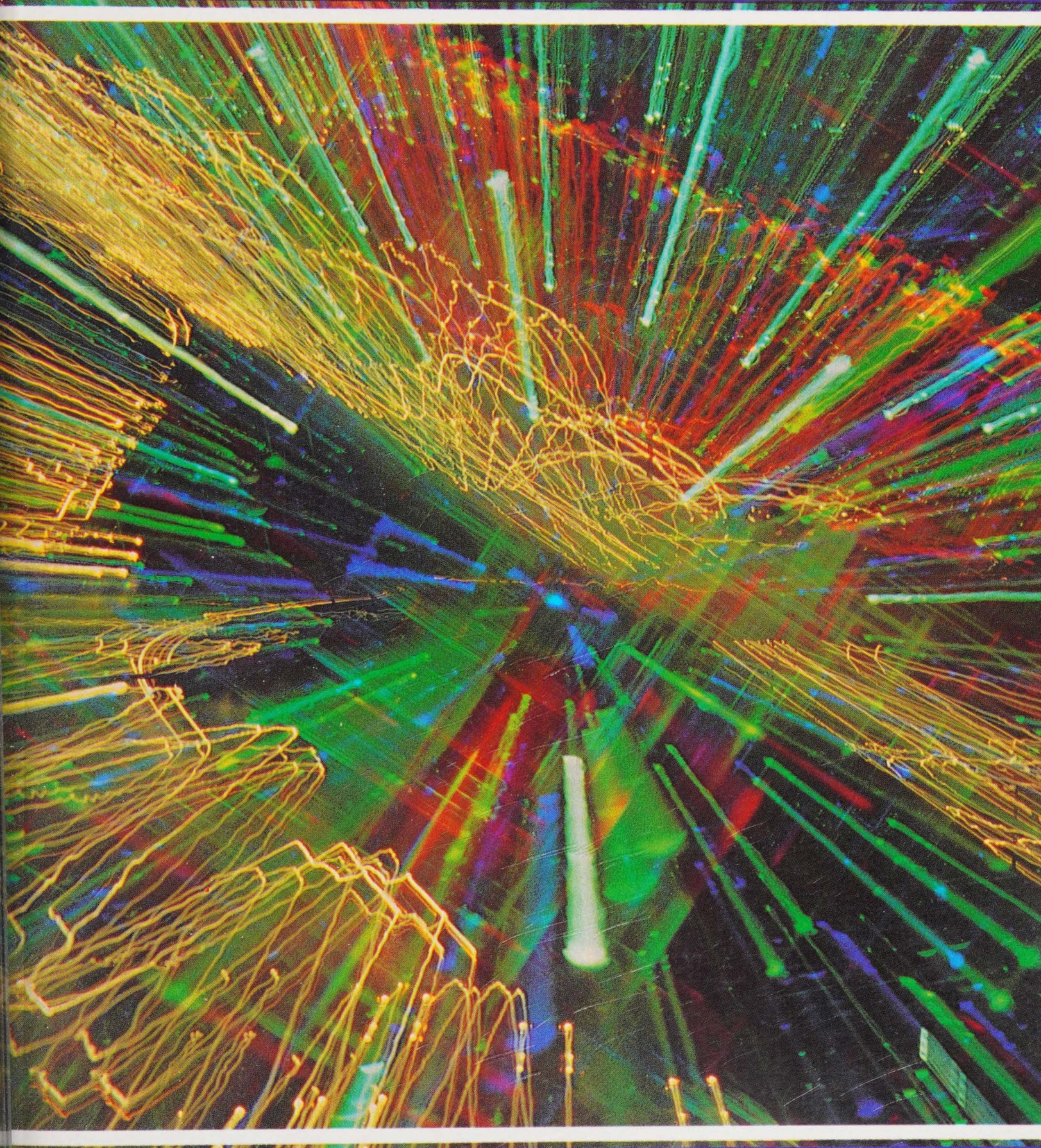


*BOYLESTAD*

# ANALYSE DE CIRCUITS



*2<sup>e</sup> édition*

**introduction**

# ANALYSE DE CIRCUITS

## introduction

**ROBERT L. BOYLESTAD**

*Traduit et adapté par*  
**Gilles Martel**

*2<sup>e</sup> édition*

**ERPI** ÉDITIONS  
DU RENOUVEAU  
PÉDAGOGIQUE INC.

5757, RUE CYPHOT, SAINT-LAURENT (QUÉBEC) H4S 1X4  
TÉLÉPHONE : (514) 334-2690 TÉLÉCOPIEUR : (514) 334-4720

Traduction et adaptation de *Introductory Circuit Analysis* — 4<sup>th</sup> Edition.  
Original English language edition published by  
Charles E. Merrill Publishing Division of Bell & Howell Company  
Copyright © 1982 by Bell & Howell Company.

**Photographie de la couverture:** Larry Hamill

**Typographie:** Typo Litho Composition Inc.

**Impression:** Imprimerie Tri-Graphic (Ottawa) Limitée

© Ottawa, Canada, 1985. Éditions du Renouveau Pédagogique Inc.

Tous droits réservés.

On ne peut reproduire aucun extrait de ce livre sous quelque forme ou par quelque procédé que ce soit — sur machine électronique, mécanique, à photocopier ou à enregistrer, ou autrement — sans avoir obtenu, au préalable, la permission écrite des Éditions du Renouveau Pédagogique Inc.

Dépôt légal: 4<sup>e</sup> trimestre 1985  
Bibliothèque nationale du Québec  
Bibliothèque nationale du Canada  
Imprimé au Canada

ISBN 978-2-7613-0107-7

11 12 13 TG 0987  
2157 ABCD OF10

# PRÉFACE

La préparation d'une nouvelle édition (la quatrième) d'un manuel soulève toujours plusieurs questions. On se demande si les changements envisagés sont nécessaires et pertinents et s'ils améliorent vraiment la qualité et la présentation de l'ouvrage. Je crois, personnellement, que cette édition vous satisfera le plus. En principe, celle-ci devrait présenter toutes les qualités recherchées par un auteur qui entreprend un tel projet: elle est complète, précise, à jour, bien préparée et bien produite. La réunion de toutes ces qualités dans la première édition est très difficile et s'avère un objectif insaisissable, même dans les éditions subséquentes.

Les nombreux commentaires et observations reçus, au fil des ans, des enseignants et enseignantes, des étudiants et étudiantes et des personnes qui s'en servent dans l'industrie m'ont incité à améliorer le plus possible l'ouvrage. Je me suis fait un devoir de répondre à tous ceux et à toutes celles qui ont écrit ou téléphoné. Si, par inadvertance, j'ai oublié quelqu'un, je m'en excuse sincèrement. Je remercie chaleureusement tous ces gens. Naturellement, je m'attends à connaître vos réactions à cette quatrième édition, de sorte que la qualité de l'ouvrage soit maintenue en constante évolution.

Le lecteur et la lectrice familiarisés avec la troisième édition constateront que la partie essentielle du contenu a été conservée. Certains sujets importants ont été développés plus à fond, alors que de nouveaux sujets ont été ajoutés. Chaque chapitre se termine par un glossaire des principaux termes et expressions du chapitre.

Je me suis efforcé pour que le texte soit exact et précis le plus possible. Certes, il n'y a rien de plus embarrassant pour un enseignant et une enseignante, qui recommandent un manuel à leurs étudiants et étudiantes, qui est sans doute leur seul ouvrage de référence, que d'y constater la présence d'erreurs. Pour pallier cette situation, j'ai refait personnellement tous les calculs des exemples et ceux des problèmes de fin de chapitre. J'ai d'ailleurs demandé à d'autres personnes de faire de même.

L'objectif premier du manuel demeure toujours d'assurer la bonne compréhension des lois fondamentales des circuits électriques et de procurer la connaissance des techniques d'analyse les plus utilisées dans l'industrie et en recherche. On peut atteindre cet objectif de plusieurs façons, car il n'est pas nécessaire que l'étudiant et l'étudiante approfondissent toutes les sections des différents chapitres, pour qu'ils assimilent bien l'ensemble du manuel.

## IV

Le contenu du manuel est adapté à un cours de deux semestres sur l'introduction des circuits à courant continu et à courant alternatif. La première moitié du manuel expose les notions fondamentales de l'analyse de circuits à courant continu, alors que la deuxième partie traite des circuits à courant alternatif et de quelques sujets choisis, tels que la résonance, les circuits sinusoïdaux, les transformateurs et les paramètres des quadripôles.

L'examen de la source de courant est encore très détaillée, puisqu'il constitue une introduction à l'étude du transistor, dispositif commandé par courant. La source de courant est élément constant de l'analyse des circuits à courant continu et à courant alternatif sinusoïdal, lorsqu'il est question du principe de superposition, du théorème de Thévenin et de la résonance.

Le manuel compte de nombreux exemples et plusieurs figures. Après plusieurs années d'enseignement, j'ai constaté que ceux-ci facilitaient considérablement la compréhension de la matière. Les problèmes de fin de chapitre sont posés par ordre croissant de difficulté. Les problèmes les plus compliqués sont identifiés par un astérisque. De plus, les problèmes ont été groupés par sections, autant pour faciliter la tâche de l'enseignant ou de l'enseignante que celle de l'étudiant ou de l'étudiante. Les réponses de certains problèmes sont données après les appendices à la fin du manuel. De nouvelles illustrations présentent quelques-uns des derniers développements.

Les sources commandées bénéficient toujours d'une attention particulière pour que l'étudiant et l'étudiante en comprennent parfaitement le fonctionnement. En effet, plusieurs étudiants et étudiantes sont très habiles à appliquer les théorèmes à des circuits à courant continu et à courant alternatif, mais ils et elles sont incapables de le faire lorsqu'il est question d'un réseau à source commandée. Chaque grand théorème compte donc une section spéciale qui traite des effets de ces sources.

Au cours des années, de nombreuses personnes ont contribué au succès de ce manuel, tels que les réviseurs de la présente édition: Robert L. Reid, Arthur J. Sweab et Louis G. Gross. Je désire remercier plus particulièrement le professeur Joseph Aidala. Ce sont ses encouragements qui m'ont incité à écrire la toute première édition.

Il me faut aussi souligner les efforts et le dévouement du personnel de la maison *Charles E. Merrill Publishing Company*, qui a su veiller à la qualité de la présentation du manuel.

La rédaction d'un manuel exige de nombreuses heures de travail et impose plusieurs sacrifices à la famille de l'auteur. Je tiens donc à remercier mon épouse, Else, et nos enfants, Eric, Alison et Stacey Jo, pour leurs encouragements et leur amour.

Robert L. Boylestad

# TABLE DES MATIÈRES

## 1



### UNITÉS ET NOTATIONS 1

Introduction 1 | Les systèmes d'unités 3 | La notation scientifique 6  
| Conversion d'unités 9 | Règle d'homogénéité 10 | Symboles 11 |  
Problèmes 11 | Glossaire 13

## 2



### INTENSITÉ ET TENSION 15

L'atome et sa structure 15 | L'ampère 17 | Tension 19 | Alimentation  
à courant continu 21 | Conducteurs et isolants 32 | Semi-conducteurs  
33 | Problèmes 34 | Glossaire 36

## 3



### RÉSISTANCE 39

Introduction 39 | Effets thermiques 42 | Sections nominales des conduc-  
teurs 45 | Types de résistances 47 | Thermistances 51 | Cellules  
photoconductrices 52 | Varistances 53 | Marquage et valeurs ohmiques  
standard 54 | Conductance 56 | Problèmes 57 | Glossaire 60

## 4



### LOI D'OHM, PUISSANCE ET ÉNERGIE 61

La loi d'Ohm 61 | Puissance 63 | Rendement 65 | Énergie 68 |  
Disjoncteurs et fusibles 71 | Problèmes 72 | Glossaire 75

## 5



### CIRCUITS SÉRIE ET PARALLÈLE 77

Introduction 77 | Circuit série 78 | Loi des tensions de Kirchhoff 79  
| Règle du diviseur de tension 82 | Circuit parallèle 85 | Loi des

courants de Kirchhoff 89 | Règle du diviseur de courant 91 | Courts-circuits 94 | Sources de tension en série 95 | Résistance interne des sources de tension 96 | Régulation de tension 99 | Sources de tension en parallèle 100 | Problèmes 101 | Glossaire 108

## 6



### RÉSEAUX SÉRIE-PARALLÈLE 109

Analyse des réseaux série-parallèle 109 | Exemples supplémentaires 113  
| Réseaux en échelle 118 | Problèmes 121 | Glossaire 126

## 7



### MÉTHODES D'ANALYSE ET SUJETS CHOISIS (COURANT CONTINU) 127

Introduction 127 | Sources de courant 128 | Transposition des sources 131 | Sources de courant en parallèle 132 | Sources de courant en série 133 | Déterminants 133 | Analyse par branches 139 | Analyse par mailles (approche générale) 142 | Analyse par mailles (approche programmée) 148 | Analyse par noeuds (approche générale) 151 | Analyse par noeuds (approche programmée) 154 | Réseaux en pont 159 | Transfigurations Y- $\Delta$  et  $\Delta$ -Y 163 | Problèmes 169 | | Glossaire 177

## 8



### THÉORÈMES DE L'ANALYSE DES CIRCUITS 179

Introduction 179 | Théorème de superposition 179 | Théorème de Thévenin 185 | Théorème de Norton 192 | Théorème du transfert maximal de puissance 197 | Théorème de Millman 203 | Théorème de substitution 207 | Théorème de réciprocité 208 | Problèmes 210 | Glossaire 216

## 9



### CONDENSATEURS 217

Introduction 217 | Le champ électrique 217 | Capacité 219 | Rigidité diélectrique 225 | Courant de fuite 226 | Types de condensateurs 226 | Régimes transitoires dans les réseaux capacitifs 232 |  $\tau = R_{th}C$  242 | L'intensité  $i_c$  du courant 244 | Condensateurs en série et en parallèle 246 | Énergie emmagasinée dans un condensateur 250 | Capacité parasite 250 | Problèmes 251 | Glossaire 255

## 10



## CIRCUITS MAGNÉTIQUES 257

Introduction 257 | Champs magnétiques 258 | Induction magnétique 260 | Perméabilité 261 | Réductance 262 | Loi d'Ohm des circuits magnétiques 263 | Force d'aimantation 263 | Hystérésis 265 | Perméabilité différentielle et perméabilité moyenne 272 | Loi d'Ampère 274 | Le flux  $\Phi$  275 | Circuits magnétiques en série: détermination de  $NI$  275 | Entrefers 281 | Circuits magnétiques série-parallèle 284 | Détermination de  $\Phi$  288 | Problèmes 291 | Glossaire 296

## 11



## BOBINES 299

Introduction 299 | Induction électromagnétique: loi de Faraday 299 | Loi de Lenz 300 | Inductance propre 301 | Types de bobines 303 | Tension induite 304 | Circuits  $R-L$  306 |  $\tau = L/R_{th}$  313 | Bobines en série et en parallèle 314 | Circuits  $R-L$  et  $R-L-C$  alimentés en courant continu 315 | Énergie emmagasinée dans une bobine 316 | Problèmes 317 | Glossaire 321

## 12

APPAREILS DE MESURE  
EN COURANT CONTINU 323

Introduction 323 | Le cadre mobile 324 | L'ampèremètre 325 | Le voltmètre 326 | Sensibilité nominale 327 | L'ohmmètre série 328 | Le mégohmmètre 330 | Le pont de Weastone 330 | Multimètres 331 | Schéma des appareils de mesure 332 | Influence perturbatrice et marge d'erreur 334 | Appareils à indication numérique 336 | Le wattmètre 338 | Problèmes 339 | Glossaire 342

## 13

COURANT ALTERNATIF  
SINUSOÏDAL 343

Introduction 343 | Génération de la tension alternative sinusoïdale 344 | Détermination de la polarité d'une tension et du sens d'un courant 348 | Définitions 348 | L'onde sinusoïdale 351 | Forme générale de la sinusoïde de tension ou de courant 355 | Relations de phase 356 | Valeur moyenne 360 | Valeur efficace 364 | La dérivée 368 | Réponse des éléments fondamentaux ( $R$ ,  $L$  et  $C$ ) à une tension sinusoïdale et à un courant sinusoïdal 369 | Puissance moyenne et facteur de puissance 379 | Problèmes 384 | Glossaire 391



## 14

(j)

**VECTEURS DE PHASE 393**

Introduction 393 | Forme rectangulaire 394 | Forme polaire 395 |  
 Passage d'une forme à l'autre 396 | Opérations mathématiques sur les  
 nombres complexes 398 | Techniques de conversion 406 | Vecteurs de  
 phase 406 | Problèmes 412 | Glossaire 414

## 15

**CIRCUITS SÉRIE ET PARALLÈLE  
À COURANT ALTERNATIF 415**

Introduction 415 | Impédance et diagramme de phase 415 | Montage  
 série 421 | Règle du diviseur de tension 428 | Admittance et suscep-  
 tance 431 | Réseaux parallèles  $R-L$ ,  $R-C$  et  $R-L-C$  à courant alternatif  
 436 | Règle du diviseur de courant 442 | Circuits équivalents 443 |  
 Problèmes 448 | Glossaire 455

## 16

**RÉSEAUX SÉRIE-PARALLÈLE  
À COURANT ALTERNATIF 457**

Introduction 457 | Exemples 458 | Réseaux en échelle 466 | Pro-  
 blèmes 468 | Glossaire 471

## 17

**MÉTHODE D'ANALYSE  
ET SUJETS CHOISIS  
(COURANT ALTERNATIF) 473**

Introduction 473 | Sources indépendantes et sources commandées 474 |  
 Transposition des sources 475 | Analyse par mailles (approche générale)  
 476 | Analyse par mailles (approche programmée) 484 | Réseaux en pont  
 (courant alternatif) 491 | Transfigurations  $Y-\Delta$  et  $\Delta-Y$  496 | Problèmes  
 500 | Glossaire 506

## 18

**THÉORÈMES DE L'ANALYSE  
DES CIRCUITS (EN COURANT  
ALTERNATIF) 507**

Introduction 507 | Théorème de superposition 507 | Théorème de  
 Thévenin 513 | Théorème de Norton 522 | Théorème de transfert  
 maximal de puissance 529 | Théorèmes de substitution, de réciprocité et de  
 Millman 532 | Problèmes 532 | Glossaire 537

## 19

 $P_a^q$ **PUISSANCE (EN COURANT ALTERNATIF) 539**

Introduction 539 | Circuit résistif 540 | Puissance apparente 542 |  
Circuit inductif et puissance réactive 544 | Circuit capacitif 546 | Le  
triangle des puissances 548 | La puissance totale  $P$ ,  $Q$  et  $S$  550 |  
Résistance efficace 555 | Problèmes 558 | Glossaire 562

## 20

**RÉSONANCE 565**

Introduction 565 | Circuit résonant série 566 | Le facteur de qualité ( $Q$ )  
569 |  $Z_T$  en fonction de la fréquence 571 | Sélectivité 573 |  $V_R$ ,  $V_L$   
et  $V_C$  577 | Exemples (résonance série) 579 | Abaque de réactance  
580 | Circuit résonant parallèle 582 | Courbe de sélectivité du circuit  
résonant parallèle 584 | Tableau récapitulatif et abaque de réactance 590  
| Exemples (résonance parallèle) 591 | Filtres 594 | Problèmes 602  
| Glossaire 607

## 21

**SYSTÈMES POLYPHASÉS 609**

Introduction 609 | Le système triphasé 610 | Le système triphasé monté  
en étoile 612 | Ordre des phases (système triphasé monté en étoile) 614  
| Système monté en étoile raccordé à un récepteur monté en étoile 615 |  
Le système Y- $\Delta$  618 | Le système monté en triangle 619 | Ordre des  
phases (système monté en triangle) 621 | Puissance 623 | Les méthodes  
des trois wattmètres 627 | La méthode des deux wattmètres 628 |  
Récepteur triphasé à quatre conducteurs monté en étoile et déséquilibré 630  
| Récepteur triphasé à trois conducteurs monté en étoile et déséquilibré 631  
| Problèmes 634 | Glossaire 641

## 22

**APPAREILS DE MESURE POUR LE COURANT ALTERNATIF 643**

Introduction 643 | Appareils à circuits de redressement utilisant le cadre  
mobile 643 | Appareils à équipement électrodynamométrique 644 | Le  
multimètre et le voltmètre électronique 645 | Indications des appareils  
645 | Wattmètres monophasés (à équipement électrodynamométrique 646 |  
Fréquencemètres analogiques 647 | Fréquencemètres numériques 648 |  
Voltmètres vectoriels 648 | La pince ampèremétrique 649 | Pont d'im-  
pédances 649 | Oscilloscope 650 | Problèmes 651 | Glossaire 651

## 23


**CIRCUITS  
NON SINUSOÏDAUX 653**

Introduction 653 | Séries de Fourier 654 | Réponse d'un circuit à une alimentation non sinusoïdale 662 | Addition et soustraction de formes d'onde non sinusoïdales 667 | Problèmes 668 | Glossaire 672

## 24


**TRANSFORMATEURS 673**

Introduction 673 | Inductance mutuelle 673 | Raccordement série de bobines à couplage mutuel 676 | Transformateur à noyau de fer 679 | Impédance image et puissance 684 | Circuit équivalent (transformateur à noyau de fer) 687 | Incidence de la fréquence 690 | Transformateur à noyau d'air 691 | Le transformateur, dispositif d'isolement 694 | Données de la plaque signalétique 695 | Types de transformateur 697 | Transformateurs à prise médiane et à plusieurs secondaires 700 | Réseaux comportant des bobines à couplage magnétique 702 | Problèmes 703 | Glossaire 707

## 25


**PARAMÈTRES  
DES QUADRIPÔLES  
( $z$ ,  $y$  ET  $h$ ) 709**

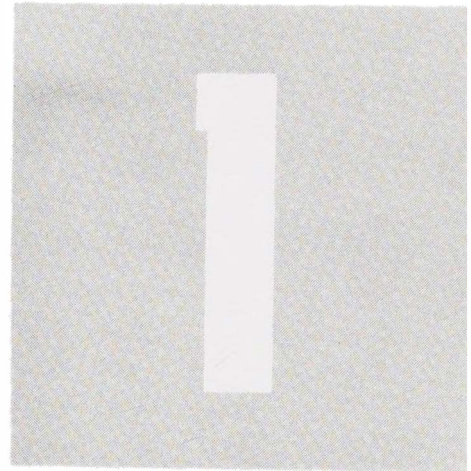
Introduction 709 | Paramètres d'impédance ( $z$ ) 710 | Paramètres d'admittance ( $y$ ) 715 | Paramètres hybrides ( $h$ ) 719 | Impédances d'entrée et de sortie 723 | Conversion entre les paramètres 725 | Problèmes 727 | Glossaire 729

**ANNEXES**

<b>A</b>	Déterminants d'ordre trois 731
<b>B</b>	Marquage des condensateurs au mica enrobés selon le code des couleurs (en picofarads) 733
<b>C</b>	Marquage des condensateurs tubulaires enrobés selon le code des couleurs (en picofarads) 734
<b>D</b>	Conversion des nombres complexes 735
<b>E</b>	L'alphabet grec 736
<b>F</b>	Conversion des unités du magnétisme 736
<b>G</b>	Fonctions exponentielles 737
<b>H</b>	Fonctions trigonométriques naturelles 739
<b>I</b>	Jauges AWG 744
<b>J</b>	Facteurs de conversion 745

**RÉPONSES DES  
PROBLÈMES IMPAIRS 747**
**INDEX 755**

# UNITÉS ET NOTATION



## 1.1 INTRODUCTION

Pour quiconque se destine à une carrière technique, il est non seulement nécessaire mais aussi essentiel de bien comprendre très tôt l'importance des unités de mesure. Il arrive trop souvent que l'on substitue de simples valeurs numériques à des variables sans tenir compte des unités, et les résultats sont catastrophiques. Considérons par exemple l'équation fondamentale suivante:

$$\boxed{F = ma} \quad \begin{array}{l} F = \text{force} \\ m = \text{masse} \\ a = \text{accélération} \end{array} \quad (1.1)$$

Supposons que  $a$  et  $m$  soient connues:

$$m = 10 \text{ kg}$$

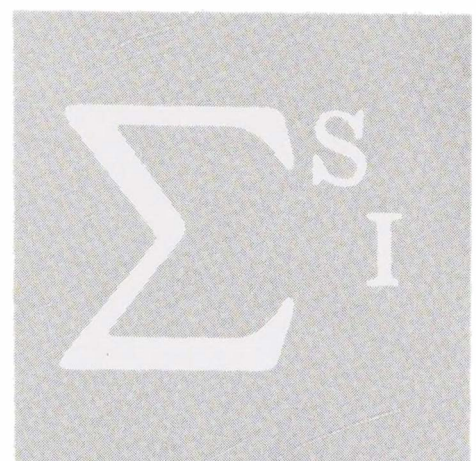
$$a = 50 \text{ pi/s}^2$$

et qu'il faille calculer  $F$  en newtons.

La simple substitution des valeurs numériques aux variables connues de l'équation donne:

$$F = ma = 10 \times 50 = \del{500 \text{ N}}$$

résultat évidemment incorrect. Certains attribueraient à la masse  $m$  la valeur de  $10 \times 10^3$ , en raison de la présence du préfixe



*kilo*; ils obtiendraient pour  $F$  le résultat de 500 000 N, tout aussi incorrect que le premier. Ce que nous désirons souligner par l'exemple précédent, c'est qu'il faut absolument tenir compte des unités de mesure exprimant les grandeurs en cause avant de substituer des valeurs numériques aux variables d'une équation. Ainsi dans l'équation (1.1), il nous faut d'abord constater que le kilogramme est une unité de masse et que l'accélération a pour unité le quotient distance par temps au carré. Accessoirement, nous devrions savoir que le préfixe *kilo* représente le facteur  $10^3$  (nous étudierons les préfixes usuels dans la suite du chapitre), d'où l'équivalence entre 1 kg et 1000 g. Enfin, il nous faut déterminer si chacune des grandeurs de l'équation est exprimée au moyen d'unités appartenant au même système. Nous verrons dans la prochaine section que pour calculer une force (newtons) dans le système MKS, il faut une masse en kilogrammes, comme c'est le cas dans notre exemple, et une accélération en mètres par seconde carrée. Comme l'accélération donnée est exprimée en  $\text{pi/s}^2$ , il nous faut procéder à une certaine conversion d'unités. Comment faire? Nous présentons dans le chapitre une méthode de conversion. Mais pour l'instant, prenons pour acquis que:

$$50 \text{ pi/s}^2 \cong 15,2 \text{ m/s}^2$$

Et déjà un autre problème se pose. Quelles sont les grandeurs relatives du mètre et du pied? Ou, si nous désirons nous représenter le résultat que nous calculerons, quelle est la grandeur d'une force de 1 N? Nous considérerons ce problème dans les sections qui suivent.

Substituons maintenant aux variables  $m$  et  $a$  leurs valeurs connues, 10 kg et 15,2  $\text{m/s}^2$ ; nous obtenons:

$$F = ma = (10)(15,2) = \mathbf{152 \text{ N}}$$

résultat de beaucoup inférieur aux résultats de 500 et 500 000 obtenus précédemment. Nous pouvons maintenant énoncer une importante règle: *Toute valeur numérique d'un résultat ou d'une donnée doit s'accompagner d'une unité de mesure.* Écrire  $F = 152$  sans préciser l'unité de mesure, le newton, ne fait absolument aucun sens.

Soulignons enfin qu'il importe de déterminer si le résultat d'un calcul mathématique est de l'ordre de grandeur prévu. Il y a certes lieu de douter du résultat de 500 000 N, compte tenu de la petite masse et de la faible accélération en cause. Pour en arriver à ce point, il faut évidemment acquérir un sens physique des unités de mesure que sont le newton, le kilogramme et de l'accélération exprimée en mètres par seconde carrée.

L'équation (1.1) ne pose pas de difficulté particulière. Une simple manipulation permet de trouver la valeur d'une variable, si les deux autres sont connues. Toutefois, compte tenu des problèmes soulevés par cette équation, le lecteur se demandera peut-être si la difficulté d'une équation augmente en raison du nombre de termes. Il n'en est rien. Bien sûr, les risques d'erreurs de calcul sont fonction de la complexité d'une équation mais, une fois le système d'unités approprié choisi et les unités à employer déterminées, la difficulté intrinsèque d'une équation ne s'accroît pas en raison du nombre d'opérations mathématiques.

En bref, avant de substituer des valeurs numériques dans une équation, il faut s'assurer des points suivants:

1. Chaque grandeur est exprimée dans la bonne unité de mesure.
2. Les valeurs numériques substituées dans l'équation sont bien les bonnes, compte tenu des unités selon lesquelles les grandeurs sont exprimées.
3. Toutes les grandeurs sont exprimées selon le même système d'unités.
4. L'ordre de grandeur du résultat est sensé, en comparaison de l'ordre de grandeur des valeurs substituées.
5. Le résultat est exprimé dans la bonne unité de mesure.

## 1.2 LES SYSTÈMES D'UNITÉS

Les *systèmes d'unités* les plus communément employés par le passé étaient le système anglo-saxon et le système métrique, dont nous comparons certaines unités au tableau 1.1. Notons que le premier était cohérent mais que le second faisait appel à deux systèmes intimement associés, le système MKS et le système CGS. Le tableau 1.1 présente aussi une comparaison entre les unités de base de ces deux derniers systèmes et entre leurs symboles. Les sigles MKS et CGS originent du nom des unités de base: le mètre, le kilogramme et la seconde pour le MKS, et le centimètre, le gramme et la seconde pour le CGS.

On comprendra facilement que l'emploi de plusieurs systèmes d'unités dans un monde dont les moyens de communication et de transport réduisent sans cesse les distances ne peut que compliquer inutilement les échanges techniques internationaux, d'où la nécessité de l'adoption d'un même système d'unités par tous les pays. En 1960, le Bureau international des poids et mesures, qui a son siège à Sèvres en France, accueillait la Conférence générale des poids et mesures, à laquelle participaient des représentants de tous les pays du globe. La Conférence générale a convenu d'un Système international d'unités, abrégé SI dans toutes les langues. En 1973, le Canada a décidé de se convertir au SI.

**TABLEAU 1.1** Comparaison entre le système anglo-saxon, le système métrique et le SI.

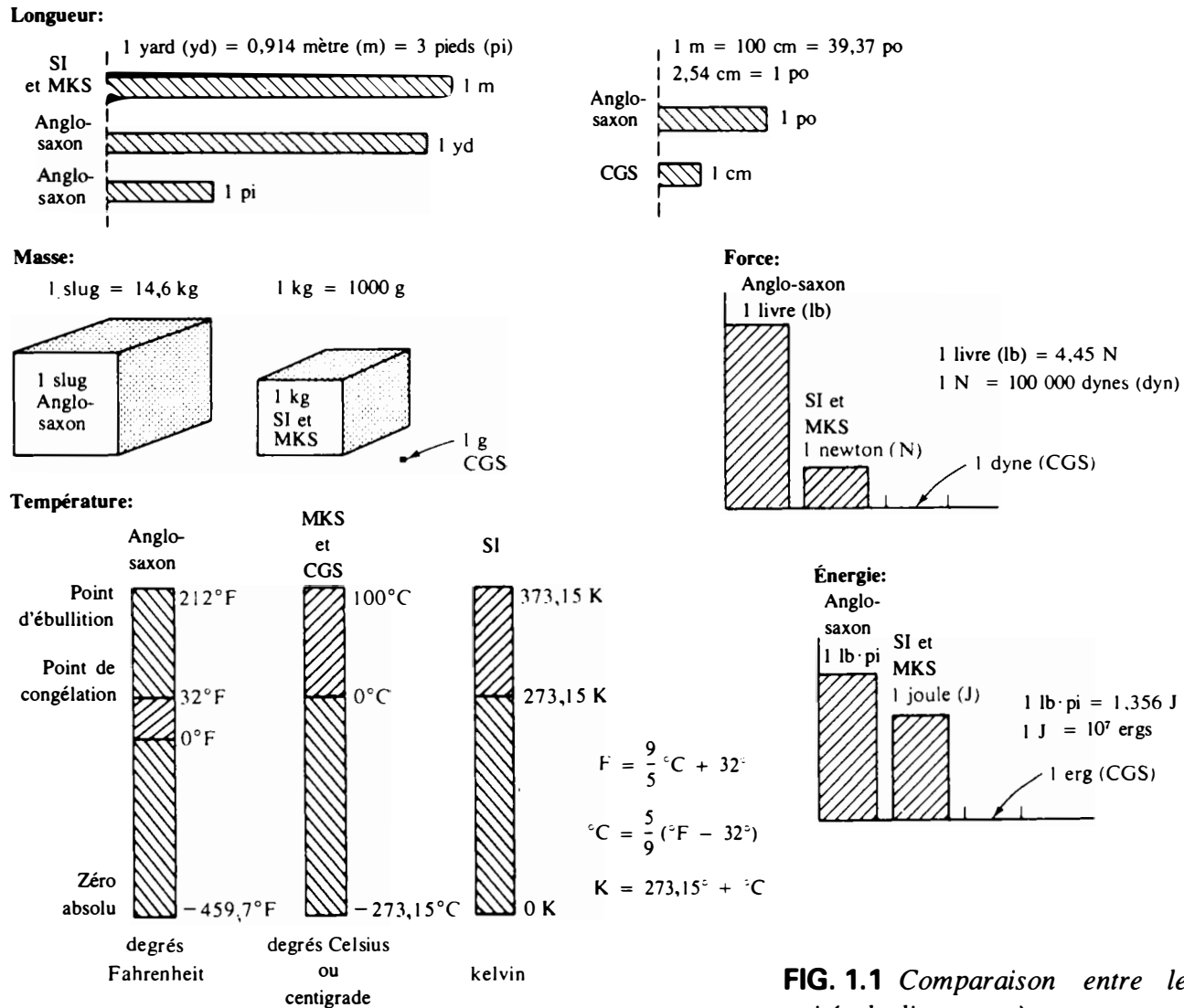
Anglo-saxon	Métrique		SI
	MKS	CGS	
Longueur yard (yd) (0,914 m)	mètre (m) (39,37 po) (100 cm)	centimètre (cm) (2,54 cm = 1 po)	<b>mètre (m)</b>
Masse slug (14,6 kg)	kilogramme (kg) (1000 g)	gramme (g)	<b>kilogramme (kg)</b>
Force livre (lb) (4,45 N)	newton (N) (100 000 dynes)	dyne	<b>newton (N)</b>
Température degré Fahrenheit (°F) $\left( = \frac{9}{5} \text{°C} + 32 \right)$	degré Celsius ou centigrade (°C) $\left( = \frac{5}{9} (\text{°F} - 32) \right)$	degré centigrade (°C)	<b>kelvin (K)</b> <b>K = 273,15 + °C</b>
Énergie livre-pied (lb·pi) (1,356 J)	newton-mètre (N·m) ou joule (J) (0,7378 lb·pi)	dyne-centimètre ou erg (1 joule = 10 <sup>7</sup> ergs)	<b>joule (J)</b>
Temps seconde (s)	seconde (s)	seconde (s)	<b>seconde (s)</b>

Le tableau 1.1 met bien en évidence les points communs entre le système MKS et le SI. Dans ce manuel, les unités SI seront employées.

Quelle est l'importance réelle d'un système d'unités? En quoi l'adoption d'un système plutôt qu'un autre peut-elle influencer sur notre étude? L'exemple étudié à la section 1.1 a clairement démontré qu'il est nécessaire de s'en tenir aux unités d'un système, une fois ce dernier choisi. Dans cet exemple, le choix du système MKS (expression de  $F$  en newtons) nous *imposait* d'exprimer la masse en kilogrammes (10) et non en grammes ( $10 \times 10^3$ ), et l'accélération en  $\text{m/s}^2$  et non en  $\text{pi/s}^2$ . À moins

d'indication contraire, l'unité de mesure de chacun des termes d'une équation doit appartenir au système d'unités choisi. Si le SI est choisi, les unités utilisées doivent être celles de la quatrième colonne du tableau 1.1. Si l'unité de mesure d'une grandeur donnée n'appartient pas au système choisi, il faut la convertir (voir la section 1.4).

La figure 1.1 aidera le lecteur à se faire une idée de la grandeur relative des unités de chaque système. Il est important



**FIG. 1.1** Comparaison entre les unités de divers systèmes.

que des mesures telles 0,6 m et 15,2 N aient un sens physique; elles doivent être autre chose que des chiffres et des symboles apparaissant dans une équation. D'où l'utilité de la figure 1.1; incidemment, on y notera la petitesse relative des unités de mesure du système CGS.

À chaque unité de mesure d'un système correspond une définition. Ainsi le *mètre* a été défini en 1960 comme étant la longueur égale à 1 650 763,73 longueurs d'onde dans le vide



de la radiation orange-rouge du krypton 86. Il avait été à l'origine défini, en 1790, comme étant le 1/10 000 000 de la distance entre l'équateur et l'un ou l'autre des pôles, au niveau de la mer. Le prototype en platine iridié est conservé au pavillon de Breteuil du Bureau international des poids et mesures, à Sèvres en France. Le *kilogramme* est la masse de 1000 centimètres cubes d'eau pure à 4°C; le prototype en platine iridié est également à Sèvres. La *seconde* a été définie à l'origine comme étant la durée du 1/86 400 du jour solaire moyen; elle a été redéfinie en 1960 comme étant la 1/31 556 925,9747 partie de l'année tropique 1900.

### 1.3 LA NOTATION SCIENTIFIQUE

Nous avons fréquemment à travailler sur des nombres très grands et très petits en science, ce que laisse deviner l'écart relatif des diverses unités de mesure. Pour faciliter la manipulation de ces nombres, nous avons habituellement recours à la *notation scientifique*. Cette dernière fait appel aux propriétés commodes des puissances de dix. La représentation des puissances entières de dix se fait de la façon suivante:

$$\begin{aligned} 1 &= 10^0 & 1/10 &= 0.1 = 10^{-1} \\ 10 &= 10^1 & 1/100 &= 0.01 = 10^{-2} \\ 100 &= 10^2 & 1/1000 &= 0.001 = 10^{-3} \\ 1000 &= 10^3 & 1/10\,000 &= 0.0001 = 10^{-4} \end{aligned}$$

Pour déterminer rapidement l'exposant de 10, on compte combien il y a de chiffres entre la virgule décimale et une marque posée à droite du 1. L'exposant est positif si le chiffre 1 est à la gauche de la virgule, et négatif s'il est à sa droite. Ainsi:

$$\begin{aligned} 10\,000.0 &= 1 \underbrace{0\,000.}_1 = 10^4 \\ 0.000\,01 &= 0.\underbrace{000\,01}_5 = 10^{-5} \end{aligned}$$

**TABLEAU 1.2**

Puissance de 10	Préfixe	Symbole
$10^{12}$	téra	T
$10^9$	giga	G
$10^6$	méga	M
$10^3$	kilo	k
$10^{-3}$	milli	m
$10^{-6}$	micro	$\mu$
$10^{-9}$	nano	n
$10^{-12}$	pico	p

Certaines puissances de dix étant d'emploi très fréquent, on leur a attribué des préfixes (voir le tableau 1.2) qui, lorsqu'ils sont écrits avec une unité de mesure, éliminent la nécessité d'une écriture chiffrée.

#### EXEMPLES

$$\begin{aligned} 1\,000\,000\ \Omega \text{ (ohms)} &= 1\ \text{M}\Omega \text{ (mégohm)} \\ 100\,000\ \text{m (mètres)} &= 100\ \text{km (kilomètre)} \\ 0,0001\ \text{s (seconde)} &= 0,1\ \text{ms (milliseconde)} \\ 0,000,001\ \text{F (farad)} &= 1\ \mu\text{F (microfarad)} \end{aligned}$$

Nous illustrons ci-dessous au moyen d'exemples certaines importantes propriétés des puissances de dix. Dans chacun des cas,  $n$  et  $m$  peuvent être tout nombre réel positif ou négatif.

$$\boxed{(10^n)(10^m) = 10^{(n+m)}} \quad (1.2)$$

**EXEMPLES**

$$\begin{aligned} (1000)(10\ 000) &= (10^3)(10^4) = 10^{(3+4)} = 10^7 \\ (0.000\ 01)(100) &= (10^{-5})(10^2) = 10^{(-5+2)} = 10^{-3} \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{10^n}{10^m} = 10^{(n-m)}} \quad (1.3)$$

**EXEMPLES**

$$\begin{aligned} \frac{100\ 000}{100} &= \frac{10^5}{10^2} = 10^{(5-2)} = 10^3 \\ \frac{1000}{0.0001} &= \frac{10^3}{10^{-4}} = 10^{(3-(-4))} = 10^{(3+4)} = 10^7 \end{aligned}$$

$$\boxed{(10^n)^m = 10^{(nm)}} \quad (1.4)$$

**EXEMPLES**

$$\begin{aligned} (100)^4 &= (10^2)^4 = 10^{(2 \times 4)} = 10^8 \\ (1000)^{-2} &= (10^3)^{-2} = 10^{(3)(-2)} = 10^{-6} \\ (0.01)^{-3} &= (10^{-2})^{-3} = 10^{(-2)(-3)} = 10^6 \end{aligned}$$

Les exemples qui suivent montrent comment l'emploi des puissances de dix permet de simplifier des opérations portant sur des nombres arbitraires. Le principe est simple: il s'agit de faire séparément les opérations portant sur les puissances de dix et celles portant sur les chiffres significatifs.

*Addition:*

$$\begin{aligned} 6300 + 75\ 000 &= (6.3)(1000) + (75.0)(1000) \\ &= 6.3 \times 10^3 + 75.0 \times 10^3 \\ &= (6.3 + 75.0) \times 10^3 \\ &= \mathbf{81,30 \times 10^3} \end{aligned}$$

*Soustraction:*

$$\begin{aligned} 960\ 000 - 40\ 000 &= (96.0)(10\ 000) - (4.0)(10\ 000) \\ &= 96.0 \times 10^4 - 4.0 \times 10^4 \\ &= (96.0 - 4.0) \times 10^4 \\ &= \mathbf{92,0 \times 10^4} \end{aligned}$$

*Multiplication:*

$$\begin{aligned}(0,0002)(0,000\ 007) &= [(2)(0,0001)][(7)(0,000\ 001)] \\ &= (2 \times 10^{-4})(7 \times 10^{-6}) \\ &= (2)(7) \times (10^{-4})(10^{-6}) \\ &= \mathbf{14,0 \times 10^{-10}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(340\ 000)(0,000\ 61) &= (3,4 \times 10^5)(61 \times 10^{-5}) \\ &= (3,4)(61) \times (10^5)(10^{-5}) \\ &= \mathbf{207,40}\end{aligned}$$

*Division:*

$$\begin{aligned}\frac{0,000\ 47}{0,002} &= \frac{47,0 \times 10^{-5}}{2 \times 10^{-3}} = \left(\frac{47,0}{2}\right) \times \left(\frac{10^{-5}}{10^{-3}}\right) \\ &= \mathbf{23,50 \times 10^{-2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{690\ 000}{0,000\ 000\ 13} &= \frac{69 \times 10^4}{13 \times 10^{-8}} = \left(\frac{69}{13}\right) \times \left(\frac{10^4}{10^{-8}}\right) \\ &= \mathbf{5,310 \times 10^{12}}\end{aligned}$$

*Élevation à une puissance:*

$$\begin{aligned}(0,000\ 03)^3 &= (3 \times 10^{-5})^3 = (3)^3 \times (10^{-5})^3 \\ &= \mathbf{27,0 \times 10^{-15}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(90\ 800\ 000)^2 &= (9,08 \times 10^7)^2 = (9,08)^2 \times (10^7)^2 \\ &= \mathbf{82,4464 \times 10^{14}}\end{aligned}$$

Par ailleurs, il est possible de combiner les puissances de dix aux unités de mesure, ce qui permet d'exprimer des résultats très simplement.

### EXEMPLES

a. 41 200 m équivalent  $41,2 \times 10^3$  m = **41,20 km.**

b. 0,009 56 g équivaut à  $9,56 \times 10^{-3}$  g = **9,56 mg.**

c. 0,000 768 s équivaut à  $768 \times 10^{-6}$  s = **768,0  $\mu$ s.**

$$\begin{aligned}d. \frac{8400\ \text{m}}{0,06} &= \frac{8,4 \times 10^3\ \text{m}}{6 \times 10^{-2}} = \left(\frac{8,4}{6}\right) \times \left(\frac{10^3}{10^{-2}}\right)\ \text{m} \\ &= 1,4 \times 10^5\ \text{m} = 140 \times 10^3\ \text{m} = \mathbf{140,0\ \text{km.}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}e. (0,0003)^4\ \text{s} &= (3 \times 10^{-4})^4\ \text{s} = 81 \times 10^{-16}\ \text{s} \\ &= 0,0081 \times 10^{-12}\ \text{s} = \mathbf{0,0081\ \text{ps}}\end{aligned}$$

On se rendra compte de la facilité et de la sûreté relative de l'emploi des puissances de dix en développant l'expression donnée au dernier exemple de la manière classique:

$$\begin{array}{r}0,0003 \\ \times 0,0003 \\ \hline 0,000\ 000\ 09 \\ \times 0,0003 \\ \hline 0,000\ 000\ 000\ 027 \\ \times 0,0003 \\ \hline 0,000\ 000\ 000\ 000\ 008\ 1 = 81 \times 10^{-16}\ \text{s} = \mathbf{0,0081\ \text{ps}}\end{array}$$

## 1.4 CONVERSION D'UNITÉS

La plupart des étudiants éprouve de la difficulté à faire des conversions d'unités, que ce soit au sein d'un même système ou entre deux systèmes, alors qu'il s'agit d'opérations très simples. Tentons par exemple d'exprimer 10 000 cm en mètres. Le tableau 1.1 nous indique que  $10^2 \text{ cm} = 1 \text{ m}$ , ce qui se réécrit après simple manipulation algébrique:

$$\left(\frac{10^2 \text{ cm}}{1 \text{ m}}\right) = (1) \quad \text{ou} \quad \left(\frac{1 \text{ m}}{10^2 \text{ cm}}\right) = (1)$$

Rien ne nous interdisant de multiplier 10 000 cm par le facteur (1), nous pouvons effectuer l'opération suivante qui permet l'obtention du résultat voulu en mètres:

$$\begin{aligned} (10\,000 \text{ cm})(1) &= (10^4 \cancel{\text{cm}}) \left(\frac{1 \text{ m}}{10^2 \cancel{\text{cm}}}\right) \\ &= \frac{10^4}{10^2} \text{ m} = 10^2 \text{ m} = 100 \text{ m} \end{aligned}$$

Si nous avions eu à exprimer 10 000 m en centimètres, nous aurions tout simplement utilisé la réciproque de l'expression du facteur (1):

$$\begin{aligned} (10\,000 \text{ m})(1) &= (10^4 \cancel{\text{m}}) \left(\frac{10^2 \text{ cm}}{1 \cancel{\text{m}}}\right) \\ &= (10^4)(10^2) \text{ cm} = 10^6 \text{ cm} \end{aligned}$$

Dans chaque cas, le facteur (1) s'écrit donc de façon que l'unité originale de la quantité à transformer apparaisse à son dénominateur, son numérateur étant l'unité d'expression de la quantité transformée. La méthode peut être répétée jusqu'à l'obtention de l'unité de mesure voulue au numérateur du dernier facteur (1).

Les exemples ci-dessous illustrent plus abondamment la méthode.

### EXEMPLES

- a. Exprimer 6000 m en centimètres.

$$\begin{aligned} 6000 \text{ m} &= (6 \times 10^3 \text{ m})(1) = (6 \times 10^3 \cancel{\text{m}}) \left(\frac{10^2 \text{ cm}}{1 \cancel{\text{m}}}\right) \\ &= \mathbf{6,0 \times 10^5 \text{ cm}} \end{aligned}$$

- b. Exprimer 1,8 g en kilogrammes.

$$1,8 \text{ g} = (1,8 \text{ g})(1) = (1,8 \cancel{\text{g}}) \left(\frac{1 \text{ kg}}{10^3 \cancel{\text{g}}}\right) = \mathbf{1,80 \times 10^{-3} \text{ kg}}$$

- c. Exprimer 3 cm en millimètres. Procéder dans ce cas de la façon ci-dessous plutôt que d'employer le facteur de conversion des centimètres aux millimètres.

$$\begin{aligned}
 3 \text{ cm} &= (3 \text{ cm})(1)(1) = (3 \text{ cm}) \left( \frac{1 \text{ m}}{10^2 \text{ cm}} \right) \left( \frac{1 \text{ mm}}{10^{-3} \text{ m}} \right) \\
 &= 3 \times 10^{-2} \times 10^{+3} \text{ mm} = \mathbf{30,0 \text{ mm}}
 \end{aligned}$$

d. Exprimer 4,6 mm en kilomètres.

$$\begin{aligned}
 4,6 \text{ mm} &= (4,6 \text{ mm}) \left( \frac{10^{-3} \text{ m}}{1 \text{ mm}} \right) \left( \frac{1 \text{ km}}{10^3 \text{ m}} \right) \\
 &= 4,6 \times 10^{-3} \times 10^{-3} \text{ km} = \mathbf{4,60 \times 10^{-6} \text{ km}}
 \end{aligned}$$

e. Exprimer 0,0432 h en millisecondes.

$$\begin{aligned}
 0,0432 \text{ h} &= (0,0432 \text{ h})(1)(1)(1) \\
 &= (0,0432 \text{ h}) \left( \frac{60 \text{ min}}{1 \text{ h}} \right) \left( \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} \right) \left( \frac{1 \text{ ms}}{10^{-3} \text{ s}} \right) \\
 &= \mathbf{155,52 \times 10^3 \text{ ms}}
 \end{aligned}$$

La méthode présentée ci-dessus est systématique et empêche certainement d'en arriver à des résultats farfelus. Il existe évidemment d'autres méthodes permettant de passer d'un système d'unités à un autre, que le lecteur découvrira sans doute, une fois familiarisé avec l'emploi des facteurs de conversion (voir la liste à l'annexe J).

Mais peu importe la méthode employée, il faut toujours se demander si le résultat est sensé, et le comparer à la grandeur de la quantité exprimée au moyen des unités du système original.

## 1.5 RÈGLE D'HOMOGÉNÉITÉ

*Chaque terme d'une équation doit être exprimé au moyen des mêmes unités.* Cette règle d'homogénéité est rarement utilisée pour vérifier si une équation est exacte. Elle est pourtant très utile, puisqu'elle permet de vérifier les calculs et de déterminer les unités de termes qui pourraient être inconnus. Ainsi il est possible de trouver les unités exprimant l'accélération à partir de l'équation suivante, les unités de temps et de vitesse étant connues:

$$\begin{aligned}
 \text{accélération (?) } &= \frac{\text{vitesse (m/s)}}{\text{temps (s)}} \\
 &= \frac{\text{m}}{\text{s} \cdot \text{s}} = \text{m/s}^2
 \end{aligned}$$

Dans l'exemple suivant, les unités de mesure des deux derniers termes sont incorrectes. Il faudrait donc normalement revérifier les calculs à l'origine de ces termes avant de poursuivre le problème.

$$\begin{aligned}
 \text{Temps (h)} &= 4 \text{ h} + \underbrace{30 \text{ min}}_{0,5 \text{ h}} \\
 &\quad + (2 \text{ h})(6 \text{ m}) \left( \frac{5}{\text{m}} \right) + \frac{10}{\text{h}} + (16 \text{ h})^2
 \end{aligned}$$

Soulignons aussi que les unités de mesure apparaissant dans une équation doivent n'appartenir qu'à un seul système d'unités. Si les unités du SI sont utilisées pour les termes d'un membre de l'équation, elles doivent l'être également pour les termes de l'autre membre; on ne pourrait ainsi employer pour les termes du second membre des unités du système CGS ou du système anglo-saxon. Par exemple, dans l'équation permettant de calculer la force entre deux particules chargées:

$$F = \frac{kQ_1Q_2}{r^2}$$

si  $F$  = force est en newtons (SI),  $Q_{1,2}$  = charge doit être en coulombs (SI),  $k$  = constante =  $9,0 \times 10^9$  (SI) et  $r$  = distance doit être en mètres (SI).

En effet, la distance  $r$  doit être exprimée en mètres dans le SI, et non en centimètres ou en pouces; même si la donnée était  $r = 1000 \text{ cm} = 10 \text{ m}$ , c'est le nombre 10 qu'il faudrait substituer dans l'équation, non pas 1000.

Donnons un autre exemple. Il faut calculer la vitesse d'un mobile en mètres par seconde (SI), mais la distance est donnée en pouces et le temps en minutes. La première étape du calcul est donc d'exprimer la distance en mètres et le temps en secondes, d'où la conversion:

$$\text{vitesse (m/s)} = \frac{d(\text{po})(39,37)}{t(\text{min})(60)}$$

## 1.6 SYMBOLES

Nous employons dans ce manuel plusieurs symboles algébriques. Certains sont définis au tableau 1.3; d'autres le seront quand ils se présenteront dans le texte.

## PROBLÈMES

Nota: L'astérisque (\*) indique les problèmes difficiles.

### Section 1.3

- Exprimez les nombres ci-dessous au moyen de puissances de 10.
 

a. 10 000	b. 0,0001	c. 1000
d. 1 000 000	e. 0,000 000 1	f. 0,000 01
- Uniquement au moyen des puissances de 10 données au tableau 1.2, écrivez les nombres ci-dessous sous la forme qui, de votre avis, se prête le mieux à des calculs.
 

a. 15 000	b. 0,030 00	c. 7 400 000
d. 0,000 006 8	e. 0,000 402 00	f. 0,000 000 000 2

Développez les expressions ci-dessous et exprimez les résultats au moyen de puissances de 10.

- |                                 |                            |                   |
|---------------------------------|----------------------------|-------------------|
| a. $(100)(100)$                 | b. $(0,01)(1000)$          | c. $(10^3)(10^6)$ |
| d. $(1000)(0,000 01)$           | e. $(10^{-6})(10 000 000)$ |                   |
| f. $(10 000)(10^{-8})(10^{35})$ |                            |                   |

**TABLEAU 1.3**

Symbole	Sens
$\neq$	n'est pas égal à $6,12 \neq 6,13$
$>$	est plus grand que $4,78 > 4,20$
$\gg$	est beaucoup plus grand que $840 \gg 16$
$<$	est plus petit que $430 < 540$
$\ll$	est beaucoup plus petit que $0,002 \ll 46$
$\geq$	est plus grand que ou égal à $x \geq y$ est vrai si $y = 3$ et si $x > 3$ ou si $x = 3$
$\leq$	est plus petit que ou égal à $x \leq y$ est vrai si $y = 3$ et si $x < 3$ ou si $x = 3$
$\cong$	est approximativement égal à $3,14159 \cong 3,14$
$\Sigma$	la somme de $\Sigma (4 + 6 + 8) = 18$
$  $	la valeur absolue de $ a  = 4$ , pour $a = -4$ ou $+4$ donc $x = \sqrt{4} \quad \therefore x = \pm 2$

4. a.  $\frac{100}{1000}$       b.  $\frac{0,01}{100}$       c.  $\frac{10\ 000}{0,000\ 01}$   
 d.  $\frac{0,000\ 000\ 1}{100}$       e.  $\frac{10^{+38}}{0,000\ 100}$       f.  $\frac{(100)^{1/2}}{0,01}$
5. a.  $(100)^3$       b.  $(0,0001)^{1/2}$       c.  $(10\ 000)^8$   
 d.  $(0,000\ 000\ 10)^9$
6. a.  $(-0,001)^2$       b.  $\frac{(100)(10^{-4})}{10}$       c.  $\frac{(0,01)^2(100)}{10\ 000}$   
 d.  $\frac{(10^2)(10\ 000)}{0,001}$       e.  $\frac{(0,0001^3)(100)}{1\ 000\ 000}$       \*f.  $\frac{[(100)(0,01)]^{-3}}{[(100)^2][0,001]}$

Développez les expressions ci-dessous.

- \*7. a.  $\frac{(300)^2(100)}{10^4}$       b.  $[(40\ 000)^2][(20)^{-3}]$   
 c.  $\frac{(60\ 000)^2}{(0,02)^2}$       d.  $\frac{(0,000\ 027)^{1/3}}{210\ 000}$   
 e.  $\frac{[(4000)^2][300]}{0,02}$       f.  $[(0,000\ 016)^{1/2}][(100\ 000)^5][0,02]$   
 g.  $\frac{[(0,003)^3][(0,000\ 07)^2][(800)^2]}{[(100)(0,006)]^{1/2}}$  (bon courage)

#### Section 1.4

Faites les conversions indiquées:

8. a. 1,5 min en secondes.  
 b. 0,04 h en secondes.  
 c. 0,05 s en microsecondes.  
 d. 0,16 H en millihenrys.  
 e. 0,000 000 12 s en nanosecondes.  
 f. 3 620 000  $\Omega$  en mégohms.  
 g. 1020 mm en mètres.
9. a. 0,1  $\mu\text{F}$  (microfarad) en picofarads.  
 b. 0,467 k $\Omega$  en ohms.  
 c. 63,9 mH en henrys.  
 d. 69 cm en kilomètres.  
 e. 3,2 h en millisecondes.  
 f. 0,016 mH en microhenrys.  
 g. 60 cm<sup>2</sup> en mètres carrés.
- \*10. a. 100 po en mètres.  
 b. 4 pi en mètres.  
 c. 6 lb en newtons.  
 d. 60 000 dynes en livres.  
 e. 150 000 cm en pieds.  
 f. 0,002 mi en mètres (1 mi = 5280 pi).  
 g. 7800 m en yards.

## Section 1.5

11. Certains termes des expressions ci-dessous sont de dimension incorrecte. Lesquels?
- a. Longueur =  $4 \text{ m} + (6 \text{ m/s})(40 \text{ s}) + (18 \text{ min})(7 \text{ pi/s})$   
 $+ (10 \text{ po})(2 \text{ s}) + (72 \text{ po})(6 \text{ cm/s})$   
 $+ (80 \text{ pi}^2)(6 \text{ pi}^{-1})$
- b. Temps =  $4 \text{ h} + 6 \text{ min} + \frac{40 \text{ h}}{200 \text{ min}} + (50 \text{ s})(2 \text{ min})$   
 $+ \frac{40 \text{ m}}{6 \text{ m/s}}$
12. Calculez en milles par heure (mi/h) la vitesse d'une masse qui se déplace de 50 pi en 2 min.
13. Combien de minutes faut-il à une auto se déplaçant à 100 mi/h pour traverser un terrain de football dans sa longueur (100 yd)?
- \*14. Calculez en mètres la distance que franchit en 0,016 h un mobile se déplaçant à 600 cm/s.
15. Exprimez 6 mi/h en m/s.
16. Au Québec, les limites de vitesse sont indiquées en kilomètres par heure. Vous roulez à 100 km/h. Quelle est votre vitesse en milles par heure? Quel est le facteur de conversion?

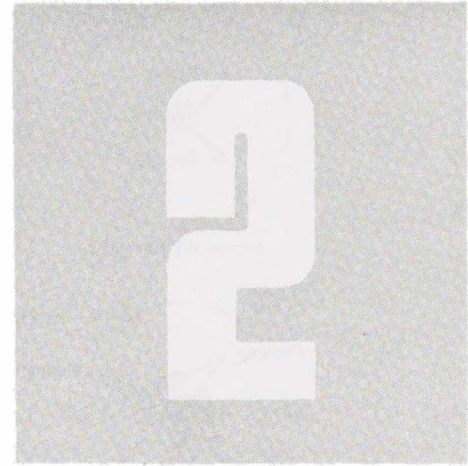
## GLOSSAIRE

- Joule (J)** Unité de base de l'énergie dans le SI et dans le système MKS. Dans le système CGS, le joule est égal à  $10^7$  ergs.
- Kelvin (K)** Unité de base de la température dans le SI. Dans les systèmes MKS et CGS, le kelvin est égal à  $273,15^\circ + ^\circ\text{C}$ .
- Kilogramme (kg)** Unité de base de la masse dans le SI et dans le système MKS. Dans le système CGS, le kilogramme est égal à 1000 g.
- Mètre (m)** Unité de base de la longueur dans le SI et dans le système MKS. Dans le système CGS, le mètre est égal à 100 cm.
- Newton (N)** Unité de base de la force dans le SI et dans le système MKS. Dans le système CGS, le newton est égal à 100 000 dynes.
- Notation scientifique** Méthode de représentation des très grands et très petits nombres à l'aide des puissances de dix.
- Seconde (s)** Unité de base du temps dans le SI et dans les systèmes MKS et CGS.
- SI** Système international d'unités adopté en 1960 par la presque totalité des nations du globe.
- Système CGS** Système dont les unités de base sont le centimètre, le gramme et la seconde.
- Système MKS** Système dont les unités de base sont le mètre, le kilogramme et la seconde.





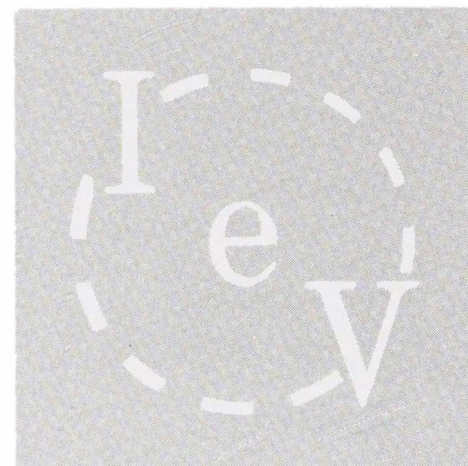
# INTENSITÉ ET TENSION



## 2.1 L'ATOME ET SA STRUCTURE

Pour bien comprendre les notions fondamentales d'intensité et de tension, il est essentiel de connaître l'atome et sa structure. L'atome d'hydrogène se compose de deux particules, le *proton* et l'*électron*. Le proton, particule de charge positive, constitue le *noyau* de l'atome, et l'électron décrit une orbite autour de ce dernier, comme le montre la figure 2.1a. *L'électron orbital porte une charge négative égale en grandeur à la charge positive du proton.* Les noyaux des autres éléments sont aussi constitués de *neutrons*; ces particules neutres, c'est-à-dire porteuses d'aucune charge, sont de masse légèrement plus grande que les protons. Ainsi, l'atome d'hélium compte deux neutrons, outre ses deux électrons et ses deux protons (figure 2.1b). *Dans un atome neutre, le nombre d'électrons est égal au nombre de protons,* le nombre de neutrons étant déterminé par la différence du nombre de masse et du nombre de protons. La masse de l'électron est de  $9,11 \times 10^{-28}$  g, celle du proton, de  $1,6724 \times 10^{-24}$  g, et celle du neutron, de  $1,6747 \times 10^{-24}$  g. La masse du proton (ou du neutron) est donc environ 1 836 fois celle de l'électron. Les rayons des trois particules sont du même ordre de grandeur, soit  $2 \times 10^{-15}$  m.

Le rayon de la plus petite orbite de l'électron de l'atome d'hydrogène est approximativement de  $5 \times 10^{-11}$  m. C'est près de 25 000 fois celui des particules mêmes. Pour se représenter la situation, imaginons une pièce de un cent sur orbite autour d'une autre: le rayon de l'orbite serait supérieur à 400 m!



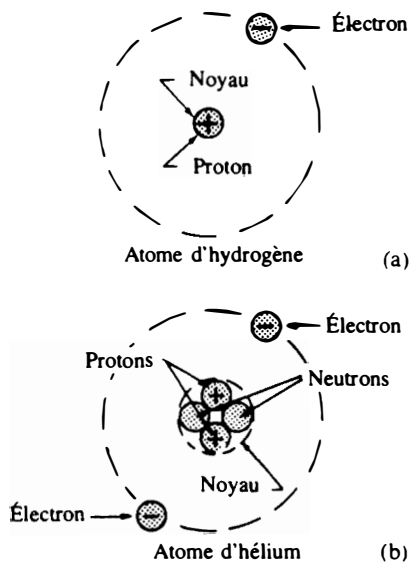


FIG. 2.1 L'atome d'hydrogène et l'atome d'hélium.

Les électrons des atomes se répartissent en couches concentriques autour du noyau. La première couche électronique, la plus rapprochée du noyau, ne peut contenir que deux électrons. Dans les atomes comptant trois électrons, le troisième électron doit donc se trouver dans la deuxième couche. Cette deuxième couche peut contenir huit électrons, la troisième 18 et la quatrième 32. De façon générale, le nombre d'électrons que peut porter une couche est  $2n^2$ ,  $n$  étant le numéro de la couche. En effet, on désigne habituellement les couches électroniques au moyen de chiffres ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) ou de lettres ( $k, l, m, \dots$ ).

Chaque couche se subdivise en sous-couches, la première sous-couche pouvant contenir deux électrons, la deuxième 6, la troisième 10 et la quatrième 14, comme on le voit sur la figure 2.2. Les sous-couches sont habituellement désignées dans l'ordre par les lettres  $s, p, d$  et  $f$ , la sous-couche  $s$  étant la plus rapprochée du noyau.

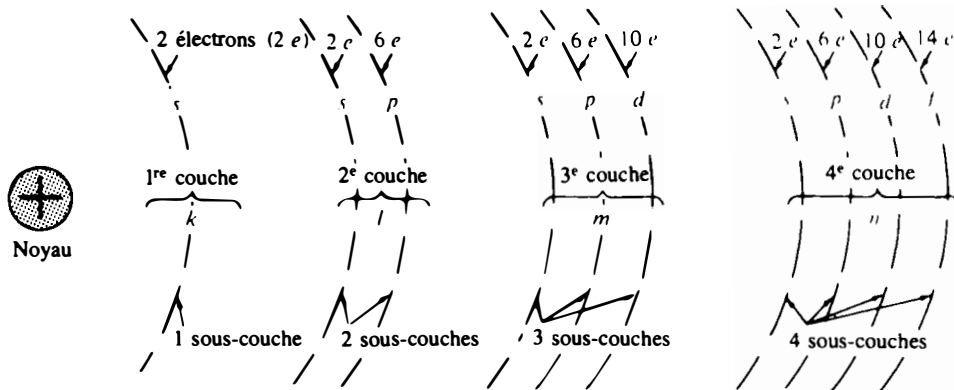


FIG. 2.2 Couches et sous-couches de la structure atomique.

Il a été démontré expérimentalement que des charges électriques de mêmes signes se repoussent et que des charges électriques de signes contraires s'attirent. La grandeur de la force d'attraction ou de répulsion se détermine au moyen de la loi de Coulomb:

$$F \text{ (attractive ou répulsive)} = \frac{kQ_1Q_2}{r^2} \quad (2.1)$$

$F$  étant exprimée en newtons,  $k = \text{constante} = 9,0 \times 10^9$ ,  $Q_1$  et  $Q_2$  étant les charges en coulombs, et  $r$  la distance en mètres séparant les particules chargées.

Les électrons d'un atome se repoussent donc, alors que les protons et les électrons s'attirent. Le noyau étant constitué de nombreuses charges positives (protons), il attire fortement les électrons des orbites les plus rapprochées [à noter l'effet d'une charge  $Q$  élevée au numérateur et d'une petite distance  $r$  au dénominateur dans l'équation (2.1)]. À mesure que grandit la distance entre le noyau et l'électron en orbite, la force de

cohésion diminue jusqu'à un minimum pour la sous-couche la plus éloignée (distance  $r$  maximale). Il faut donc moins d'énergie pour arracher un électron d'une sous-couche extérieure que d'une sous-couche intérieure. De plus, il est généralement plus facile de libérer des électrons des sous-couches extérieures incomplètes ne comptant que quelques électrons. On peut donc arracher des électrons à des atomes dans certaines conditions. Sans ce phénomène, notre étude s'arrêterait ici, tout courant électrique n'étant qu'un déplacement d'électrons porteurs de charge.

Le *cuivre* est le métal le plus employé dans le domaine électrique. Un examen de sa structure atomique permet de comprendre pourquoi. L'atome de cuivre (figure 2.3) possède en effet un électron de plus qu'il ne faut pour remplir ses trois premières couches. Cet électron supplémentaire, le vingt-neuvième, est faiblement lié au noyau de l'atome puisqu'il occupe seul une sous-couche extérieure incomplète et que sa distance au noyau est relativement grande. S'il gagne suffisamment d'énergie du milieu ambiant, il se libérera de son atome d'ori-

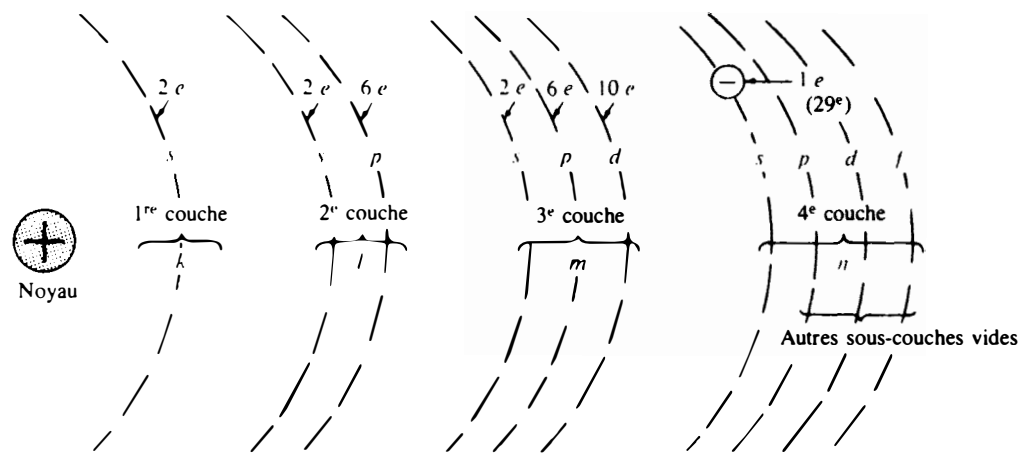


FIG. 2.3 L'atome de cuivre.

gine et deviendra un *électron libre*. Or l'énergie nécessaire à ce faire est faible: il y a environ  $4 \times 10^{21}$  électrons libres dans un centimètre cube de cuivre. Le cuivre est donc bon conducteur; il est en outre ductile (peut être étiré sans se rompre) et malléable (se laisse façonner). D'autres métaux, l'argent, l'or, le platine et l'aluminium, présentent les mêmes propriétés que le cuivre, mais à un degré différent. Seul l'aluminium, matériau bon marché, a trouvé des emplois commerciaux et fait concurrence au cuivre.

## 2.2 L'AMPÈRE

Considérons un court fil de cuivre traversé par un plan imaginaire perpendiculairement à son axe, comme le montre la figure 2.4. À la température ambiante et en l'absence de toute force extérieure, les électrons libres du cuivre se déplacent de façon aléatoire, sous l'effet de l'énergie thermique du milieu. L'atome qui perd un électron se charge positivement

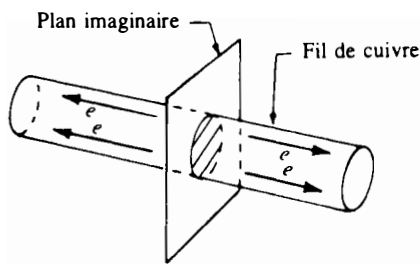


FIG. 2.4

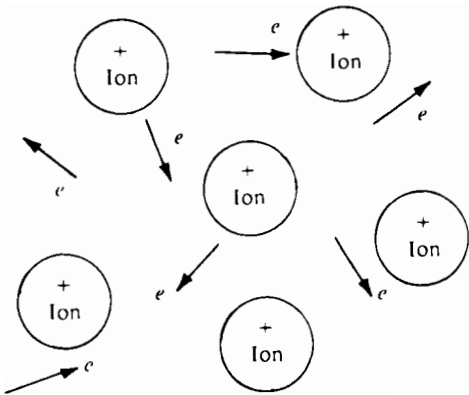


FIG. 2.5 Déplacement aléatoire d'électrons libres dans un réseau d'ions.

et est appelé *ion positif*. L'électron libre se fraye un chemin parmi les ions positifs et s'éloigne peu à peu de son atome d'origine. Les ions positifs ne peuvent par contre qu'osciller autour d'une position fixe moyenne. Pour cette raison, *c'est l'électron libre qui est le porteur de charge du cuivre, et de tout autre matériau conducteur en phase solide.*

La figure 2.5 montre un réseau d'ions positifs entre lesquels se meuvent des électrons libres. Ces électrons changent sans cesse de direction et de vitesse et, par conséquent, perdent ou gagnent sans cesse de l'énergie. Ces déplacements aléatoires résultent de certains facteurs, notamment: (1) des collisions avec les ions positifs et entre les électrons eux-mêmes, (2) des forces attractives exercées par les ions positifs, et (3) des forces répulsives existant entre les électrons. Les déplacements aléatoires sont tels que sur toute période de temps, le nombre d'électrons traversant le plan imaginaire de gauche à droite est exactement égal au nombre d'électrons le traversant de droite à gauche. En d'autres termes, *le débit net de charges dans un sens ou dans l'autre est nul en l'absence de force extérieure.*

Raccordons maintenant les extrémités d'un fil de cuivre aux deux bornes d'une batterie (figure 2.6). Au prix d'une dépense d'énergie chimique, la batterie crée une charge nette positive à l'une des bornes et une charge nette négative à l'autre. Dès l'instant où les extrémités du fil sont raccordées aux deux bornes, les électrons libres du cuivre dérivent vers la borne positive, les ions positifs continuant d'osciller autour de leur position fixe. Quant à la borne négative, elle agit comme une source d'électrons remplaçant les électrons libres qui se dirigent vers la borne positive. La borne négative cédant autant d'électrons que n'en reçoit la borne positive, toute section du fil semblable à la section *ab* illustrée à la figure 2.6 demeure électriquement neutre.

Si les charges nettes des bornes sont telles que  $6,242 \times 10^{18}$  électrons traversent à une vitesse uniforme le plan imaginaire de la figure 2.6 en *une seconde*, le débit électronique, ou l'*intensité* du courant, est dit de *un ampère* (A). Dans le SI, la charge portée par un électron est de  $1,6 \times 10^{-19}$  C; la charge totale portée par  $6,242 \times 10^{18}$  électrons est:

$$(6,242 \times 10^{18} \text{ électrons})(1,6 \times 10^{-19} \text{ C/électron}) = 1 \text{ C}$$

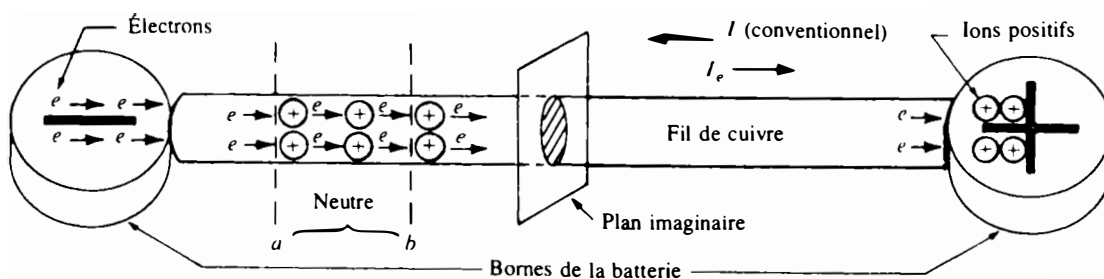


FIG. 2.6

L'intensité en ampères d'un courant peut donc se déterminer au moyen de l'équation:

$$I \text{ (ampères)} = \frac{Q \text{ (coulombs)}}{t \text{ (secondes)}} \quad (2.2)$$

Ainsi, l'intensité du courant parcourant le fil de cuivre est de 4 A si une charge de 8 C traverse le plan imaginaire toutes les 2 s. Notons finalement que la figure 2.6 indique que l'on peut attribuer deux sens au courant. L'un est le *sens conventionnel*, l'autre le *sens de déplacement des électrons*. Dans ce manuel, nous adoptons le sens conventionnel du courant; la raison de ce choix est donnée à l'introduction au chapitre 5.

**EXEMPLE 2.1** Une charge de 0,16 C passe à travers le plan imaginaire illustré à la figure 2.6 en 64 ms. Déterminer le courant en ampères.

*Solution:*

À l'aide de l'équation (2.1), on a:

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{0,16}{64 \times 10^{-3}} = \frac{160 \times 10^{-3}}{64 \times 10^{-3}} = 2,50 \text{ A}$$

**EXEMPLE 2.2** Déterminer le temps qu'il faut pour que  $4 \times 10^{10}$  électrons passent à travers le plan imaginaire illustré à la figure 2.6, si le courant est de 4 mA.

*Solution:*

$$4 \times 10^{10} \text{ électrons} \left[ \frac{1 \text{ C}}{6,242 \times 10^{18} \text{ électrons}} \right] = 0,641 \times 10^{-8} \text{ C}$$

L'équation (2.2) donne:

$$t = \frac{Q}{I} = \frac{0,641 \times 10^{-8}}{4 \times 10^{-3}} = 0,160 \times 10^{-5} \text{ s} = 1,60 \mu\text{s}$$

### 2.3 TENSION

Le déplacement de charges dont il a été question à la section précédente est créé par une « pression » extérieure obtenue d'une *énergie potentielle*, énergie que possède toute masse en raison de sa position dans un champ de forces.

Par définition, *l'énergie est la capacité de produire du travail*. Ainsi, une masse  $m$  élevée à une hauteur  $h$  au-dessus d'un plan de référence possède une énergie potentielle déterminée par la relation:

$$\text{Énergie potentielle } (E_p) = mgh \quad (\text{joules}) \quad (2.3)$$

dans laquelle  $g$  est l'accélération gravitationnelle. Elle peut donc produire un travail, par exemple broyer un objet placé sur le plan de référence. Si la masse est élevée plus haut, elle acquiert encore plus d'énergie potentielle et a par conséquent la capacité de produire un travail supplémentaire. Manifestement, entre les deux points au-dessus du plan de référence, il existe une *différence de potentiel*.

Dans la batterie illustrée à la figure 2.6, l'action chimique interne établit (au prix d'une certaine dépense d'énergie) une accumulation de charges négatives (les électrons) à l'une des bornes (la borne négative) et une accumulation de charges positives (les ions positifs) à l'autre. Il se crée une différence de potentiel (d.d.p.) entre les deux bornes en raison de la « position » des charges. Lorsque les extrémités d'un conducteur sont raccordées aux bornes, les électrons de la borne négative ont suffisamment d'énergie potentielle pour produire le travail nécessaire à compenser les pertes d'énergie dues aux collisions avec les autres particules du matériau conducteur et à vaincre les forces répulsives des électrons; ils peuvent ainsi atteindre la borne positive vers laquelle ils sont attirés. Cette différence de potentiel entre les deux bornes de la batterie se mesure en *volts* (V), et est appelée *force électromotrice* (*f.é.m.*) si elle est produite par une source semblable à une batterie. Plus grand est le travail (ou la dépense d'énergie) nécessaire à l'accumulation identique de charges aux bornes, plus grande est la *différence de potentiel* ou la *tension* entre les bornes. Par définition, *la différence de potentiel entre deux points est de un volt (V), si l'énergie dépensée à déplacer une charge de un coulomb (C) entre les deux points est de un joule (J)*. La relation permettant de calculer la différence de potentiel entre deux points  $a$  et  $b$  s'écrit:

$$\boxed{V_{ab} = \frac{W_{ab}}{Q}} \quad \begin{array}{l} V_{ab} = \text{volts (V)} \\ W_{ab} = \text{joules (J)} \\ Q = \text{coulombs (C)} \end{array} \quad (2.4)$$

$W_{ab}$  étant l'énergie dépensée à déplacer la charge  $Q$ .

Pour un conducteur, l'équation (2.4) permet aussi de déterminer la différence de potentiel entre deux points (figure 2.7). Sur cette figure,  $W$  est l'énergie dépensée pour faire passer la charge  $Q$  du point 1 au point 2.

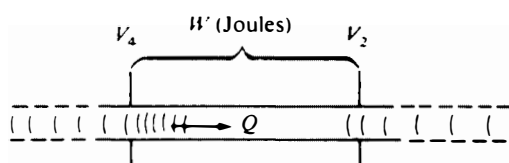


FIG. 2.7

**EXEMPLE 2.3** Calculer la différence de potentiel entre deux points d'un réseau électrique, si une charge de 20 C nécessite une énergie de 60 J pour se déplacer entre les deux points.

*Solution :*

$$V = \frac{W}{Q} = \frac{60}{20} = 3 \text{ V}$$

**EXEMPLE 2.4** Calculer l'énergie nécessaire au déplacement d'une charge de 50  $\mu\text{C}$  entre deux points d'une différence de potentiel de 6 V.

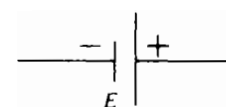
*Solution :*

$$W = VQ = (50 \times 10^{-6})(6) = 300 \times 10^{-6} \text{ J} \\ = \mathbf{300 \mu J}$$

Bref, la f.é.m. appliquée à un circuit électrique est la « pression » qui fait déplacer les charges ou qui provoque le courant. L'analogie mécanique de la f.é.m. appliquée serait la pression de refoulement de l'eau dans un réseau de distribution, le débit d'eau correspondant alors au débit des charges, c'est-à-dire à l'intensité du courant électrique.

## 2.4 ALIMENTATION À COURANT CONTINU

L'expression à courant continu figurant dans le titre ci-dessus signifie que les alimentations débitent un *courant continu* (c.c.), caractérisé par un *déplacement unidirectionnel* des électrons dans les divers dispositifs d'un circuit électrique. Ces termes feront l'objet de notre étude dans les chapitres à venir. On illustre le symbole utilisé dans cet ouvrage pour toutes les sources de courant continu à la figure 2.8. Par convention, c'est le sens de déplacement des charges positives qui sert à déterminer le point au potentiel le plus élevé. Dans une source de tension continue, la borne positive est donc au potentiel le plus élevé et on la repère du signe plus (+); la borne négative est au potentiel le moins élevé, et est repérée du signe moins (-). Dans un schéma, la longueur relative des traits permet de distinguer les deux bornes.



**FIG. 2.8**

**Batteries** Les sources de tension à courant continu se regroupent en trois types: les batteries, les génératrices et les redresseurs. La batterie est la plus répandue des trois. Par définition, une batterie (qui tire son nom de l'expression « une batterie de cellules ») est un montage en parallèle ou en série de deux ou plusieurs *cellules* semblables, la cellule étant la source fondamentale d'énergie électrique obtenue par réactions chimiques ou à partir d'énergie solaire. Les cellules peuvent être *primaires* ou *secondaires*: les cellules secondaires sont rechargeables alors que les cellules primaires ne le sont pas. Autrement dit, il est possible d'inverser la réaction chimique dans une cellule secondaire pour en restaurer la charge. Les deux cellules rechargeables les plus communes sont la batterie plomb-acide (servant surtout dans l'industrie de l'automobile) et la pile au nickel-cadmium qui trouve de nombreuses utilisations: calculatrices, outils, appareils photos, rasoirs, etc. L'avantage manifeste de la cellule rechargeable est qu'elle revient moins cher à la longue: on la recharge plutôt que de la jeter!

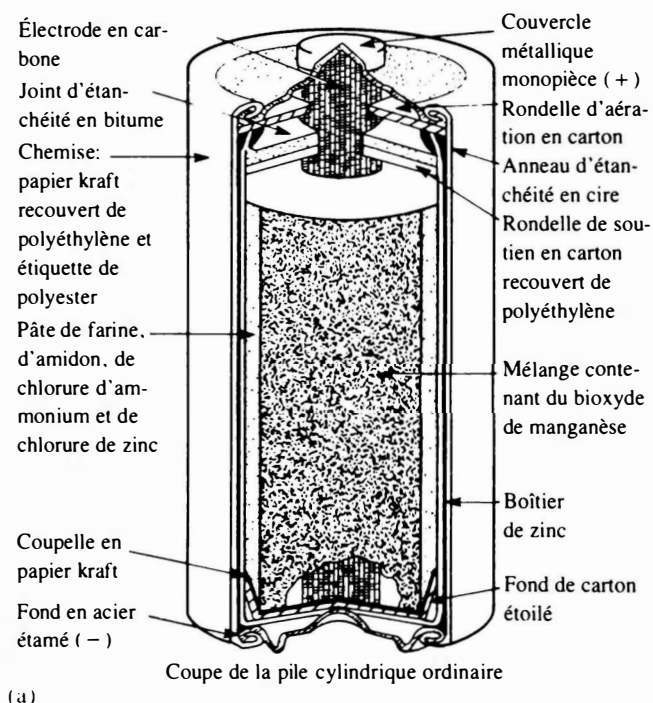
Exception faite de la *pile solaire* qui absorbe de l'énergie lumineuse sous la forme de photons, toutes les piles et batteries



mentionnées dans ce chapitre produisent de l'électricité grâce à la transformation d'énergie chimique. De plus, elles sont construites de la même façon: chacune comporte deux *électrodes* plongées dans un *électrolyte*. L'électrolyte ferme le circuit entre les deux électrodes et constitue la source d'ions qui permet l'établissement du courant entre celles-ci.

Dans le cas de la pile au carbone-zinc (figure 2.9), le boîtier de zinc constitue l'électrode négative alors que la tige de carbone entourée d'un mélange de bioxyde de manganèse constitue l'électrode positive; l'électrolyte est un mélange de chlorure d'ammonium, de chlorure de zinc, de farine et d'amidon. La figure 2.10 représente d'autres types de piles dont les caractéristiques et les utilisations seront étudiées plus loin dans cette section.

Dans le cas de la batterie d'automobile, l'électrolyte des accumulateurs est l'acide sulfurique; les électrodes sont en plomb poreux (Pb) et en peroxyde de plomb ( $PbO_2$ ). Lorsqu'un circuit extérieur est raccordé à la batterie, des électrons empruntent ce circuit et passent de l'électrode de plomb poreux à l'électrode de peroxyde de plomb. La migration d'électrons se poursuit tant que la batterie n'est pas complètement épuisée. La durée de décharge dépend de la force de l'acide et de l'épaisseur de la couche de sulfate de plomb dont est revêtue chaque plaque. La charge résiduelle d'une batterie plomb-acide se détermine habituellement par la mesure de la densité relative



(a)

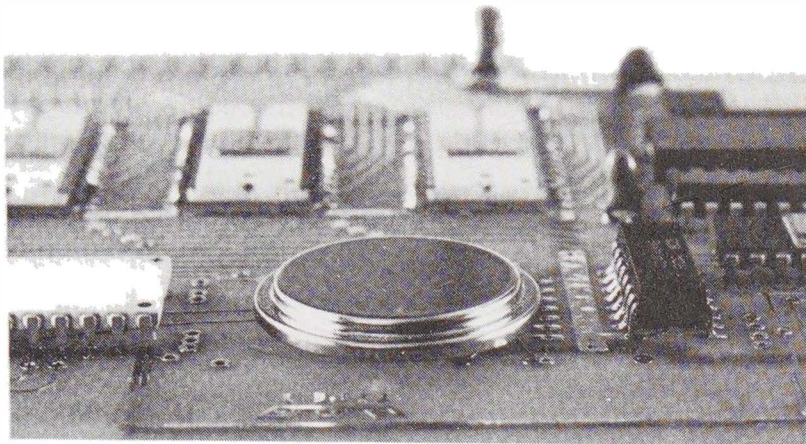
**FIG. 2.9** Pile au carbone-zinc: (a) représentation schématique; (b) photographies et caractéristiques nominales.



(b)

Pile « C »	Pile « D »	Pile « AA »	Pile « A »
1,5 V	1,5 V	1,5 V	1,5 V
0 mA à 80 mA	0 mA à 150 mA	0 mA à 25 mA	0 mA à

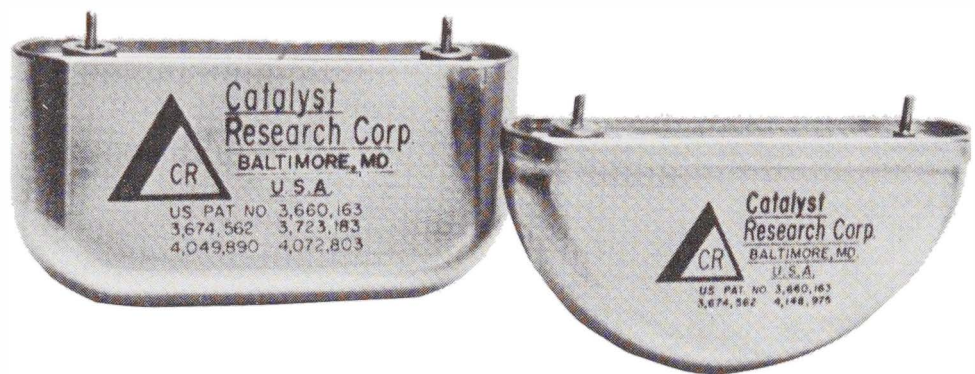
Courtoisie de Union Carbide Corp.



Courtoisie de Catalyst Research Corp.  
Pile Lithiode<sup>®</sup> au lithium-iodure de longue durée montable sur circuit imprimé:  
2,8 V et 870 mAh  
(a)



Courtoisie de Union Carbide Corp.  
Pile EVEREADY pour transistor:  
9 V et 450 mAh  
(c)

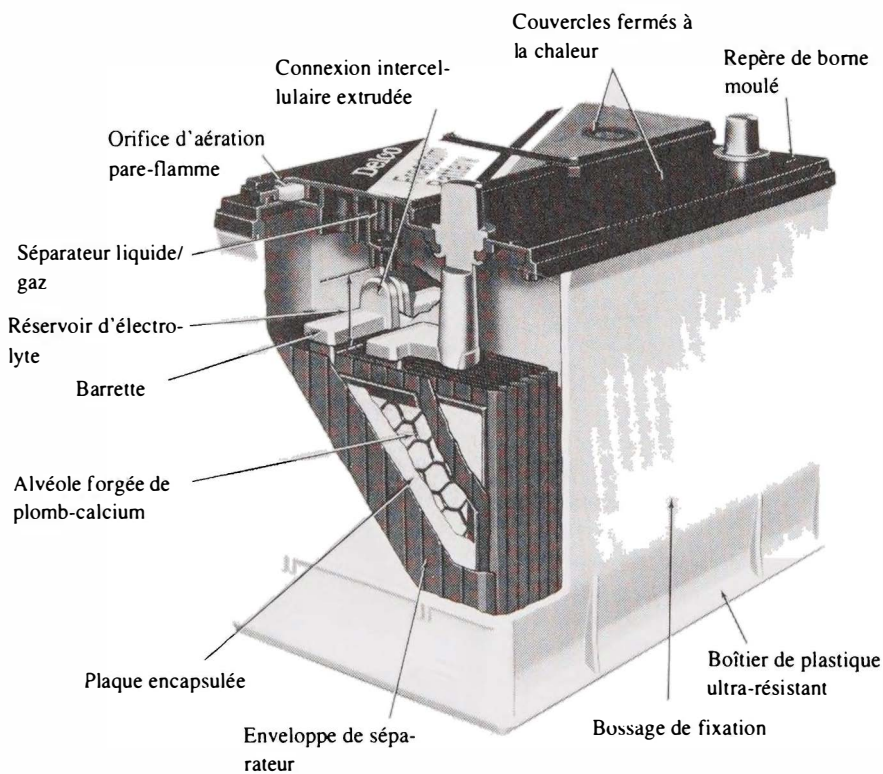
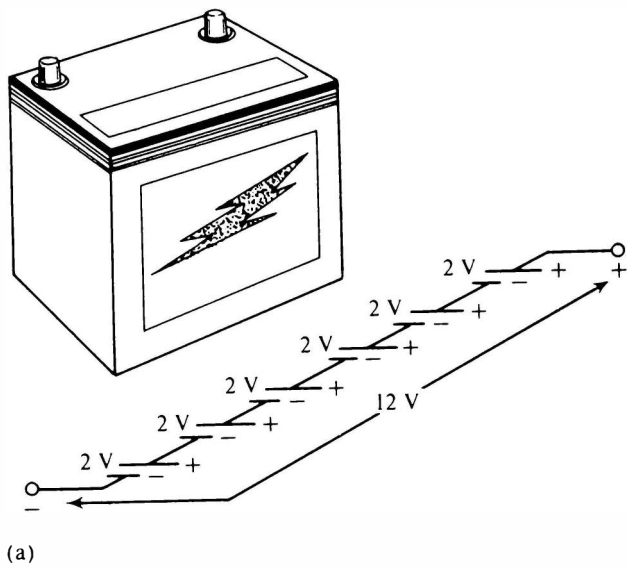


Courtoisie de Catalyst Research Corp.  
Pile au lithium-iodure pour stimulateur cardiaque:  
2,8 V et 2,0 Ah  
(b)

FIG. 2.10 Différentes piles.

de l'électrolyte au moyen d'un pèse-acide. Rappelons que la densité relative d'un corps est la masse d'un volume de ce corps divisé par la masse du même volume d'eau, à 4°C. La densité relative de l'électrolyte d'une batterie complètement chargée devrait osciller entre 1,28 et 1,30; la batterie doit être rechargée lorsque la densité relative a chuté à environ 1,1.

L'élément au plomb étant une cellule secondaire, il peut être rechargé à tout moment de sa décharge; pour ce faire, il suffit de le raccorder à une source extérieure qui fera passer un courant de sens opposé à celui du courant de décharge de l'élément. Cette action a pour effet de désulfater les plaques et de rétablir la force de l'acide.



Courtoisie de Delco-Remy, filiale de General Motors Corp.

**FIG. 2.11** (a) Batterie d'automobile standard de 12 V; (b) batterie sans entretien Delco-Remy.

La tension présente aux bornes d'un élément au plomb est de 2 V environ pendant la plus grande partie de la décharge. Dans la batterie d'automobile, la tension de 12 V est obtenue au moyen du raccordement de six éléments en série, comme l'illustre la figure 2.11a. L'emploi d'une alvéole forgée en alliage de plomb-calcium plutôt que d'une alvéole coulée en plomb-antimoine supprime la nécessité de tout entretien. L'alvéole de plomb-antimoine se corrodait, provoquait des surcharges, produisait des gaz, consommait de l'eau et, enfin, favorisait l'autodécharge de la batterie. La plupart de ces incon-

vénients ont été supprimés ou considérablement atténués par l'emploi de l'alvéole de plomb-calcium dans une batterie de conception repensée. Comme le représente la figure 2.11b, l'électrolyte est encore présent et le raccordement de six éléments produit toujours la tension désirée de 12 V.

Les piles et les blocs rechargeables au nickel-cadmium, comme ceux de la société Union Carbide (figure 2.12), ont fait l'objet de nombreux perfectionnements au cours des récentes années. La représentation schématique de la pile cylindrique typique est fournie à la figure 2.13. Lorsque la pile est complè-

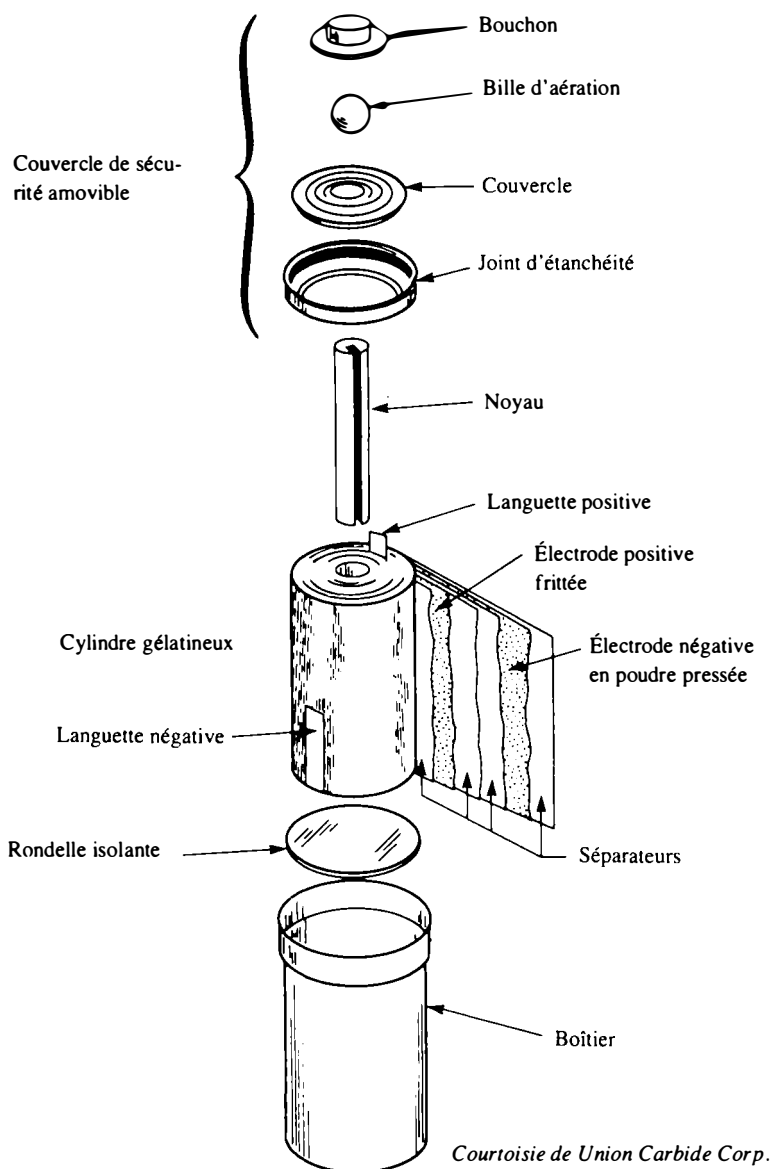


Courtoisie de Union Carbide Corp.

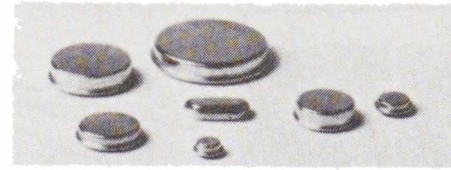
**FIG. 2.12** Piles et blocs rechargeables au nickel-cadmium.



tement chargée, l'électrode positive est constituée d'hydroxyde de nickel (NiOH), l'électrode négative, de cadmium métallique (Cd) et l'électrolyte, d'hydroxyde de potassium (KOH). L'oxydation (augmentation de la teneur en oxygène) de l'électrode négative se fait en même temps que la réduction de l'électrode positive et fournit l'énergie électrique désirée. Le séparateur a pour rôle d'isoler les deux électrodes et de confiner l'électrolyte. L'avantage d'une telle pile est que les substances actives subissent la variation de leur état d'oxydation (nécessaire à la création des ions) sans toutefois subir de changement de leur état physique. Il est donc extrêmement facile de la recharger.



**FIG. 2.13** Représentation schématique de l'intérieur d'une pile rechargeable au nickel-cadmium.



Piles EVEREADY® BH500  
1,2 V et 500 mAh  
Utilisation dans des dispositifs présentant un dégagement vertical restreint.  
(a)  
*Courtoisie de Union Carbide Corp.*



Pile de 2,4 V (70 mAh) montable sur circuit imprimé.  
(b)  
*Courtoisie de General Electric Co.*

**FIG. 2.14** Piles au nickel-cadmium.

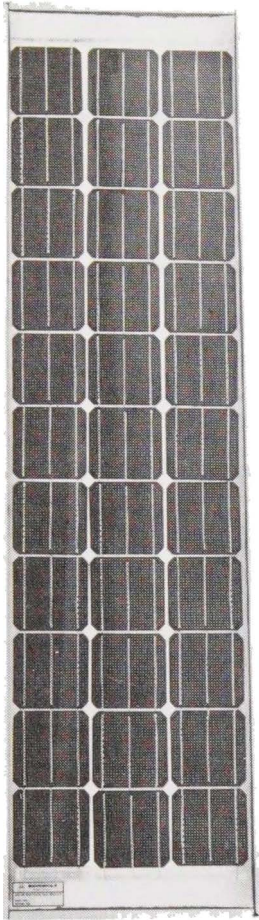
D'autres piles au nickel-cadmium sont illustrées à la figure 2.14; leurs caractéristiques nominales et leurs principales utilisations y sont indiquées.

La figure 2.15 est la photographie d'un module solaire haute densité de 40 W. Sa puissance maximale par soleil éclatant est de 100 mW/cm<sup>2</sup>. Comme son rendement de conversion se situe entre 10% et 14%, sa puissance maximale disponible par centimètre carré est de 10 mW à 14 mW. Pour un mètre carré, la puissance disponible serait de 100 W à 140 W. De tels modules peuvent produire des tensions continues assez constantes, pourvu qu'il fasse beau, et alimenter une vaste gamme de charges, de la simple montre-bracelet à une automobile.

La capacité d'une batterie est exprimée en ampères-heures (Ah) et celle d'une pile, en milliampères-heures (mAh). Une batterie d'une capacité de 100 Ah peut, en principe, débiter un courant de 1 A pendant 100 h, de 2 A pendant 50 h ou de 10 A pendant 10 h, comme l'indique la relation:

$$\boxed{\text{durée de décharge (heures)} = \frac{\text{capacité en Ah}}{\text{intensité en A}}} \quad (2.5)$$

La capacité d'une batterie ou d'une pile dépend de deux facteurs: la température et la vitesse de décharge. Ainsi, la pile EVEREADY® BH500 en forme de pastille (figure 2.14a) possède les caractéristiques illustrées à la figure 2.16. Ces caractéristiques indiquent que la capacité de la pile de 1 V est



Panneau solaire haute densité de 40 W

Des piles carrées de 100 mm sur 100 mm donnent le maximum de puissance dans le minimum d'espace. Ce panneau de 33 piles en série produit le courant de charge d'une batterie de 12 V dans le cas d'une grande gamme de températures (−40°C à 60°C).

*Courtoisie de Motorola Semiconductor Products.*

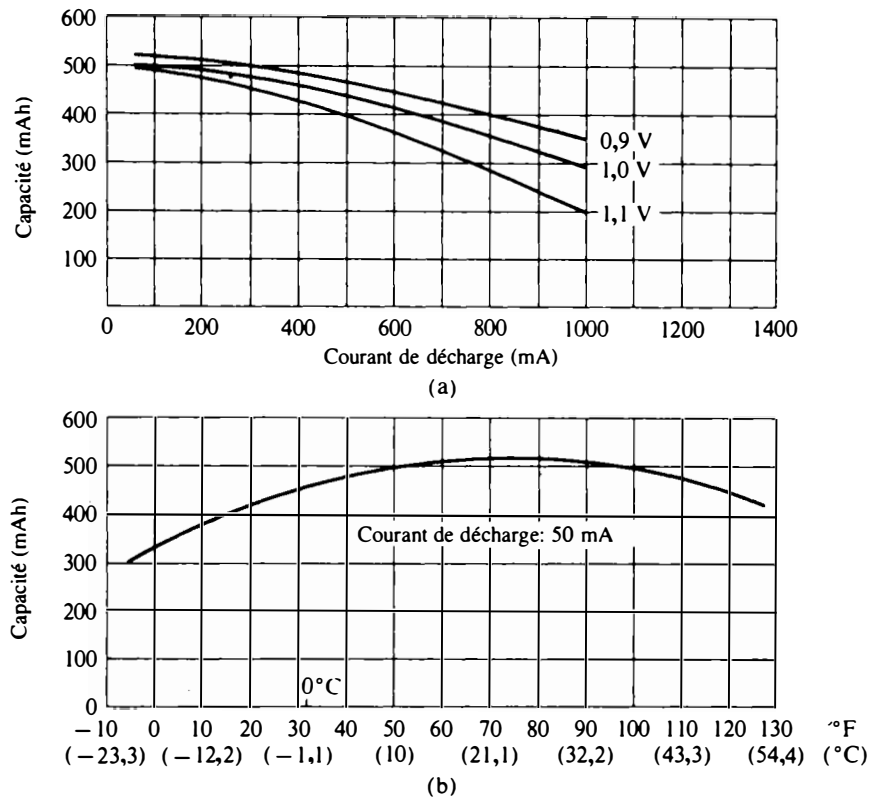
**FIG. 2.15** *Panneau solaire.*

supérieure à 500 mAh lorsque le courant de décharge est de 100 mA; par contre, elle chute à 300 mAh lorsque le courant est de 1 A environ. Toutefois, ces caractéristiques sont excellentes dans le cas d'une pile de moins de 3 cm de diamètre et de moins de 1,25 cm d'épaisseur. Le deuxième graphique de la figure indique que la capacité maximale (pour un courant de décharge de 50 mA) s'obtient à la température de 24°C, soit juste au-dessus de la température ambiante usuelle. Il importe de remarquer que la capacité diminue de part et d'autre de cette température. Par exemple, elle n'est que de 300 mAh à −20°C.

La figure 2.17 présente une autre courbe significative. Cette courbe donne la tension prévisible pour un courant de décharge connu, après un certain nombre d'heures d'utilisation. La réduction de la durée de décharge est plus grande lorsque le courant passe de 50 mA à 100 mA que lorsque le courant passe de 100 mA à 150 mA, bien que le courant différentiel soit le même dans les deux cas.

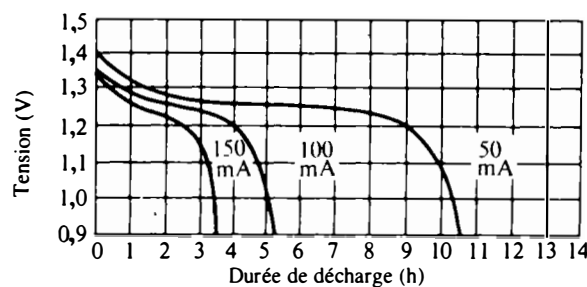
### EXEMPLE 2.5

- Déterminer la capacité (en milliampères-heures) de la pile BH500 de 0,9 V illustrée à la figure 2.16a, si le courant de décharge est de 600 mA. Quelle est la durée de décharge?



Courtoisie de Union Carbide Corp.

**FIG. 2.16** Caractéristiques de la pile EVEREADY® BH500. (a) Capacité en fonction du courant de décharge; (b) capacité en fonction de la température.



Courtoisie de Union Carbide Corp.

- b. Dans le cas d'un courant de décharge de 50 mA, à quelle température la capacité de la pile est-elle égale à 90% de sa capacité maximale?

**FIG. 2.17** Courbe de décharge de la pile EVEREADY® BH500.

*Solution:*

- a. La figure 2.16a indique que la capacité est de 450 mAh environ pour un courant de 600 mA. L'équation (2.5) donne:

$$\text{Durée de décharge} = \frac{450 \text{ mAh}}{600 \text{ mA}} = 0,75 \text{ h} = \mathbf{45 \text{ min}}$$

- b. D'après la figure 2.16b, la capacité maximale est approximativement de 520 mAh, de sorte que 98% correspondent à 468 mAh. Cette valeur s'obtient à deux températures: juste au-dessus du point de congélation, soit 1°C, et à la température plus élevée de 45°C.



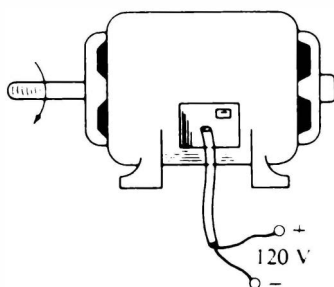


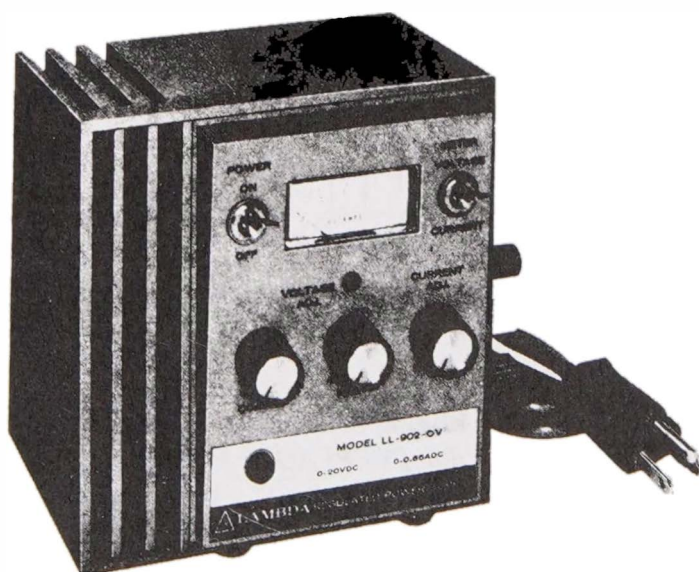
FIG. 2.18 Génératrice.

**Génératrices** La génératrice diffère de la batterie tant par sa fabrication (figure 2.18) que par son fonctionnement. La tension nominale apparaît aux bornes de la machine lorsque l'arbre de cette dernière est mis en rotation par une force extérieure à la vitesse indiquée sur la plaque signalétique. Ordinairement, la tension et la puissance des génératrices sont supérieures à celles de la plupart des batteries, et leur durée de vie ne dépend que de leur construction mécanique. Les tensions typiques des génératrices qu'on trouve dans le commerce sont de 120 V et de 240 V. Dans ce manuel, nous emploierons le même symbole pour représenter la batterie et la génératrice.

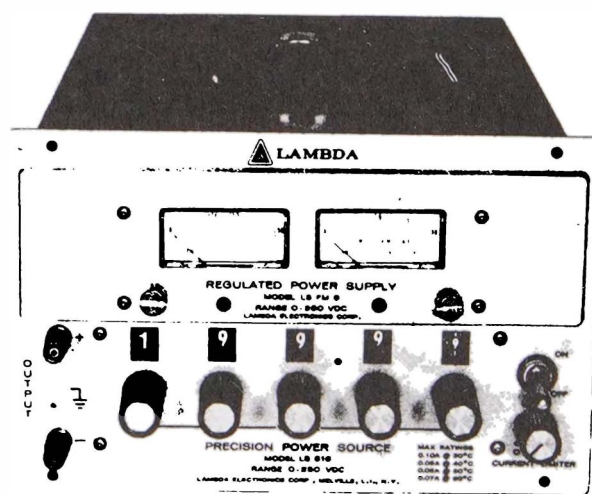
**Dispositifs redresseurs** Pratiquement tous les appareils électroniques et de nombreux appareils industriels ont besoin de courant continu pour fonctionner. Pour être alimenté par le secteur, chacun comporte un dispositif redresseur qui transforme la tension variable ou périodique qui est fournie en une tension continue. Le redressement fait l'objet d'une étude détaillée dans tout cours élémentaire d'électronique.

### Alimentations à tension fixe

Les sources à courant continu mentionnées précédemment donnent une tension relativement stable. Mais dans les laboratoires, on se sert d'alimentations à tension fixe. La figure 2.19 illustre deux alimentations de laboratoire.



(a)

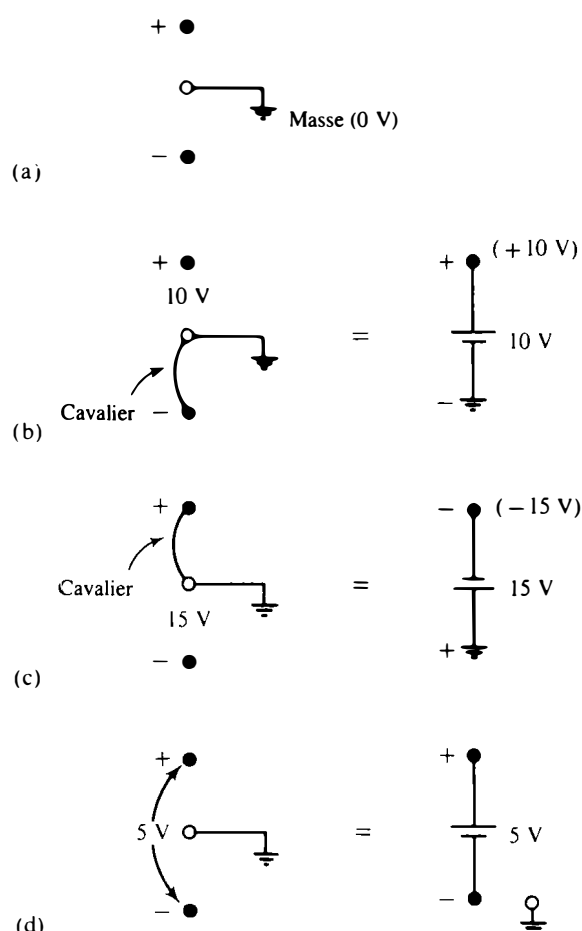


(b)

Courtoisie de Lambda Electronics.

FIG. 2.19 Alimentations de laboratoire à courant continu et à tension fixe.

Comme la plupart des appareils de ce type, elles possèdent trois bornes (figure 2.20a). Une des bornes, celle du milieu, est à la masse ou au potentiel nul (borne de référence). Pour obtenir une tension de 10 V supérieure à la masse, les raccordements aux bornes doivent se faire de la façon indiquée à la figure 2.20b. S'il faut une tension de 15 V inférieure à la masse, on procède de la façon indiquée à la figure 2.20c.



**FIG. 2.20** Différents raccords aux bornes d'une alimentation de laboratoire à tension continue.

Quant à la figure 2.20d, elle montre comment obtenir une tension « flottante » de 5 V; la tension est dite flottante puisque aucun raccordement n'est fait à la borne de référence. On laisse rarement « flotter » une tension, car l'utilisateur risque de servir de circuit de mise à la masse pour la tension flottante.

### Sources à courant continu

La source à tension continue se présente sous de très nombreuses formes et sert à une multitude d'applications; c'est un dispositif connu du grand public et ses caractéristiques sont donc comprises par le profane, à tout le moins dans leur essentiel. Tous savent par exemple qu'une batterie d'automobile de 12 V fournit (approximativement) une tension de 12 V, peu importe l'appel de courant nécessaire à l'alimentation des circuits électriques de l'automobile. En d'autres termes, *une source à tension continue fournit idéalement une tension constante indépendamment des variations de l'appel de courant*. Au contraire, *une source à courant continu débite idéalement un courant d'intensité constante dans une charge, indépendamment des variations de la tension aux bornes de la charge*. (Le principe des sources à courant continu est complexe; qu'on ne s'alarme pas de n'en pas saisir la notion, nous l'étudierons en détail ailleurs dans le manuel.)



L'apparition de dispositifs à semi-conducteurs, tels que le transistor, explique l'intérêt croissant porté aux sources à courant continu. la figure 2.21 illustre un modèle commercial d'une telle source.



Courtoisie de Lambda Electronics.

**FIG. 2.21** Source à courant continu.

## 2.5 CONDUCTEURS ET ISOLANTS

Différents fils raccordés aux bornes d'une même batterie ne sont pas parcourus par le même courant. L'intensité du courant débité dépend de nombreux facteurs liés à la nature du matériau dont est constitué le fil. *Les conducteurs sont les matériaux qui permettent un passage aisé des électrons, même si la f.é.m. appliquée est très petite.* Le cuivre étant le plus important conducteur, nous nous en sommes servi pour établir la conductivité relative d'autres matériaux au tableau 2.1. Notons que l'aluminium, autre conducteur d'emploi assez généralisé, est d'une conductivité relative de 61%; ce sont d'autres facteurs, c'est-à-dire sa masse et son coût, qui en font l'intérêt.

Les matériaux qui ne comptent que très peu d'électrons libres ont une grande stabilité électrique et sont donc des *isolants*; *il faut une f.é.m. considérable pour qu'un courant appréciable*

**TABLEAU 2.1** Conductivité relative de divers métaux.

Métal	Conductivité relative (%)
Argent	105
Cuivre	100
Or	70,5
Aluminium	61
Tungstène	31,2
Nickel	22,1
Fer	14
Constantan	3,52
Nichrome	1,73
Calorite	1,44

les traverse. Les isolants sont communément employés pour gainer les fils porteurs de courant qui, à nu, pourraient donner lieu à de dangereux effets secondaires. Les monteurs de ligne haute tension portent d'ailleurs des gants de caoutchouc à titre de mesure de sécurité supplémentaire. Ce n'est évidemment pas là le seul emploi des isolants. La figure 2.22 illustre divers types d'isolateurs.

Soulignons que même le meilleur isolant peut claquer (laisser passer un courant important) en présence d'une différence de potentiel suffisamment élevée. Nous donnons au tableau 2.2 la rigidité diélectrique (résistance au claquage) de certains isolants d'emploi répandu.

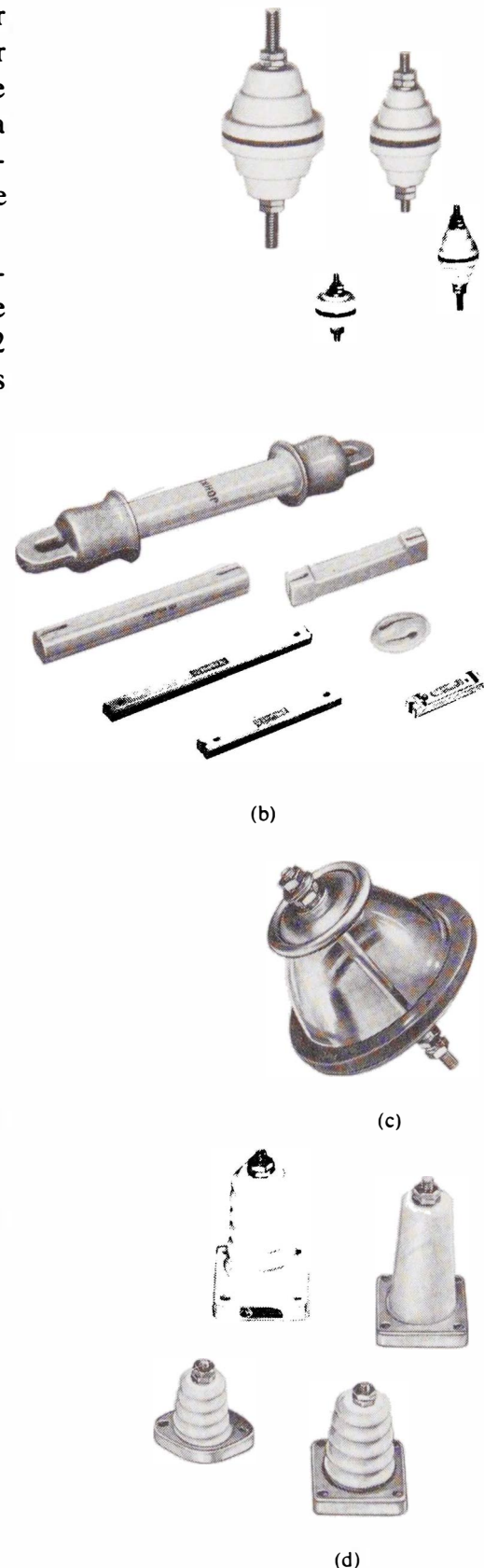
**TABLEAU 2.2** Rigidité diélectrique d'isolants d'emploi répandu.

Matériau	Rigidité diélectrique moyenne (en kV/cm)
Air	30
Porcelaine	70
Huiles	140
Bakélite	150
Caoutchouc	270
Papier (paraffiné)	500
Teflon	600
Verre	900
Mica	2000

Le tableau indique que la tension de claquage d'un isolateur au caoutchouc est neuf (270/30) fois plus grande que celle d'un isolateur identique à air; celle d'un isolateur au mica identique est environ 67 fois plus grande que celle d'un isolateur à l'air identique.

## 2.6 SEMI-CONDUCTEURS

En plus des *isolants* et des *conducteurs*, il existe des matériaux aux propriétés importantes: ce sont les *semi-conducteurs*. Les diodes, les transistors et les circuits intégrés, dont nous entendons si souvent parler, sont fabriqués à l'aide de semi-conducteurs. Bien que le *silicium* soit l'élément le plus employé, le *germanium* entre aussi dans la fabrication de certains dispositifs. Les propriétés de ces deux éléments sont étudiés dans tout cours d'électronique.



Courtoisie de Herman H. Smith, Inc.

**FIG. 2.22** Isolateurs: (1) traversées isolantes; (b) maillons isolants pour antenne; (c) traversée à capsule isolante; (d) supports de porcelaine.



## PROBLÈMES

### Section 2.1

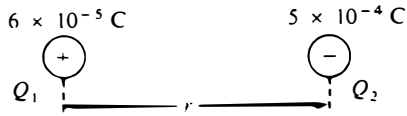


FIG. 2.23

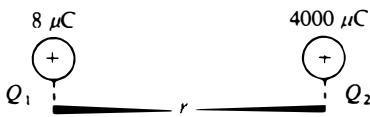


FIG. 2.24

1. Les atomes de l'aluminium et de l'argent comptent respectivement 13 et 47 électrons orbitaux. Dessinez la configuration électronique de ces deux éléments, en indiquant toutes les couches et les sous-couches, et expliquez brièvement pourquoi chacun est bon conducteur.
2. Calculez en newtons la force attractive qui s'exerce entre les particules chargées  $Q_1$  et  $Q_2$  de la figure 2.23, sachant que
  - a.  $r = 1$  m;
  - b.  $r = 3$  m;
  - c.  $r = 10$  m.
 (À noter la chute rapide de la force avec l'augmentation de  $r$ .)
- \*3. Calculez en newtons la force répulsive qui s'exerce entre les particules chargées  $Q_1$  et  $Q_2$  de la figure 2.24, sachant que:
  - a.  $r = 1$  m;
  - b.  $r = 0,01$  m;
  - c.  $r = 1$  mm.
4. Une force répulsive de 1,8 N s'exerce entre deux particules chargées,  $Q_1$  et  $Q_2$ , éloignées de 2 m.
  - a. Quelle est la force répulsive lorsque la séparation est de 10 m?
  - b. Sachant que le rapport  $Q_1/Q_2 = 0,5$ , calculez la charge des deux particules.

### Section 2.2

5. Une charge de 650 C traverse un fil en 50 s. Quelle est l'intensité du courant en ampères?
6. Une charge de 465 C traverse un fil en 2,5 min. Quelle est l'intensité du courant en ampères?
7. Un courant de 40 A parcourt un conducteur pendant 1 min. Quelle est la charge en coulombs ayant traversé le conducteur?
8. Un courant constant de 750 mA passe dans une ampoule pendant 2 min. Quelle est la charge en coulombs ayant traversé l'ampoule?
9. Un courant constant de 2 mA parcourt un conducteur. Combien faut-il de temps pour qu'une charge de  $4600 \times 10^{-6}$  C traverse le conducteur?
10. Calculez l'intensité du courant créé par le passage dans un fil de  $21,847 \times 10^{18}$  électrons en 7 s.
11. Un courant de 1 A parcourt un conducteur pendant 1 min. Combien d'électrons ont passé dans le conducteur?
- \*12. Calculez l'intensité du courant créé par le passage dans un fil de  $0,784 \times 10^{18}$  électrons en 643 ms.
13. Une charge de 86 C traverse un fusible de 1 A en 1,2 min. Le fusible grille-t-il?



## Section 2.3

14. Définissez, en vos propres mots, les notions de tension, de différence de potentiel et de f.é.m.
15.
  - a. Le déplacement d'une charge de 8 C de l'infini au point  $x$  nécessite une énergie de 72 J. Quelle est la différence de potentiel entre l'infini et le point  $x$ ?
  - b. Il faut 24 J supplémentaires pour amener la charge du point  $x$  au point  $y$ . Quelle est la d.d.p. entre  $x$  et  $y$ ?
  - c. Quelle est la d.d.p. entre l'infini et le point  $y$ ?
16. La différence de potentiel entre deux points est de 42 V. Quel travail faut-il pour amener une charge de 6 C d'un point à l'autre?
17. Il faut 96 J pour déplacer une charge entre deux points dont la différence de potentiel est de 16 V. Quelle est la grandeur de la charge?
18. La f.é.m. d'une batterie est de 22,5 V. Quelle est la charge déplacée, si l'énergie utilisée est de 90 J?
19. Un conducteur parcouru par un courant de 500 mA transforme, en 30 s, 40 J d'énergie électrique en chaleur. Quelle est la chute de potentiel aux bornes du conducteur?
20. Le débit de charge dans un conducteur est de 420 C/min. Quelle est la chute de potentiel aux bornes du conducteur, si une énergie électrique de 742 J est transformée en chaleur en 1 min?

## Section 2.4

21. Quelle est l'intensité de courant que peut en principe débiter une batterie d'une capacité de 200 Ah pendant 40 h?
22. Une batterie peut débiter 0,8 A pendant 76 h. Quelle est sa capacité?
23. Pendant combien d'heures, en principe, une batterie d'une capacité de 32 Ah peut-elle débiter un courant de 1,28 A?
24. À l'aide de la figure 2.16b, calculez la capacité en milliampères-heures de la pile EVEREADY® BH500 à 40°C et à 0°C, lorsque le courant de décharge est de 50 mA.
25. À l'aide de la figure 2.16a, calculez la capacité en milliampères-heures de la pile IV EVEREADY® BH500, lorsque le courant de décharge est de 550 mA. Pendant combien de temps la pile peut-elle débiter ce courant?
26. À l'aide de la figure 2.17, calculez pendant combien de temps la pile peut débiter un courant de 5 mA avant que la tension à ses bornes ne chute à moins de 1 V. Faites le même calcul pour un courant de 150 mA et comparez le rapport des intensités de courant au rapport des durées de décharge.
27. Établissez brièvement la différence entre les trois types de source de tension continue (batterie, génératrice, redresseur).
28. Expliquez en quelques phrases ce qu'est une source de courant continu, en faisant appel à ses caractéristiques.



### Section 2.5

29. Indiquez deux caractéristiques de l'atome de cuivre qui font de ce matériau un bon conducteur.
30. Nommez deux matériaux autres que ceux du tableau 2.1 qui sont bons conducteurs électriques.
31. Qu'entend-on par *isolant* et *rigidité diélectrique*?
32. Donnez trois utilisations des isolants autres que celles que nous mentionnons à la section 2.5.

### Section 2.6

33. Qu'est-ce qu'un semi-conducteur? Comment se compare-t-il à un conducteur et à un isolant?

## GLOSSAIRE

**Ampère (A)** Unité SI relative au déplacement des charges dans un conducteur.

**Capacité (Ah)** Indication du temps pendant lequel une source d'énergie peut débiter un courant d'une certaine intensité.

**Cellule** Source fondamentale d'énergie électrique obtenue à partir de réactions chimiques ou d'énergie solaire.

**Cellule primaire** Source de f.é.m. non rechargeable.

**Cellule secondaire** Source de f.é.m. rechargeable.

**Conducteur** Matériau qui permet un passage aisé des électrons même si la f.é.m. appliquée est très petite.

**Coulomb (C)** Unité SI de la charge. Elle correspond à la charge portée par  $6,242 \times 10^{18}$  électrons.

**Courant continu** Courant caractérisé par le déplacement unidirectionnel des électrons.

**Cuivre** Métal dont les propriétés physiques en font un conducteur particulièrement utile.

**Densité relative** Quotient de la masse d'un volume donné d'une substance par la masse du volume d'eau équivalent à 4°C.

**Différence de potentiel** Différence entre les potentiels de deux points d'un circuit électrique.

**Ductilité** Propriété des matériaux qui peuvent être étirés sans se rompre.

**Électrolyte** Élément de contact et source des ions se trouvant entre les électrodes d'une batterie.

**Électron** Particule de charge négative en orbite autour du noyau d'un atome.

**Électron libre** Électron non lié à un atome précis et relativement libre de se déplacer dans le réseau cristallin sous l'influence de forces extérieures.

**Énergie potentielle** Énergie que possède un corps en raison de sa position dans un champ de force.

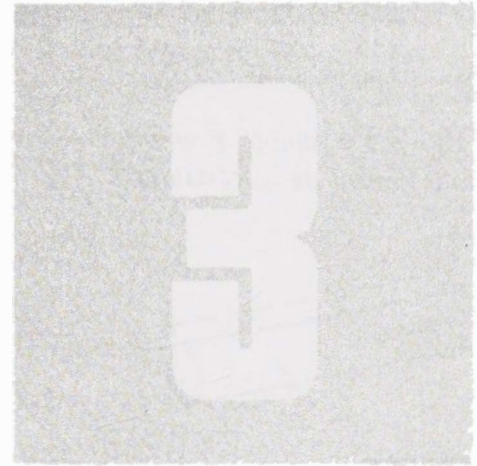


- Force électromotrice (f.é.m.)** Force qui induit le passage du courant; elle est égale à la différence de potentiel entre les bornes d'une batterie.
- Génératrice** Source d'énergie produisant une tension continue lorsque l'arbre de l'appareil est mis en rotation par une force extérieure.
- Ion positif** Atome portant une charge positive à cause de la perte d'un ou de plusieurs de ses électrons.
- Isolant** Matériau exigeant une f.é.m. considérable pour qu'un courant appréciable y soit établi.
- Loi de Coulomb** Relation définissant la force d'attraction ou de répulsion existant entre deux charges.
- Malléabilité** Propriété des matériaux auxquels il est possible de donner de nombreuses formes différentes.
- Neutron** Particule à l'intérieur du noyau des atomes ne possédant aucune charge.
- Pile solaire** Source de f.é.m. basée sur la conversion de l'énergie lumineuse (photons) en énergie électrique.
- Proton** Particule de charge positive à l'intérieur du noyau des atomes.
- Redressement** Procédé de conversion d'un signal alternatif en un signal continu.
- Semi-conducteur** Matériau dont les propriétés se situent entre celles des isolants et celles des conducteurs. Il joue un rôle important dans la fabrication de certains composants électroniques.
- Source de courant continu** Source produisant un courant continu d'intensité fixe malgré les variations de la tension induites à ses bornes par la charge.
- Volt (V)** Unité SI de la différence de potentiel. La différence de potentiel entre deux points est de 1 V si l'énergie dépensée à déplacer une charge de 1 C entre ceux-ci est de 1 J.





# RÉSISTANCE



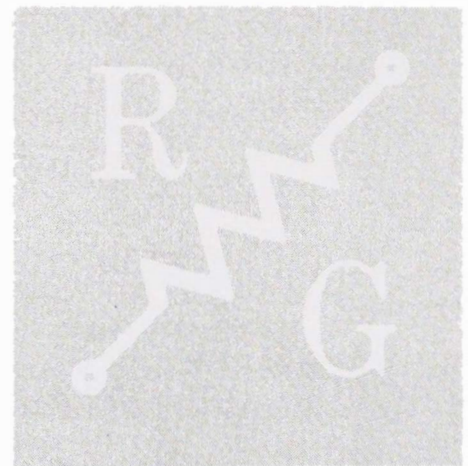
## 3.1 INTRODUCTION

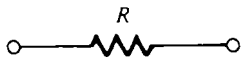
Dans tout matériau, il existe une force, analogue à un frottement mécanique à de nombreux égards, qui s'oppose au déplacement des charges. Cette force d'opposition, qui résulte des collisions des électrons entre eux et des électrons avec les atomes, transforme de l'énergie électrique en énergie thermique; on l'appelle la *résistance* du matériau. L'unité de mesure de la résistance est l'*ohm*, symbolisé par  $\Omega$ , lettre majuscule de l'alphabet grec. Le symbole graphique et le symbole littéral ( $R$ ) de la résistance sont donnés à la figure 3.1.

La résistance d'un conducteur de section transversale uniforme dépend uniquement de quatre facteurs (voir le conducteur filiforme de la figure 3.2):

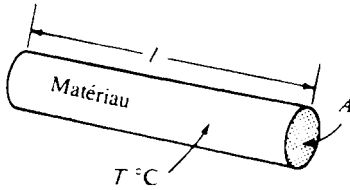
- la nature du matériau;
- la longueur du conducteur;
- l'aire de la section;
- la température.

La figure 3.3 illustre cette quadruple dépendance. Les résistances de deux fils de mêmes dimensions et de même température dépendent uniquement des matériaux conducteurs (figure 3.3a). Comme l'indique la figure 3.3b, la résistance d'un fil conducteur augmente avec sa longueur. Par contre, elle diminue lorsque la section du conducteur augmente, comme l'illustre la figure 3.3c. Enfin, une augmentation de la température (figure 3.3d) entraîne une augmentation de la résistance.





**FIG. 3.1** Symbole graphique et symbole littéral de la résistance.



**FIG. 3.2**

De ce qui précède, il est presque évident que la résistance est proportionnelle à la longueur du conducteur et à la nature du matériau dont il est constitué, et inversement proportionnelle à l'aire de sa section. Écrivons cette relation sous la forme d'une équation, en supposant que la température ambiante soit de 20°C:

$$R = \rho \frac{l}{A}$$

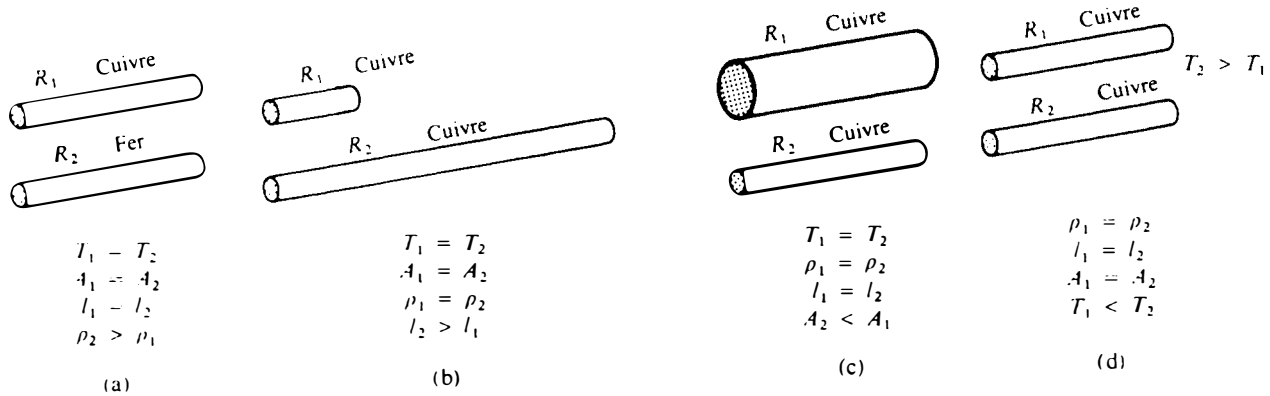
$R$  = résistance en ohms

$l$  = longueur en mètres

$A$  = aire de la section en mètres carrés

(3.1)

$\rho$  = résistivité (caractéristique du matériau à 20°C)



**FIG. 3.3** Cas où  $R_2 > R_1$ .

Soulignons que l'aire de la section du conducteur doit être exprimée en *mètres carrés* dans cette équation. Prudence donc, d'autant plus que la section des conducteurs est toujours donnée en millimètres carrés dans le SI.

**EXEMPLE 3.1** Calculer la résistivité d'un fil de cuivre de 100 m de longueur et de 1,5 mm<sup>2</sup> de section, si sa résistance est de 1,15 Ω.

*Solution:*

$$R = \rho \frac{l}{A}$$

$$\frac{AR}{l} = \rho$$

$$\rho = \frac{1,5 \text{ mm}^2 \times 1,15}{100 \text{ m}}$$

$$\rho = \frac{1,5 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \times 1,15}{100 \text{ m}}$$

$$\rho = \frac{1,5 \times 1,15}{100} \times 10^{-6} \text{ } \Omega \cdot \text{m}$$

$$\rho = 17,25 \times 10^{-9} \text{ } \Omega \cdot \text{m}$$

La résistivité  $\rho$  est une constante caractéristique du matériau conducteur. Par définition, c'est la résistance d'un fil de 1 m de longueur et de 1 m<sup>2</sup> de section, mesurée à 20°C. Son unité est l'ohm-mètre ( $\Omega \cdot m$ ), comme nous l'avons établi dans l'exemple ci-dessus.

Le tableau 3.1 donne la résistivité typique de certains matériaux conducteurs.

**TABLEAU 3.1** Résistivité de divers matériaux.

Matériau	$\rho$ (en ohms-mètres) à 20°C
Argent	$16,4 \times 10^{-9}$
Cuivre	$17,2 \times 10^{-9}$
Or	$24,4 \times 10^{-9}$
Aluminium	$28,2 \times 10^{-9}$
Tungstène	$54,7 \times 10^{-9}$
Nickel	$78 \times 10^{-9}$
Fer	$123 \times 10^{-9}$
Constantan	$490 \times 10^{-9}$
Nichrome	$996 \times 10^{-9}$
Calorite	$1\,195 \times 10^{-9}$
Carbone	$34\,860 \times 10^{-9}$

**EXEMPLE 3.2** Quelle est à 20°C la résistance d'un fil de cuivre d'une longueur de 30 m et d'une section de 0,19 mm<sup>2</sup>?

*Solution:*

$$\rho = 17,2 \times 10^{-9} \Omega \cdot m$$

$$A = 0,19 \text{ mm}^2 = 0,19 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

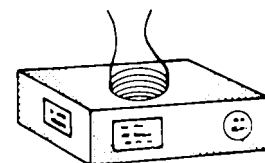
$$l = 30 \text{ m}$$

$$R = \rho \frac{l}{A} = \frac{(17,2)(30)(10^{-9})}{(0,19)(10^{-6})}$$

$$= \frac{(17,2)(30)}{(0,19)} 10^{-3}$$

$$R = 2,71 \Omega$$

**EXEMPLE 3.3** Un carton contient un fil de cuivre d'une longueur indéterminée (figure 3.4). Calculer la longueur du fil, si sa section est de 1 mm<sup>2</sup> et sa résistance de 0,75  $\Omega$ .



**FIG. 3.4**



*Solution:*

$$\rho = 17,2 \times 10^{-9} \Omega \cdot \text{m}$$

$$A = 1 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$R = \rho \frac{l}{A} \Rightarrow l = \frac{RA}{\rho} = \frac{(0,75)(1)(10^{-6})(10^9)}{(17,2)}$$

$$= \frac{(0,75)}{(17,2)} 10^3$$

$$= 43,6 \text{ m}$$

**EXEMPLE 3.4** Le distributeur d'une tour de bureaux comporte une barre omnibus d'aluminium dont les cotes sont données à la figure 3.5. Quelle est la résistance de la barre omnibus?

*Solution:*

$$\rho = 28,2 \times 10^{-9} \Omega \cdot \text{m}$$

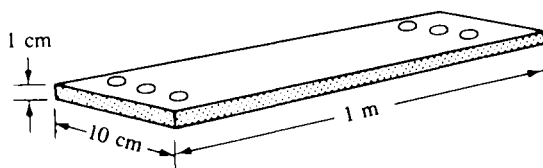
$$l = 1 \text{ m}$$

$$A = (1 \text{ cm})(10 \text{ cm}) = 10 \text{ cm}^2$$

$$= 10 \times 10^{-4} \text{ m}^2 = 1 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$R = \rho \frac{l}{A} = \frac{(28,2)(10^{-9})(1)}{(1)(10^{-3})}$$

$$R = 28,2 \times 10^{-6} \Omega$$

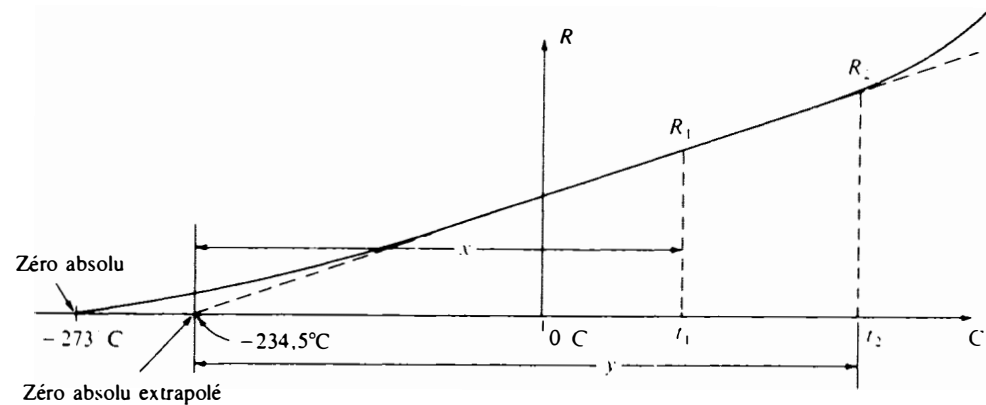


**FIG. 3.5**

## 3.2 EFFETS THERMIQUES

La résistance de la plupart des matériaux conducteurs augmente avec la température, en raison de l'agitation accrue des molécules du matériau qui gêne le passage des charges. La figure 3.6 indique que la résistance du cuivre (et de la plupart des autres matériaux conducteurs) augmente de façon presque linéaire avec la température. Par contre, la résistance des matériaux semi-conducteurs employés dans la fabrication des transistors, des diodes, etc. chute lorsque la température augmente.

Les effets thermiques étant si prononcés, il est important de se doter d'une méthode permettant de déterminer la résistance du conducteur à toute température dans sa gamme de service. À cette fin, nous pouvons écrire l'équation approximative de la courbe de la figure 3.6 en supposant qu'il s'agisse d'une droite coupant l'échelle des températures au point  $-234,5^\circ\text{C}$ . Bien que la courbe réelle croise cette échelle au *zéro absolu* ( $-273,0^\circ\text{C}$ ), l'approximation de la ligne droi-


**FIG. 3.6** Effet de la température sur la résistance du cuivre.

te est suffisamment précise dans la gamme des températures normales de service. Nous indiquons sur la courbe la résistance  $R_1$  et  $R_2$  du cuivre à deux températures différentes,  $t_1$  et  $t_2$ . En faisant appel à une propriété des triangles semblables, nous pouvons écrire une relation mathématique donnant la résistance du cuivre en fonction de sa température. Soit  $x$  la distance du point  $-234,5^\circ\text{C}$  au point  $t_1$  et  $y$  la distance du point  $-234,5^\circ\text{C}$  au point  $t_2$ , comme l'illustre la figure 3.6. Les triangles étant semblables, on peut écrire:

$$\frac{x}{R_1} = \frac{y}{R_2}$$

ou:

$$\boxed{\frac{234,5 + t_1}{R_1} = \frac{234,5 + t_2}{R_2}} \quad (3.2)$$

Le point où le prolongement de la partie linéaire de la courbe coupe l'échelle des températures ( $-234,5^\circ\text{C}$ ) est le *zéro absolu extrapolé* du cuivre. Le zéro absolu extrapolé de deux matériaux différents n'est évidemment pas le même. Le tableau 3.2 donne le zéro absolu extrapolé de certains matériaux communément employés.

**TABLEAU 3.2** Zéro absolu extrapolé de certains matériaux.

Matériau	Température ( $^\circ\text{C}$ )
Argent	-243
Cuivre	-234,5
Or	-274
Aluminium	-236
Tungstène	-204
Nickel	-147
Fer	-162
Constantan	-125 000
Nichrome	-2250



L'équation (3.2) est évidemment valable pour tout matériau, à condition qu'on y utilise le zéro absolu extrapolé de ce matériau. On peut donc la généraliser:

$$\boxed{\frac{|T| + t_1}{R_1} = \frac{|T| + t_2}{R_2}} \quad (3.3)$$

$|T|$  représentant la valeur absolue du zéro absolu extrapolé.

**EXEMPLE 3.5** La résistance d'un fil de cuivre est de  $50 \Omega$  à  $20^\circ\text{C}$ . Quelle est sa résistance à  $100^\circ\text{C}$  (point d'ébullition de l'eau)?

*Solution:* De l'équation (3.2), on a:

$$\frac{234,5 + 20}{50} = \frac{234,5 + 100}{R_2}$$

$$R_2 = \frac{50(334,5)}{254,5} = 65,72 \Omega$$

**EXEMPLE 3.6** La résistance d'un fil de cuivre est de  $30 \Omega$  à  $0^\circ\text{C}$  (point de congélation de l'eau). Quelle est sa résistance à  $-40^\circ\text{C}$ ?

*Solution:* De l'équation (3.2), on a:

$$\frac{234,5 + 0}{30} = \frac{234,5 - 40}{R_2}$$

$$R_2 = \frac{30(194,5)}{234,5} = 24,88 \Omega$$

Voici enfin une deuxième équation bien connue qui permet de calculer la résistance d'un conducteur à diverses températures. Définissons:

$$\alpha_1 = \frac{1}{|T| + t_1}$$

comme étant le *coefficient de température de la résistance* à la température  $t_1$ ; nous avons par conséquent:

$$\boxed{R_2 = R_1[1 + \alpha_1(t_2 - t_1)]} \quad (3.4)$$

On a déterminé les valeurs de  $\alpha_1$  à  $20^\circ\text{C}$  pour un assez grand nombre de matériaux; nous donnons le coefficient de certains matériaux au tableau 3.3. À noter dans ce tableau que le carbone a un *coefficient de température négatif*; c'est aussi le cas des matériaux semi-conducteurs. En d'autres termes, la résistance de ces matériaux chute lorsque leur température augmente, et vice versa.

**TABLEAU 3.3** Coefficient de température de certains matériaux à 20°C.

Matériau	Coefficient de température ( $\alpha_1$ )
Argent	0,003 8
Cuivre	0,003 93
Or	0,003 4
Aluminium	0,003 91
Tungstène	0,005
Nickel	0,006
Fer	0,005 5
Constantan	0,000 008
Nichrome	0,000 44
Carbone	-0,000 5

L'équation (3.4) peut se réécrire de la façon suivante:

$$m = \text{pente de la courbe} = \frac{\Delta x}{\Delta y}$$
$$\alpha_1 = \frac{1}{R_1} \left[ \frac{R_2 - R_1}{t_2 - t_1} \right]$$

Il s'agit de l'équation d'une droite dont la pente  $m$  est égale à la pente de la courbe illustrée à la figure 3.6. Le coefficient de température est donc proportionnel à la pente de cette courbe, de sorte que plus grande est la pente plus grande est la valeur de  $\alpha_1$ . D'où la conclusion: *plus grande est la valeur de  $\alpha_1$ , plus grande est la variation de la résistance avec la température*. À cet égard, le tableau 3.3 nous indique que le cuivre est plus sensible aux variations de la température que l'argent, l'or ou l'aluminium, bien que ce soit de très peu.

### 3.3 SECTIONS NOMINALES DES CONDUCTEURS

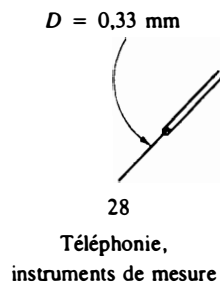
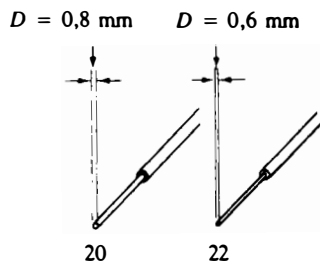
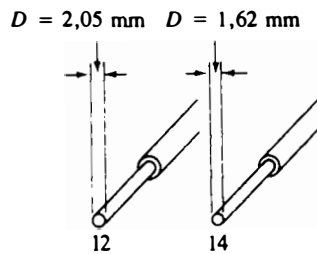
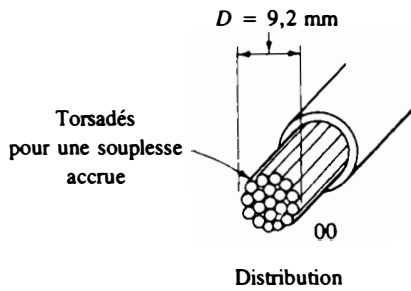
La normalisation des sections nominales des conducteurs présente des avantages évidents. D'une part, elle offre aux fabricants des marchés élargis. D'autre part, elle protège le consommateur puisque les sections ne peuvent être changées au gré de la fantaisie des fabricants. Dans le tableau ci-dessous, nous donnons les sections nominales uniformisées de conducteurs en cuivre couramment utilisés en France. Sont précisés les courants admissibles ainsi que les résistances aux 1000 m à 20°C.





**TABLEAU 3.4** Sections nominales et résistances de conducteurs de cuivre\*.

Section (mm <sup>2</sup> )	Courant admissible (A)	Résistance (Ω/1000 m)
0,19	6	90,5
0,28	7	61,4
0,5	10	34,4
0,65	12	26,5
0,75	13,5	23
1	15	17,2
1,5	19,5	11,5
2,5	26	6,9
4	35	4,3
6	46	2,9
10	63	1,7
16	85	1,07
25	112	0,7
35	138	0,5
50	168	0,35
70	213	0,25
95	258	0,18
120	299	0,14
150	344	0,11
185	392	0,09
240	461	0,07



\* Câbles à deux conducteurs de phase et un conducteur neutre.

Dans le cas des logements et les habitations, les conducteurs ont en pratique les sections suivantes:

- éclairage 1,5 mm<sup>2</sup>
- prises de courant 10/16 A 2,5 mm<sup>2</sup>
- machines à laver 4 mm<sup>2</sup>
- cuisinières 6 mm<sup>2</sup>

Or un conducteur de 2,5 mm<sup>2</sup> a un courant admissible de 26 A (selon le tableau 3.4). Il existe donc un important écart entre le courant admissible (26 A) et le courant nominal (16 A) pour ce conducteur. Cet écart représente un facteur sécurité qui prévient l'échauffement des conducteurs.

En Amérique du Nord, les conducteurs sont désignés par des numéros de jauge (14, 12, etc.). La correspondance entre ces numéros et les sections est faite à l'annexe I.

**EXEMPLE 3.7** La résistance d'un conducteur de cuivre d'une longueur de 2,5 km est de 7,25 Ω. Quel est le courant admissible et quelle est la section du conducteur?

*Solution:* La résistance aux 1000 m du conducteur est:

$$\frac{7,25}{2,5} = 2,9 \Omega$$

Le tableau 3.4 nous indique que le courant admissible est de 46 A et la section de 6 mm<sup>2</sup>.

**FIG. 3.7**

**EXEMPLE 3.8** Voir le circuit illustré à la figure 3.8. La résistance totale de chaque ligne d'alimentation ne doit pas être supérieure à  $0,06 \Omega$ , et l'intensité du courant débité dans la charge peut atteindre 95 A. Quelle est la section du fil à utiliser?

*Solution:*

$$R = \rho \frac{l}{A} \Rightarrow A = \rho \frac{l}{R} = \frac{(17,2)(10^{-9})(50)}{(6)(10^{-2})}$$

$$= 14,33 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$= \mathbf{14,33 \text{ mm}^2}$$

Choisissons la plus petite section supérieure à  $14,33 \text{ mm}^2$ , soit  $16 \text{ mm}^2$ . Sa résistance est nécessairement inférieure à  $0,06 \Omega$  sur 50 m (de fait, elle est de  $0,054 \Omega$ ). Le tableau 3.4 indique que le courant admissible dans ce conducteur est de 85 A. Or le courant débité peut atteindre 95 A; il faut donc choisir un fil plus gros, soit celui dont la section est de  $25 \text{ mm}^2$  (courant admissible: 112 A).

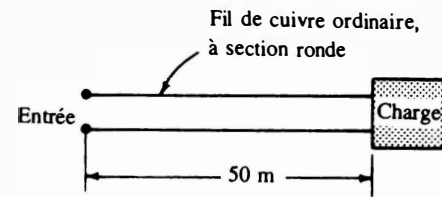
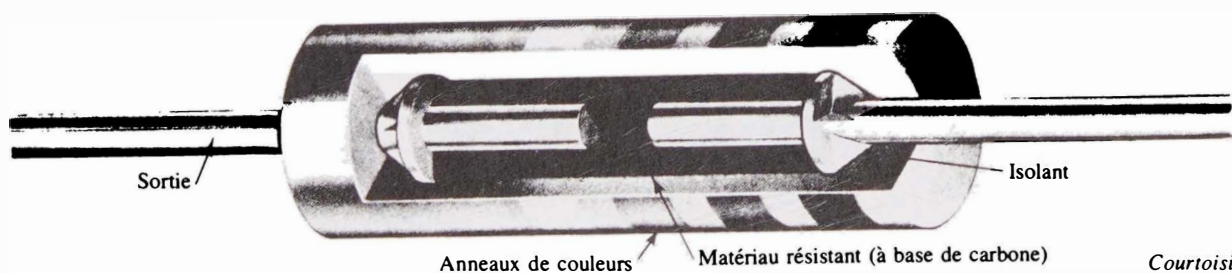


FIG. 3.8

### 3.4 TYPES DE RÉSISTANCES

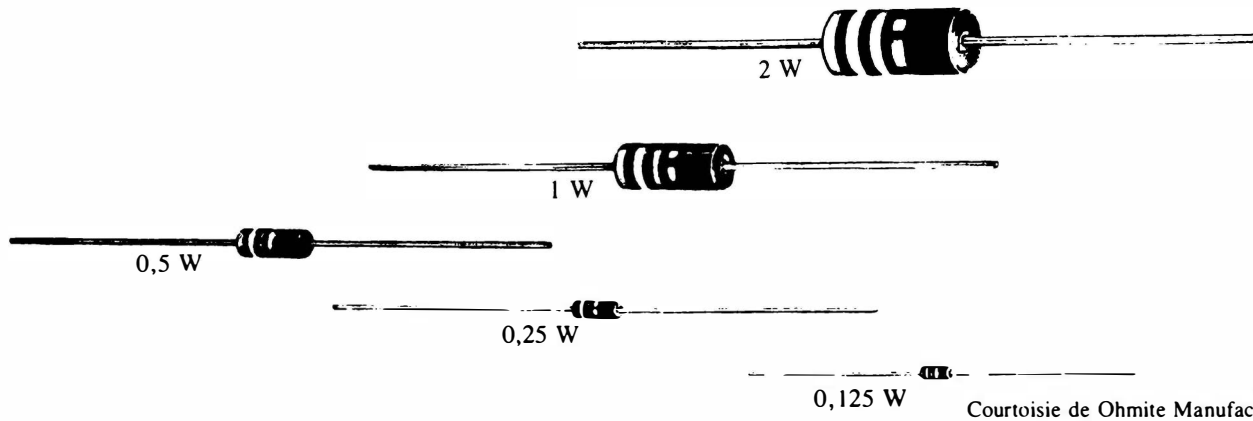
Les résistances se présentent sous de nombreuses formes mais toutes sont soit fixes soit variables. La résistance fixe de faible dissipation la plus communément employée est la résistance agglomérée (figure 3.9).



*Courtoisie de IRC Inc.*

FIG. 3.9 Résistance agglomérée.

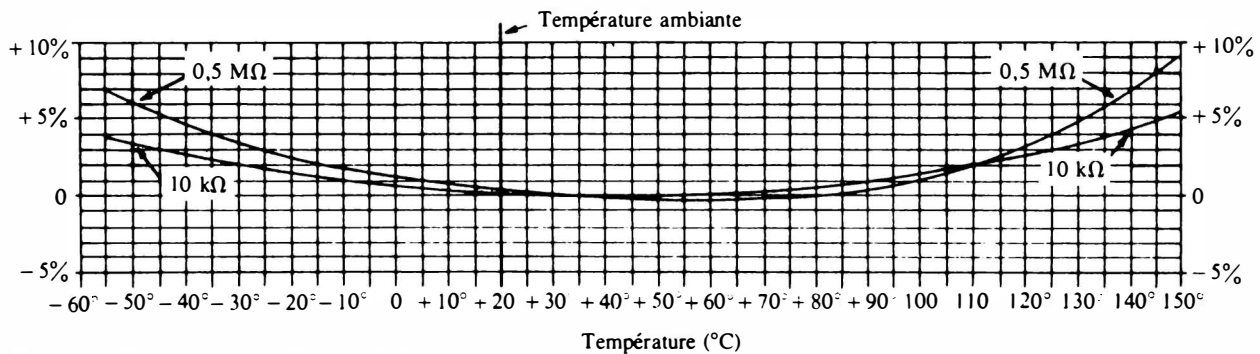
Les dimensions des résistances fixes ou variables dépendent de leur puissance nominale: elles augmentent avec la puissance, de sorte que la résistance puisse être traversée par des courants élevés et qu'elle puisse mieux dissiper la chaleur. La figure 3.10 nous donne une idée de la taille de résistances agglomérées de diverses puissances nominales. Les résistances de ce type sont couramment offertes en valeurs ohmiques allant de  $2,7 \Omega$  à  $22 \text{ M}\Omega$ .



Courtoisie de Ohmite Manufacturing Co.

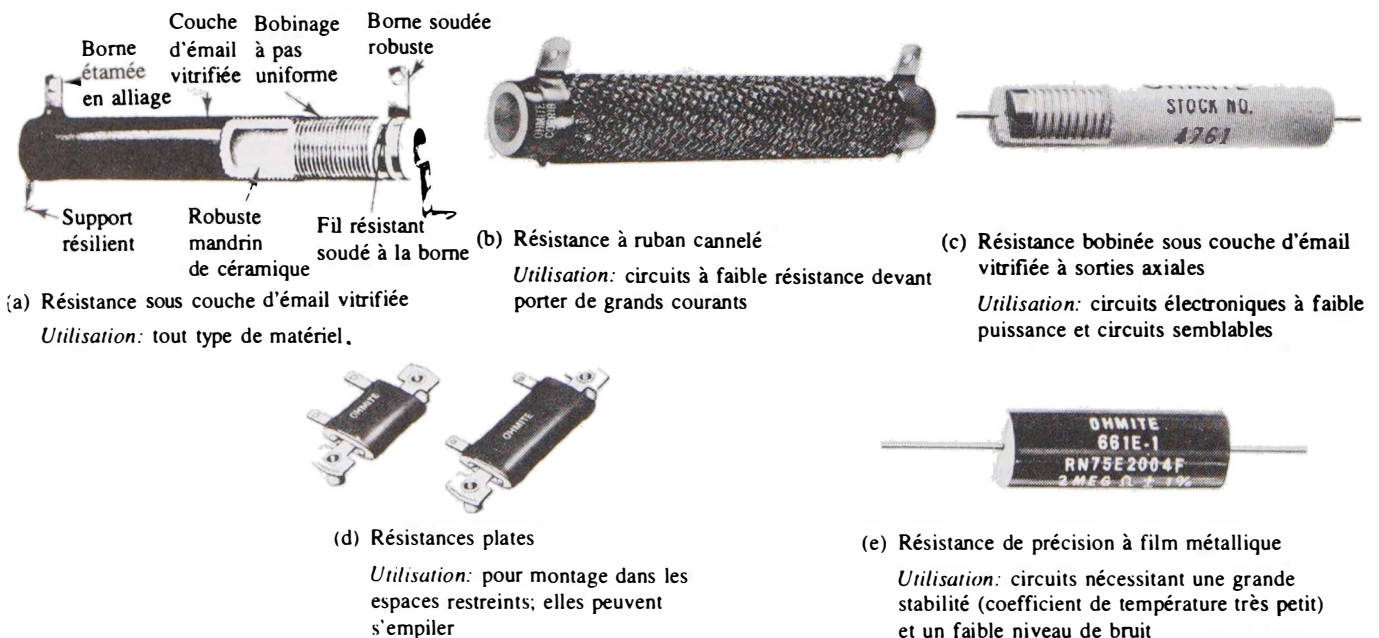
**FIG. 3.10** Résistances agglomérées de diverses puissances nominales.

Les courbes de la résistance en fonction de la température de deux résistances agglomérées ( $10\ 000\ \Omega$  et  $0,5\ M\Omega$ ) sont données à la figure 3.11. Notons la faible variation relative de la résistance dans la gamme normale des températures de service. Les résistances fixes ne sont évidemment pas toutes agglomérées; divers types de résistances fixes sont illustrés à la figure 3.12.



**FIG. 3.11** Courbes de variation relative de la résistance en fonction de la température.

Courtoisie de Allan-Bradley Co.



**FIG. 3.12** Résistances fixes.

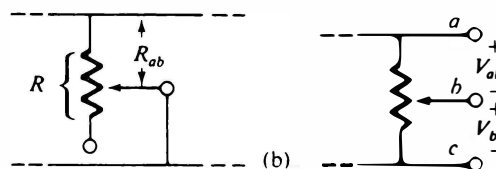
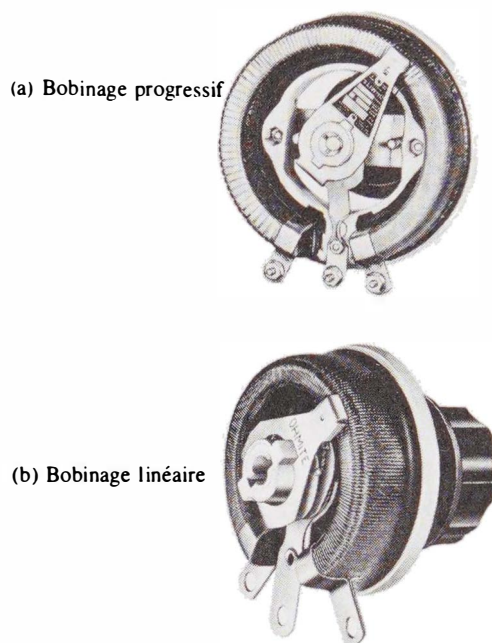
Courtoisie de Ohmite Manufacturing Co.

Les résistances variables se présentent aussi sous de nombreuses formes; de façon générale, elles sont linéaires ou non linéaires. La figure 3.13 représente le symbole graphique du *rhéostat*, résistance linéaire ou non linéaire à deux bornes. La résistance variable à trois bornes peut être appelée *rhéostat* ou *potentiomètre*, selon la façon dont elle est utilisée. La figure 3.13 représente le symbole graphique d'une résistance variable à trois bornes, ainsi que les façons possibles de la monter dans un circuit. La flèche que l'on voit à la figure 3.13 représente une lame de contact mobile (curseur) pouvant se déplacer sur une piste résistante continue. La résistance variable sert de rhéostat si les seules cosses raccordées au reste du circuit sont celles du curseur et de l'une des extrémités de la résistance. C'est alors la position du curseur qui détermine si  $R_{ab}$  est minimale (zéro ohm) ou maximale (égale à  $R$ ). Si ses trois cosses sont raccordées au reste du circuit, la résistance variable sert alors de potentiomètre. Dans le *potentiomètre*, la position du curseur détermine l'importance relative des différences de potentiel  $V_{ab}$  et  $V_{bc}$ .

La figure 3.15 illustre le bobinage d'un rhéostat progressif et d'un rhéostat linéaire. (À compter de maintenant, nous donnons aux résistances variables leur nom approprié, selon leur utilisation la plus fréquente.) Le bobinage du rhéostat linéaire est de pas uniforme, c'est-à-dire que le nombre de spires est constant sur toute la longueur de la piste résistante; la résistance varie donc linéairement avec le déplacement du curseur. Pour un déplacement d'un demi-tour, la résistance entre la borne du curseur et l'une des deux bornes est égale à la moitié de la résistance totale de la piste. Pour un déplacement de trois quarts de tour, la résistance entre la borne du curseur et l'une des bornes fixes est égale aux trois quarts de la résistance totale de la piste, et au quart de la résistance totale entre la borne du curseur et l'autre borne fixe. Dans un rhéostat progressif, par contre, le pas du bobinage n'est pas uniforme; la résistance ne varie donc pas linéairement avec le déplacement du curseur. La résistance mesurée entre la borne du curseur et l'une des bornes fixes est donc supérieure ou inférieure au quart de la résistance totale de la piste pour un déplacement du curseur d'un quart de tour. Les rhéostats illustrés à la figure 3.15 sont fabriqués dans toutes les dimensions, avec des valeurs ohmiques maximales comprises entre  $200 \Omega$  et  $50\,000 \Omega$ .

Le potentiomètre aggloméré illustré à la figure 3.16 est utilisé dans des circuits de puissance inférieure à celle des deux rhéostats décrits ci-dessus. Ses dimensions sont moindres mais sa valeur ohmique maximale varie de  $20 \Omega$  à  $22 \text{ M}\Omega$ .

La figure 3.17 illustre deux autres types de résistance variable, le rhéostat tubulaire et le rhéostat à compression. Le premier est linéaire, le deuxième non linéaire.

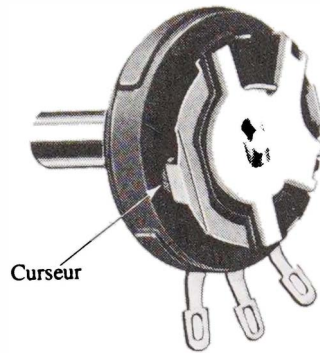

**FIG. 3.13** *Rhéostat.*

**FIG. 3.14** *Potentiomètre.*


*Courtoisie de Ohmite Manufacturing Co.*

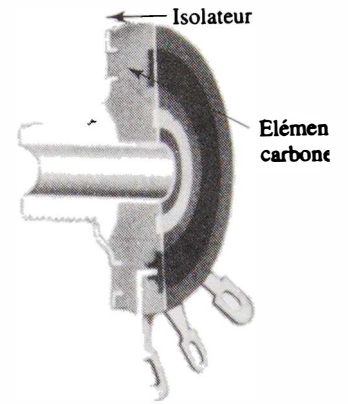
**FIG. 3.15** *Rhéostats bobinés sous couche d'émail vitrifiée.*



(a) Aspect extérieur



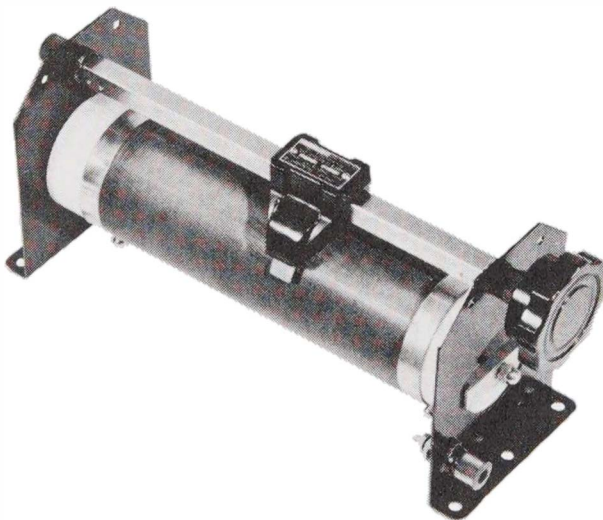
(b) Vue intérieure



(c) Élément de carbone

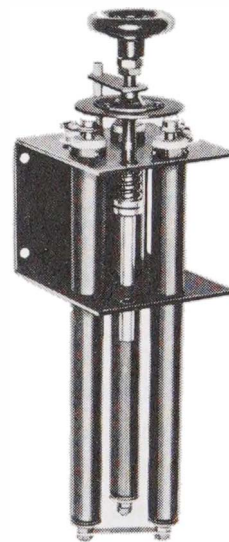
*Courtoisie de Allen-Bradley Co.*

**FIG. 3.16** *Potentiomètre aggloméré.*

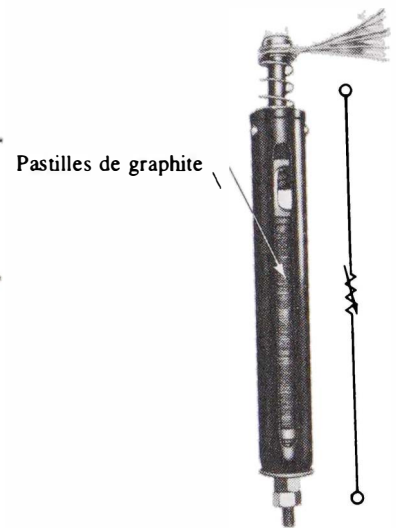


(a) Rhéostat tubulaire

*Courtoisie de James G. Biddle Co.*



Rhéostat au complet



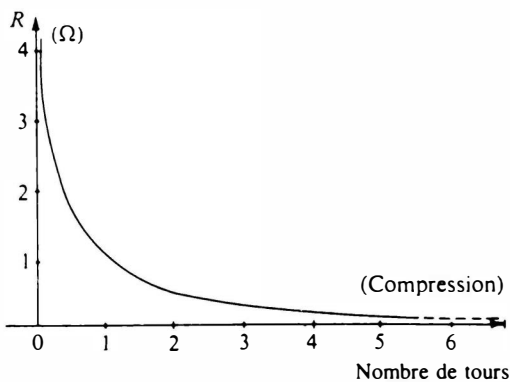
Pastilles de graphite

Détail d'un élément à compression

(b) Rhéostat à compression

*Courtoisie de Allen-Bradley Co.*

**FIG. 3.17** *Rhéostats tubulaires et à compression.*



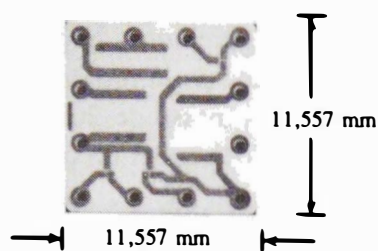
**FIG. 3.18** *Caractéristique du rhéostat à compression.*

La résistance du rhéostat tubulaire est déterminée par la position du curseur, qu'on déplace au moyen d'une manette. Selon la borne fixe que l'on branche au circuit avec celle du curseur, la résistance augmente ou diminue lorsqu'on déplace ce dernier dans un sens donné. Le principe du rhéostat à compression est différent de celui des rhéostats à curseur. La variation de la résistance s'obtient en effet par l'application d'une pression sur une colonne de pastilles de graphite au moyen d'une vis de compression. L'augmentation de la pression fait chuter la résistance, comme l'illustre la courbe de la figure 3.18; cela s'explique par l'obtention d'un meilleur contact entre les pastilles de graphite.

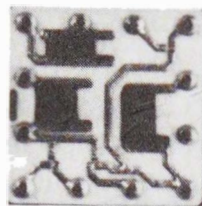
Par ailleurs, la miniaturisation des pièces, qui trouve une vaste application dans les ordinateurs, a nécessité la mise au point de résistances de diverses valeurs ohmiques pouvant tenir dans des emballages très petits. la figure 3.19 illustre un module miniature à trois résistances réalisé en quatre étapes.



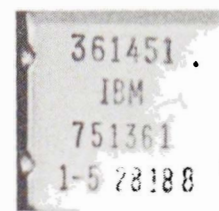
## THERMISTANCES



(a) Mise en place des électrodes



(b) Mise en place des résistances et ajustage par abrasion à l'air

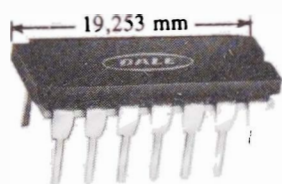


(c) Module encapsulé

Courtoisie de International Business Machines Corp.

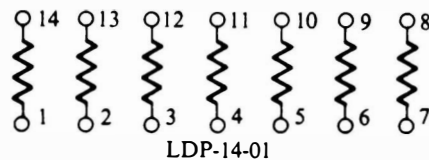
Les réseaux de résistances montés sur les cartes imprimées se présentent dans de nombreuses configurations, sous un boîtier miniature semblable à celui illustré à la figure 3.20. Les lettres LDP sont un code de fabrication; le deuxième nombre (14) est le nombre de broches du boîtier. Les deux derniers chiffres indiquent la configuration du circuit interne. La gamme des valeurs ohmiques de tels éléments discrets réalisés sur une puce varie de  $10 \Omega$  à  $10 \text{ M}\Omega$ .

FIG. 3.19 Réalisation de résistances

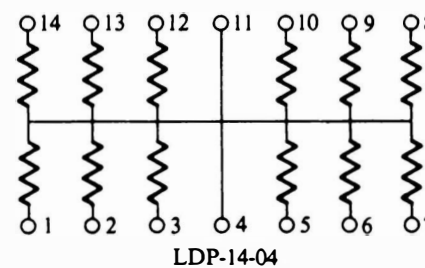


(a)

Courtoisie de Dale Electronics, Inc.



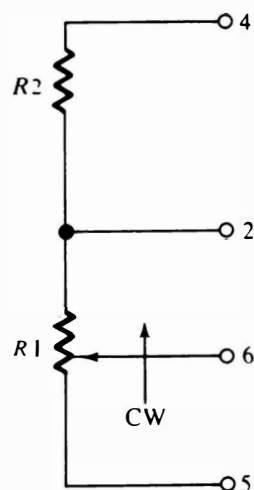
(b)



(c)

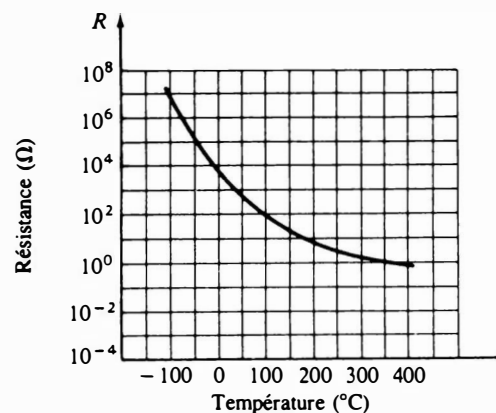
FIG. 3.20 Configurations de microcircuits à résistances.

La figure 3.21 illustre des condensateurs d'équilibrage miniatures. Il s'agit de condensateurs ajustables dont le réglage est fin. Ils sont montés avec des résistances fixes dans un boîtier à double rangée de broches.

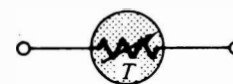


Courtoisie de Bourns Inc.

FIG. 3.21



(a)



(b)

FIG. 3.22 La thermistance: (a) caractéristique et (b) symbole.

## 3.5 THERMISTANCES

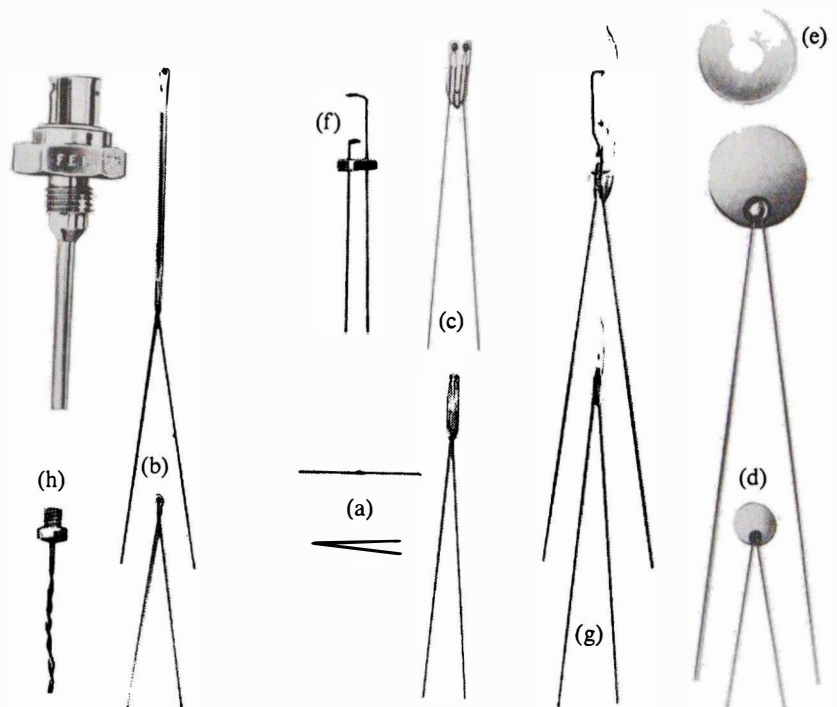
Les *thermistances* sont des complexes de semi-conducteurs à deux bornes dont la résistance varie considérablement avec la température. La figure 3.22 représente la caractéristique



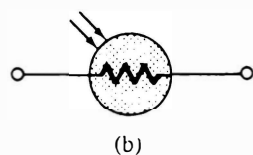
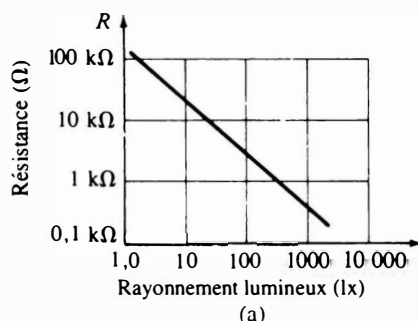
d'une thermistance, ainsi que son symbole graphique. Notons la non-linéarité de la courbe et la chute rapide de la résistance (de  $5000 \Omega$  à  $100 \Omega$ ) lorsque la température passe de  $20^\circ\text{C}$  à  $100^\circ\text{C}$ . Une telle caractéristique indique évidemment un coefficient de température négatif.

Les causes de la variation de la température du dispositif peuvent être internes ou externes. Une augmentation de l'intensité du courant qui traverse le dispositif provoque son échauffement et, par conséquent, une chute de sa résistance. Le même effet s'obtient par l'exposition de la thermistance à une chaleur ambiante. La thermistance se prête donc bien à la régulation. La figure 3.23 illustre divers types de thermistances. Celles-ci sont fabriquées par frittage d'oxydes métalliques (cobalt, nickel, strontium et manganèse).

**FIG. 3.23** Thermistances: (a) perles; (b) à sondes de verre; (c) à perles et sondes isocourbes permutables; (d) disques; (e) rondelles; (f) perles à montage spécial; (g) à sondes sous vide remplies de gaz; (h) à sondes spéciales.



Courtoisie de Fenwal Electronics, Inc.



**FIG. 3.24** La cellule photoconductrice: (a) caractéristique et (b) symbole.

Il importe de remarquer que l'échelle de l'axe vertical du graphique illustré à la figure 3.22 est logarithmique. L'emploi d'une telle échelle permet d'élargir considérablement la gamme des valeurs qu'il est possible de porter sur le graphique. Dans le présent cas, l'échelle varie de  $0,0001 \Omega$  à  $100\,000\,000 \Omega$ . À la figure 3.24, les échelles des deux axes sont logarithmiques.

### 3.6 CELLULES PHOTOCONDUCTRICES

La cellule photoconductrice est un dispositif semi-conducteur à deux bornes dont la résistance dépend de l'intensité du rayonnement lumineux auquel il est soumis. Les photons du rayon-

nement incident excitent les électrons et les atomes de la surface de la cellule, d'où l'augmentation du nombre de « porteurs libres » et la chute correspondante de la résistance. La figure 3.24 représente la caractéristique d'une cellule photoconductrice, ainsi que son symbole graphique. Notons que le coefficient de température de ces cellules est négatif (tout comme dans le cas de la thermistance qui est également constituée de semi-conducteurs. La caractéristique de la cellule photoconductrice est toutefois linéaire, contrairement à celle de la thermistance. La figure 3.25 illustre divers types de cellules photoconductrices au sulfure de cadmium.

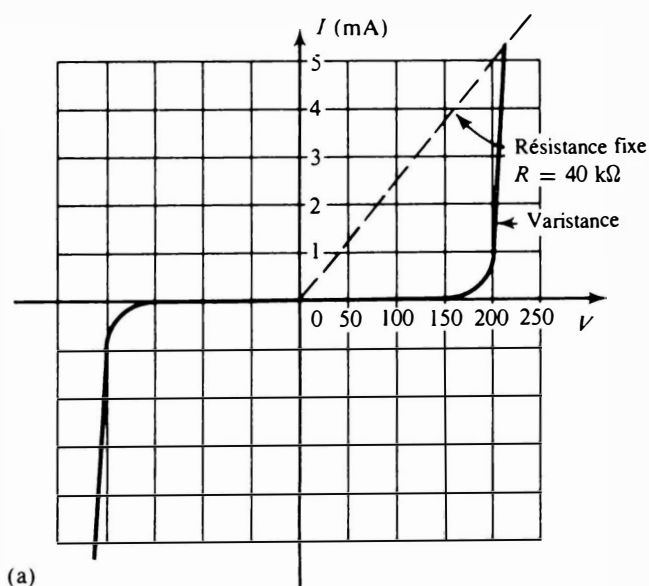


Courtoisie de International Rectifier

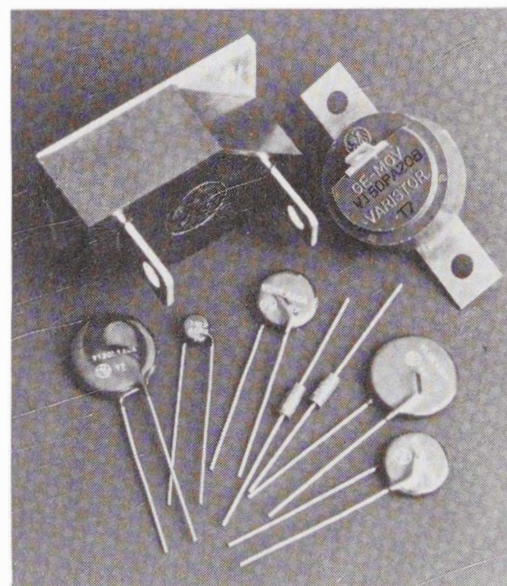
FIG. 3.25 Cellules photoconductrices.

## 3.7 VARISTANCES

Les varistances sont des résistances commandées par tension qui servent à éliminer les hautes tensions transitoires. Leurs caractéristiques sont non linéaires. Elles sont surtout employées pour limiter la tension apparaissant aux bornes d'un dispositif sensible. Une caractéristique typique est illustrée à la figure 3.26a. À titre de comparaison, la caractéristique d'une résis-



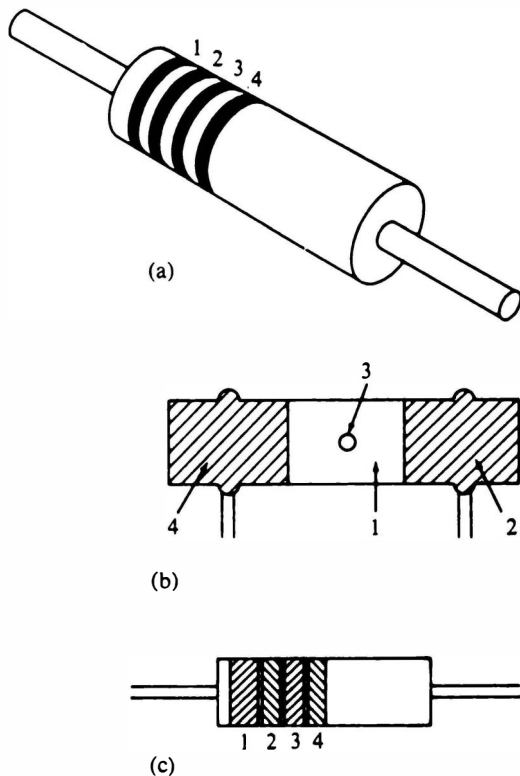
(a)



(b)

FIG. 3.26 Varistances: (a) Caractéristique; (b) photographie.





**FIG. 3.27** Marquage selon le code de couleurs; (a) résistance agglomérée fixe; (b) résistance agglomérée fixe à sorties radiales; (c) résistance bobinée fixe.

tance fixe est aussi représentée. Notons qu'à la tension d'amorçage, l'intensité du courant augmente rapidement mais que la tension dépasse à peine la tension d'amorçage. L'intégration judicieuse de la varistance à un circuit protège les éléments sensibles du circuit contre la tension, l'intensité du courant étant limitée par le circuit même. La photographie de la figure 3.26b représente diverses varistances vendues dans le commerce.

### 3.8 MARQUAGE ET VALEURS OHMIQUES STANDARD

Beaucoup de résistances, fixes ou variables, ont des dimensions suffisantes pour permettre le marquage en clair de leur valeur ohmique sur leur emballage. Certaines toutefois sont trop petites; on a alors recours à un code de couleurs. Ainsi la résistance agglomérée fixe porte sur son boîtier, à l'une de ses extrémités, quatre anneaux de couleurs (voir la figure 3.27a). Le code de couleurs est donné au tableau 3.5. L'interprétation du code se fait toujours de gauche à droite, à partir de l'extrémité où sont groupés les anneaux. Le premier et le deuxième anneau indiquent la valeur des deux premiers chiffres significatifs, le troisième indique le nombre de zéros qui suivent, ou le coefficient de multiplication (anneau en or ou en argent). Le quatrième anneau donne la tolérance du fabricant, mesure de la précision avec laquelle est réalisée la résistance. L'absence du quatrième anneau indique que la tolérance est de  $\pm 20\%$ .

**TABLEAU 3.5** Code de couleurs.

0 Noir	7 Violet	
1 Brun	8 Gris	
2 Rouge	9 Blanc	
3 Orange	0,1 Or	
4 Jaune	0,01 Argent	
5 Vert	5% Or	} Tolérance
6 Bleu	10% Argent	

**EXEMPLE 3.9** Entre quelles limites absolues la valeur ohmique d'une résistance peut-elle se situer, si le marquage est le suivant:

a.	1 <sup>er</sup> anneau	2 <sup>e</sup> anneau	3 <sup>e</sup> anneau	4 <sup>e</sup> anneau	
	Blanc	Violet	Noir	Or	
	9	7	0	$\pm 5\%$	$= 97 \Omega,$
					$\pm 5\%$

Comme 5% de 97 = 4,85, la valeur ohmique de la résistance peut être de  $97 \Omega \pm 4,85 \Omega$ ; elle se situe donc *entre*  $92,15 \Omega$  et  $101,85 \Omega$ .

b.

1 <sup>er</sup> anneau	2 <sup>e</sup> anneau	3 <sup>e</sup> anneau	4 <sup>e</sup> anneau
Gris	Bleu	Or	Or
8	6	0,1	$\pm 5\%$ = 86(0,1),
			$\pm 5\%$
			= <b>8,6 <math>\Omega</math></b> ,
			$\pm 5\%$

La valeur ohmique de la résistance est donc comprise *entre*  $8,17 \Omega$  et  $9,03 \Omega$ .

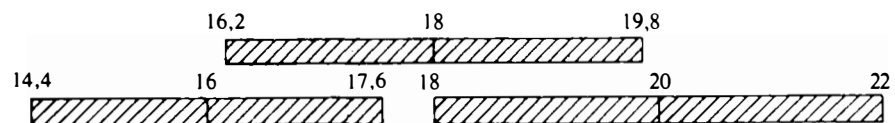
Les figures 3.27b et 3.27c illustrent la façon dont se fait le marquage selon le code de couleurs des résistances agglomérées à sorties radiales et des résistances bobinées fixes. Le code de couleurs est le même pour les trois types de marquage.

Dans le manuel, les valeurs ohmiques des résistances utilisées dans les circuits facilitent les calculs. Nous croyons en effet qu'il vaut mieux bien comprendre les techniques d'analyse utilisées plutôt que de se livrer à des opérations mathématiques complexes. Aussi, souvent nos valeurs ohmiques ne sont pas *normalisées*, c'est-à-dire qu'elles ne sont pas des valeurs de fabrication comme celles que nous donnons au tableau 3.6.

Soulignons par ailleurs qu'il est inutile de fabriquer des résistances dans toutes les valeurs ohmiques possibles. On peut ainsi très bien utiliser une résistance de 39 k $\Omega$  si on a besoin d'une résistance de 38 k $\Omega$ , car en raison de la tolérance de 10%, la valeur ohmique réelle de la résistance de 39 k $\Omega$  peut se situer n'importe où entre les limites:

$$39 \text{ k}\Omega \pm (0,1)(39 \text{ k}\Omega) = 39 \text{ k}\Omega \pm 3,9 \text{ k}\Omega \\ = \mathbf{35,1 \text{ k}\Omega \text{ à } 42,9 \text{ k}\Omega}$$

En poussant ce raisonnement, on s'aperçoit que les résistances de fabrication d'une tolérance de 10% couvrent toutes les valeurs possibles dans la gamme de 0,1  $\Omega$  à 22 M $\Omega$ . En d'autres termes, les valeurs des résistances se recoupent par leurs tolérances, comme l'illustre la figure 3.28 pour les résistances de 16  $\Omega$ , 18  $\Omega$  et 20  $\Omega$ .



**FIG. 3.28** Recouvrement des résistances de 16  $\Omega$ , 18  $\Omega$  et 20  $\Omega$  à tolérance de 10%.



### 3.9 CONDUCTANCE

L'inverse de la résistance d'un matériau est une mesure de sa conductivité. Cette grandeur est la *conductance* et elle s'exprime en *siemens* (d'après l'ingénieur allemand Sir William Siemens). Le symbole littéral de la conductance est la majuscule *G*; le symbole de l'unité est la lettre majuscule *S*.

**TABLEAU 3.6** Valeurs ohmiques standard des résistances de fabrication.

Ohms ( $\Omega$ )					Kilohms ( $k\Omega$ )		Mégohms ( $M\Omega$ )	
<b>0,10</b>	<b>1,0</b>	<b>10</b>	<b>100</b>	<b>1000</b>	<b>10</b>	<b>100</b>	<b>1,0</b>	<b>10,0</b>
0,11	1,1	11	110	1100	11	110	1,1	11,0
<b>0,12</b>	<b>1,2</b>	<b>12</b>	<b>120</b>	<b>1200</b>	<b>12</b>	<b>120</b>	<b>1,2</b>	<b>12,0</b>
0,13	1,3	13	130	1300	13	130	1,3	13,0
<b>0,15</b>	<b>1,5</b>	<b>15</b>	<b>150</b>	<b>1500</b>	<b>15</b>	<b>150</b>	<b>1,5</b>	<b>15,0</b>
0,16	1,6	16	160	1600	16	160	1,6	16,0
<b>0,18</b>	<b>1,8</b>	<b>18</b>	<b>180</b>	<b>1800</b>	<b>18</b>	<b>180</b>	<b>1,8</b>	<b>18,0</b>
0,20	2,0	20	200	2000	20	200	2,0	20,0
<b>0,22</b>	<b>2,2</b>	<b>22</b>	<b>220</b>	<b>2200</b>	<b>22</b>	<b>220</b>	<b>2,2</b>	<b>22,0</b>
0,24	2,4	24	240	2400	24	240	2,4	
<b>0,27</b>	<b>2,7</b>	<b>27</b>	<b>270</b>	<b>2700</b>	<b>27</b>	<b>270</b>	<b>2,7</b>	
0,30	3,0	30	300	3000	30	300	3,0	
<b>0,33</b>	<b>3,3</b>	<b>33</b>	<b>330</b>	<b>3300</b>	<b>33</b>	<b>330</b>	<b>3,3</b>	
0,36	3,6	36	360	3600	36	360	3,6	
<b>0,39</b>	<b>3,9</b>	<b>39</b>	<b>390</b>	<b>3900</b>	<b>39</b>	<b>390</b>	<b>3,9</b>	
0,43	4,3	43	430	4300	43	430	4,3	
<b>0,47</b>	<b>4,7</b>	<b>47</b>	<b>470</b>	<b>4700</b>	<b>47</b>	<b>470</b>	<b>4,7</b>	
0,51	5,1	51	510	5100	51	510	5,1	
<b>0,56</b>	<b>5,6</b>	<b>56</b>	<b>560</b>	<b>5600</b>	<b>56</b>	<b>560</b>	<b>5,6</b>	
0,62	6,2	62	620	6200	62	620	6,2	
<b>0,68</b>	<b>6,8</b>	<b>68</b>	<b>680</b>	<b>6800</b>	<b>68</b>	<b>680</b>	<b>6,8</b>	
0,75	7,5	75	750	7500	75	750	7,5	
<b>0,82</b>	<b>8,2</b>	<b>82</b>	<b>820</b>	<b>8200</b>	<b>82</b>	<b>820</b>	<b>8,2</b>	
0,91	9,1	91	910	9100	91	910	9,1	

Nota: Les valeurs en gras ont une tolérance de 10%.

$$G = \frac{1}{R} \quad (\text{siemens, S}) \quad (3.5)$$

Une résistance de 1  $M\Omega$  correspond donc à une conductance de  $10^{-6}$  S, et une résistance de 10  $\Omega$  équivaut à une conductance de  $10^{-1}$  S. Par conséquent, plus grande est la conductance plus petite est la résistance et plus grande est la conductivité.

La conductance d'un matériau dépend de trois facteurs, comme l'indique l'équation:

$$G = \frac{A}{\rho l} \quad (S) \quad (3.6)$$

Elle augmente avec l'aire du conducteur et décroît si la longueur du conducteur ou la résistivité du matériau augmente.

**EXEMPLE 3.10** Quelle est l'augmentation ou la diminution relative de la conductance d'un conducteur dont l'aire est réduite de 80% et la longueur accrue de 40%? La résistivité du matériau est fixe.

*Solution:*

$$G_1 = \frac{A_1}{\rho_1 l_1}$$

$$G_2 = \frac{A_2}{\rho_2 l_2}$$

et pour  $\rho_1 = \rho_2$ :

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{A_1 l_2}{A_2 l_1}$$

Avec  $A_2 = \frac{1}{5} A_1$  et  $l_2 = 1,4 l_1$ , on a:

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{A_1(1,4 l_1)}{(0,2 A_1)(l_1)} = \frac{1,4}{0,2} = 7$$

et:

$$G_2 = \frac{1}{7} G_1$$

## PROBLÈMES

### Section 3.1

1. Quelle est la résistance d'un fil de cuivre d'une longueur de 75 m et d'un diamètre de 0,25 mm ( $T = 20^\circ\text{C}$ )?
2. Calculez la résistance d'un fil d'argent d'une longueur de 100 m et d'un diamètre de 0,15 mm ( $T = 20^\circ\text{C}$ ).
3. a. Quelle est la longueur d'un fil de cuivre dont le diamètre est de 1 mm et dont la résistance est de 0,005 k $\Omega$  ( $T = 20^\circ\text{C}$ )?  
b. Faites le même calcul qu'en (a) pour un fil d'argent et comparez les résultats.
- \*4. a. Quelle est la résistance d'une barre omnibus de cuivre dont les cotes données à la figure 3.29 ( $T = 20^\circ\text{C}$ )?  
b. Faites les mêmes calculs qu'en (a) pour une barre omnibus d'aluminium et comparez les résultats.

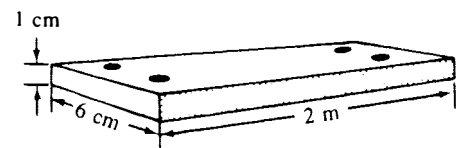


FIG. 3.29

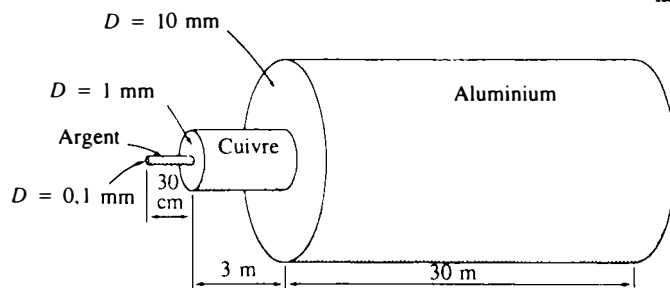


FIG. 3.30

- c. On allonge la barre omnibus (d'aluminium ou de cuivre). Sa résistance augmente-t-elle ou diminue-t-elle? Pourquoi?
  - d. Qu'advient-il de la résistance de la barre si on augmente sa section? Pourquoi?
5. a. Quelle est la section d'un fil de cuivre dont la résistance est de  $2,5 \Omega$  et dont la longueur est de 100 m ( $T = 20^\circ\text{C}$ )?
    - b. À l'estime, la section d'un fil d'aluminium de même résistance et de même longueur est-elle plus grande ou plus petite que celle du fil de cuivre? Pourquoi?
    - c. Et dans le cas d'un fil d'argent?
  6. On met bout à bout trois conducteurs de natures différentes (figure 3.30).
    - a. À l'estime, lequel présente le plus de résistance? Pourquoi?
    - b. Calculez la résistance de chacun et comparez les résultats à la réponse donnée en (a). ( $T = 20^\circ\text{C}$ )

7. Un fil d'une longueur de 400 m offre une résistance de  $22,56 \Omega$ ; sa section est de  $0,5 \text{ mm}^2$ . De quel matériau le fil est-il fait ( $T = 20^\circ\text{C}$ )?

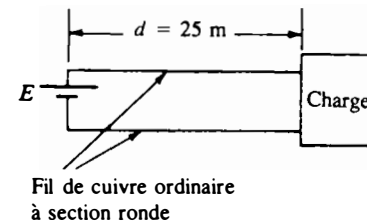
### Section 3.2

- \*8. Déterminez l'augmentation de la résistance d'un conducteur de cuivre si sa section est réduite d'un facteur 4 et si sa longueur est doublée. (Résistance originale de  $0,2 \Omega$  et température constante.)
9. La résistance d'un fil de cuivre est de  $2 \Omega$  à  $10^\circ\text{C}$ . Quelle est sa résistance à  $60^\circ\text{C}$ ?
10. La résistance d'une barre omnibus d'aluminium est de  $0,03 \Omega$  à  $0^\circ\text{C}$ . Quelle est sa résistance à  $60^\circ\text{C}$ ?
11. La résistance d'un fil de cuivre est de  $4 \Omega$  à  $66^\circ\text{C}$ . Quelle est sa résistance à  $16^\circ\text{C}$ ?
12. La résistance d'un fil de cuivre est de  $0,76 \Omega$  à  $30^\circ\text{C}$ . Quelle est sa résistance à  $-40^\circ\text{C}$ ?
13. a. La résistance d'un fil de cuivre est de  $0,002 \Omega$  à la température ambiante ( $20^\circ\text{C}$ ). Quelle est sa résistance au point de congélation de l'eau ( $0^\circ\text{C}$ ) et au point d'ébullition ( $100^\circ\text{C}$ )?
  - b. Déterminez la variation de la résistance du fil à tous les cinq degrés entre  $20^\circ\text{C}$  et  $100^\circ\text{C}$ .
14. La résistance d'un fil d'argent est de  $0,04 \Omega$  à  $-30^\circ\text{C}$ . Quelle est sa résistance à  $-2^\circ\text{C}$ ?
- \*15. a. La résistance d'un fil de cuivre est de  $0,92 \Omega$  à  $4^\circ\text{C}$ . À quelle température ( $^\circ\text{C}$ ) est-elle de  $1,06 \Omega$ ?
  - b. À quelle température est-elle de  $0,15 \Omega$ ?

16. Calculez les valeurs de  $\alpha$ , du cuivre et de l'aluminium à 20°C et comparez les résultats aux valeurs données au tableau 3.3.
17. À l'aide de l'équation (3.4) calculez la résistance d'un fil de cuivre à 16°C, si sa résistance est de 40  $\Omega$  à 20°C?
18. a. Calculez la valeur de  $\alpha$ , du cuivre à  $T_1 = 40^\circ\text{C}$ .  
b. En utilisant le résultat trouvé en (a), calculez la résistance d'un fil de cuivre à 75°C, si sa résistance est de 30  $\Omega$  à 40°C.

**Section 3.3**

19. a. À l'aide du tableau 3.4 calculez la résistance d'un fil de 0,5 mm<sup>2</sup> de section et de 450 m de longueur et celle d'un fil de 1 mm<sup>2</sup> de même longueur.  
b. Comparez les résistances des deux fils.
20. a. À l'aide du tableau 3.4 calculez la résistance d'un fil de 1 mm<sup>2</sup> de section et de 450 m de longueur et celle d'un fil de 10 mm<sup>2</sup> de section et de même longueur.  
b. Comparez les résistances des deux fils.
21. a. Voir la figure 3.31. La résistance de chaque ligne d'alimentation ne doit pas dépasser 0,13  $\Omega$ , et l'appel du courant maximal est de 30 A. Quel fil doit-on utiliser?  
b. Quel fil doit-on utiliser si on fixe la résistance maximale à 0,06  $\Omega$ ?



**FIG. 3.31**

**Section 3.4**

22. Donnez une brève description des résistances suivantes:
  - a. le rhéostat à compression;
  - b. le rhéostat progressif;
  - c. la résistance à ruban cannelé.

**Section 3.5**

23. La caractéristique d'une thermistance est celle illustrée à la figure 3.22. Calculez-en la résistance à -50°C, à 60°C et à 200°C.

**Section 3.6**

24. La caractéristique d'une cellule photoconductrice est celle de la figure 3.24. Déterminez-en la résistance pour un éclairage de 100 lx et de 1000 lx.

**Section 3.7**

25. a. Voir la figure 3.26a. Calculez la tension aux bornes de la varistance quand le courant est de 0,5 mA, 1 mA, 3 mA et 5 mA.  
b. Quelle est la variation de la tension entre 0,5 mA et 5 mA?  
c. Comparez le rapport des tensions au rapport des courants.

**Section 3.8**

26. Entre quelles limites absolues la valeur ohmique d'une résistance peut-elle se situer si son marquage est le suivant:

	1 <sup>er</sup> anneau	2 <sup>e</sup> anneau	3 <sup>e</sup> anneau	4 <sup>e</sup> anneau
a.	vert	jaune	orange	or
b.	rouge	rouge	brun	argent
c.	brun	noir	noir	—



## Section 3.9

27. Calculez la conductance de chacune des résistances suivantes:
- 0,086  $\Omega$ ;
  - 4000  $\Omega$ ;
  - 0,05 M $\Omega$ .
- Comparez les trois résultats.
- \*28. Calculez la conductance d'un fil de 4 mm<sup>2</sup> de section et de 1000 m de longueur, s'il est fait de:
- cuivre;
  - aluminium;
  - fer.
29. La conductance d'un fil est de 100 S. La section et la longueur du fil sont réduites des deux tiers. Calculez-en la nouvelle conductance (la température demeure constante).

## GLOSSAIRE

**Cellule photoconductrice** Dispositif à semi-conducteurs à deux bornes dont la résistance dépend de l'intensité de la lumière frappant sa surface exposée.

**Code de couleurs** Emploi d'anneaux de couleur pour indiquer la valeur ohmique et la tolérance des résistances.

**Coefficient de température négatif** Caractéristique indiquant que la résistance d'une substance donnée décroît à mesure qu'augmente la température.

**Coefficient de température positif** Caractéristique indiquant que la résistance d'une substance donnée s'accroît à mesure qu'augmente la température.

**Conductance (G)** Indication de la facilité relative avec laquelle il est possible de faire passer un courant dans une substance donnée. Elle s'exprime en siemens (S).

**Ohm ( $\Omega$ )** Unité de mesure de la résistance.

**Potentiomètre** Dispositif à trois bornes constitué d'une résistance à variation linéaire ou non linéaire.

**Résistance** Mesure de l'opposition offerte par une substance donnée au passage d'un courant.

**Résistivité ( $\rho$ )** Constante de proportionnalité entre la résistance d'une substance donnée et ses dimensions.

**Rhéostat** Dispositif dont la résistance varie d'une façon linéaire ou non linéaire.

**Thermistance** Dispositif à semi-conducteurs à deux bornes dont la résistance dépend de la température.

**Varistance** Résistance non linéaire commandée par tension servant à supprimer les hautes tensions transitoires.

**Zéro absolu** Température ( $-273,15^\circ\text{C}$ ) à laquelle cesse toute agitation de la structure atomique.

**Zéro absolu extrapolé** Point où le prolongement de la partie linéaire de la courbe résistance — température coupe l'échelle des températures.

# LOI D'OHM, PUISSANCE ET ÉNERGIE



## 4.1 LA LOI D'OHM

Considérons la relation:

$$\boxed{\text{Effet} = \frac{\text{cause}}{\text{opposition}}} \quad (4.1)$$

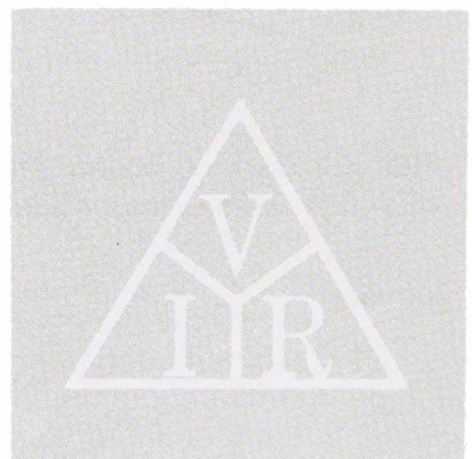
Toute transformation d'énergie d'une forme à une autre se fait selon une telle relation. Dans les circuits électriques, l'*effet* que nous tentons d'établir est le déplacement de charges, c'est-à-dire le *courant*. La *différence de potentiel* entre deux points du circuit est la *cause* (« la pression ») de ce déplacement de charges, et l'opposition à ce déplacement est la *résistance* du circuit.

Appliquée aux circuits électriques, la relation (4.1) devient donc:

$$\text{Courant} = \frac{\text{différence de potentiel}}{\text{résistance}}$$

et:

$$\boxed{I = \frac{E}{R}} \quad \left. \begin{array}{l} I = \text{ampères (A)} \\ E = \text{volts (V)} \\ R = \text{ohms } (\Omega) \end{array} \right\} \text{loi d'Ohm} \quad (4.2)$$







De simples manipulations mathématiques permettent d'exprimer la tension et la résistance en termes des deux autres grandeurs:

$$E = IR \quad (\text{volts}) \quad (4.3)$$

$$R = \frac{E}{I} \quad (\text{ohms}) \quad (4.4)$$

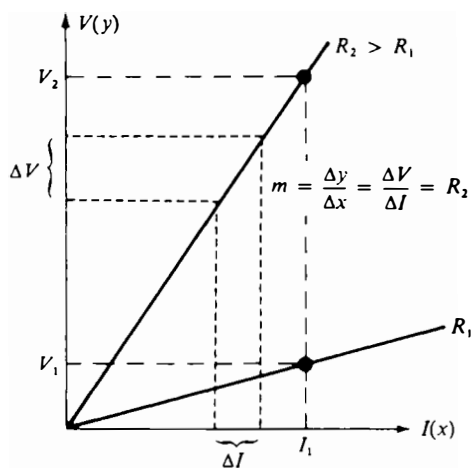


FIG. 4.1 Courbes tension-intensité pour deux valeurs ohmiques différentes.

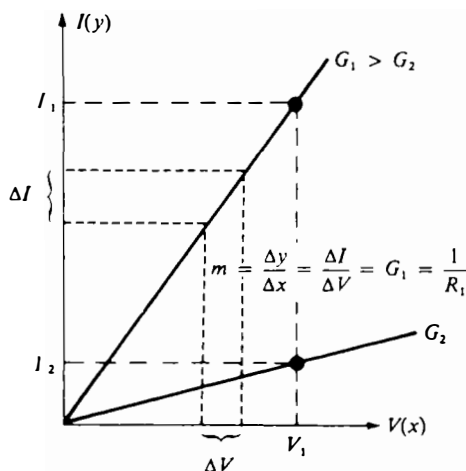


FIG. 4.2 Courbes intensité-tension pour deux conductances différentes.

Dans le cas de la tension, le symbole  $E$  représente les sources de f.é.m. (batterie par exemple) et le symbole  $V$  la différence de potentiel aux bornes d'une résistance ou d'un quelconque dispositif qui transforme de l'énergie.

La loi d'Ohm peut par ailleurs se réécrire comme l'équation d'une droite:

$$\begin{array}{cccc} V = R I + 0 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ y = m x + b \end{array}$$

On constate alors que la pente ( $m$ ) de cette droite est déterminée par la résistance, comme le montre la figure 4.1. En d'autres termes, sur un graphique portant la tension (en ordonnée) en fonction de l'intensité (en abscisse), plus la courbe est rapprochée de l'axe vertical, plus la résistance est grande. On peut aussi dire que pour une intensité donnée ( $I_1$ ), plus la résistance est grande plus la tension est grande, comme le veut la loi d'Ohm.

Dans le cas des dispositifs à semi-conducteurs comme le transistor et la diode, c'est habituellement la courbe de l'intensité (en ordonnée) en fonction de la tension (en abscisse) que l'on trace. Dans ce cas:

$$\begin{array}{cccc} I = \frac{1}{R} V + 0 = G \cdot V + 0 \\ \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ y \quad \quad \quad = m \cdot x + b \end{array}$$

On constate alors que la pente de la courbe est déterminée par la conductance, comme le montre la figure 4.2. Plus grande est la conductance (ou plus petite est la résistance) plus la droite est rapprochée de l'axe vertical. Pour une tension fixe  $V_1$ , plus grande est la conductance (ou plus petite est la résistance), plus grande est l'intensité du courant résultant.

Avant d'analyser des exemples, étudions d'abord la caractéristique d'un dispositif à semi-conducteurs très important, la diode. La diode fonctionne de façon semblable à un simple commutateur; dans des conditions de service bien précises, elle laisse passer le courant dans un sens, et le bloque dans l'autre. La figure 4.3 montre la caractéristique typique d'une diode. Sa région de faible conductance (résistance élevée, commutateur ouvert) est évidemment celle où la caractéristique coïncide avec l'axe des tensions. Notons toutefois que

cette région s'étend à +0,5 V environ. Dès que la tension appliquée est supérieure à +0,5 V, la caractéristique s'élève rapidement; c'est la région de conductivité élevée (faible résistance, commutateur fermé) de la diode. Ces conclusions peuvent se vérifier mathématiquement au moyen de la loi d'Ohm.

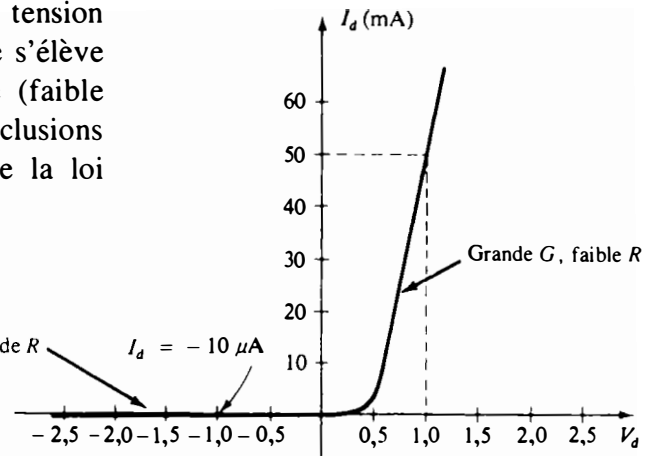


FIG. 4.3 Caractéristique de la diode à semi-conducteurs.

À  $V = +1 \text{ V}$ :

$$R_{\text{diode}} = \frac{V}{I} = \frac{1 \text{ V}}{50 \text{ mA}} = \frac{1}{50 \times 10^{-3}} = 20 \Omega$$

(valeur relativement faible pour la plupart des utilisations)

À  $V = -1 \text{ V}$ :

$$R_{\text{diode}} = \frac{V}{I} = \frac{1}{10 \mu\text{A}} = 100 \text{ k}\Omega$$

**EXEMPLE 4.1** Quelle est l'intensité du courant qui traverse une résistance de  $2 \Omega$  (figure 4.4), si la chute de potentiel à ses bornes est de  $16 \text{ V}$ ?

Solution:

$$I = \frac{V}{R} = \frac{16}{2} = 8 \text{ A}$$

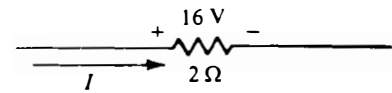


FIG. 4.4

À noter la polarité de la chute de tension aux bornes de la résistance, déterminée par le sens du courant  $I$ .

**EXEMPLE 4.2** Calculer la tension qui doit être appliquée aux fils du fer à souder illustré à la figure 4.5 pour qu'un courant de  $1,5 \text{ A}$  passe dans le fer, si la résistance interne de ce dernier est de  $80 \Omega$ .

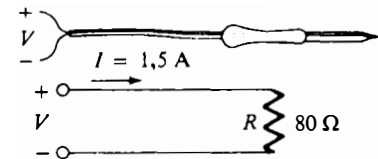


FIG. 4.5

Solution:

$$V = IR = 1,5 \times 80 = 120 \text{ V}$$

**EXEMPLE 4.3** Calculer la résistance de l'ampoule illustrée à la figure 4.6, si elle est traversée par un courant de  $0,4 \text{ A}$  et si la différence de potentiel à ses bornes est de  $120 \text{ V}$ .

Solution:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{120}{0,4} = 300 \Omega$$

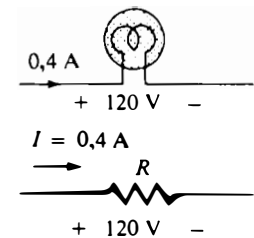


FIG. 4.6

## 4.2 PUISSANCE

La *puissance* est une mesure de la quantité de travail qui peut être fournie en un temps déterminé, c'est-à-dire le *quotient*



de travail accompli par unité de temps. Le travail se mesurant en joules (J), unité de mesure présentée au chapitre 1, et le temps en secondes, la puissance ( $P$ ) se mesure en joules par seconde. En électricité, l'unité de mesure de la puissance est le *watt*, équivalant à 1 J/s. Exprimée mathématiquement, la relation est:

$$P = \frac{W \text{ (joules)}}{t \text{ (s)}} = \frac{W}{t} \quad \text{(watts)} \quad (4.5)$$

Cette unité de mesure est appelée watt en l'honneur de James Watt, qui contribua à l'établissement d'unités de mesure de la puissance. Il définit le *horsepower* (hp) comme étant la puissance moyenne fournie en une journée par un fort cheval de trait. La relation entre le horsepower et le watt est:

$$1 \text{ horsepower} \cong 746 \text{ watts}$$

La puissance absorbée ou fournie par un dispositif ou un système électrique peut se calculer en fonction de l'intensité du courant et de la tension; pour ce faire, combinons d'abord les équations (2.4) et (4.5):

$$P = \frac{W}{t} = \frac{QV}{t}$$

mais:

$$I = \frac{Q}{t}$$

de sorte que:

$$P = VI \quad \text{(watts)} \quad (4.6)$$

La puissance fournie par une source d'énergie est donc:

$$P = EI \quad \text{(watts)} \quad (4.7)$$

dans laquelle  $E$  est la f.é.m. de la source et  $I$  est l'intensité du courant débité par la source.

Par substitution directe de la loi d'Ohm, l'équation de la puissance peut s'exprimer sous deux autres formes:

$$P = VI = V \left( \frac{V}{R} \right)$$

et:

$$P = \frac{V^2}{R} \quad \text{(watts)} \quad (4.8)$$

ou encore:

$$P = VI = (IR)I$$

et:

$$P = I^2R \quad \text{(watts)} \quad (4.9)$$



**EXEMPLE 4.4** Calculer la puissance fournie au moteur illustré à la figure 4.7.

*Solution:*

$$P = VI = 120(5) = 600 \text{ W} = \mathbf{0,6 \text{ kW}}$$

**EXEMPLE 4.5** Quelle est la puissance dissipée dans une résistance de  $5 \Omega$  traversée par un courant de  $4 \text{ A}$ ?

*Solution:*

$$P = I^2R = (4)^2 \times 5 = \mathbf{80 \text{ W}}$$

**EXEMPLE 4.6** La figure 4.8 donne la caractéristique  $V-I$  d'une ampoule. La courbe est non linéaire, ce qui indique que la résistance du filament varie considérablement selon la tension appliquée. Si la tension de service est de  $120 \text{ V}$ , calculer la puissance nominale de l'ampoule. Calculer également la résistance du filament dans les conditions de service nominales.

*Solution:* À  $120 \text{ V}$ :

$$I = 0,625 \text{ A}$$

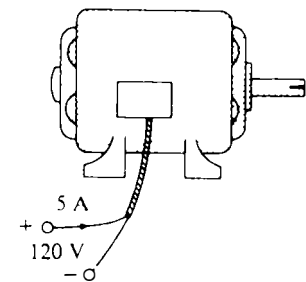
et:

$$P = VI = 120(0,625) = \mathbf{75 \text{ W}}$$

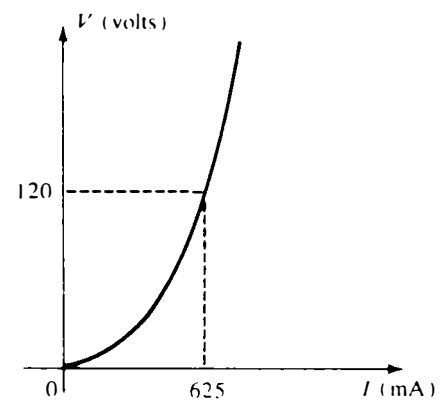
À  $120 \text{ V}$ :

$$R = \frac{V}{I} = \frac{120}{0,625} = \mathbf{192 \Omega}$$

La résistance du filament de l'ampoule est moindre aux petites tensions appliquées, ce qu'indique la courbe qui tend vers l'axe des intensités dans le voisinage de l'origine.



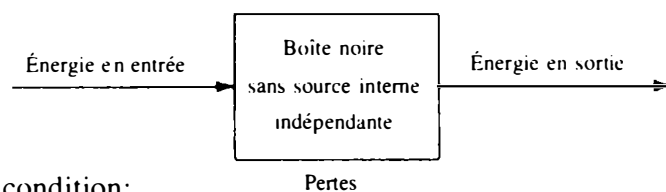
**FIG. 4.7**



**FIG. 4.8**

### 4.3 RENDEMENT

Tout moteur ou toute machine semblable utilisé pour transformer de l'énergie peut être représenté par une « boîte noire » comportant une entrée et une sortie (figure 4.9).



**FIG. 4.9**

La loi de la conservation de l'énergie impose la condition:

$$\begin{aligned} \text{Énergie en entrée} &= \text{énergie en sortie} \\ &+ \text{pertes d'énergie ou énergie stockée} \\ &\text{dans la boîte noire} \end{aligned}$$

Divisons les deux membres de cette relation par  $t$ :

$$\frac{W_{\text{entrée}}}{t} = \frac{W_{\text{sortie}}}{t} + \frac{W_{\text{perdue ou stockée dans la boîte noire}}}{t}$$



Comme  $P = W/t$ , nous avons:

$$P_e = P_s + P_{\text{perdue ou stockée dans la boîte noire}} \quad (4.10)$$

Le rendement ( $\eta$ ) du dispositif représenté par la boîte noire se calcule alors au moyen de la relation:

$$\text{Rendement} = \frac{\text{puissance en sortie}}{\text{puissance en entrée}}$$

et:

$$\eta = \frac{P_s}{P_e} \quad (4.11)$$

Exprimé sous la forme d'un pourcentage, le rendement est:

$$\eta = \frac{P_s}{P_e} \times 100\% \quad (4.12)$$

Nous exprimons de façon semblable le rendement en pourcentage en fonction de l'énergie à l'entrée et de l'énergie à la sortie:

$$\eta = \frac{W_s}{W_e} \times 100\% \quad (4.13)$$

Le rendement maximal est de 100% (si  $W_s = W_e$ ). Plus grandes sont les pertes internes du dispositif qui produit la puissance ou l'énergie de sortie, plus petit est le rendement net.

**EXEMPLE 4.7** Le rendement d'un moteur de 2 hp est de 75%. Quelle est l'énergie fournie en entrée au moteur, en watts? Quelle est la tension d'entrée, si l'intensité du courant d'entrée est de 9,05 A?

*Solution:*

$$\eta = \frac{P_s}{P_e} \times 100\%$$

$$0,75 = \frac{(2)(746)}{P_e}$$

et:

$$P_e = \frac{1492}{0,75} = 1989,33 \text{ W}$$

$$P = EI \quad \text{ou} \quad E = \frac{P}{I} = \frac{1990}{9,05} = 220 \text{ V}$$

**EXEMPLE 4.8** Quelle est la sortie en watts d'un moteur d'un rendement de 80%, si l'intensité et la tension du courant d'entrée sont respectivement de 8 A et de 120 V?

Solution:

$$\eta = \frac{P_s}{P_e} \times 100\%$$

$$0,80 = \frac{P_s}{(120)(8)}$$

et:

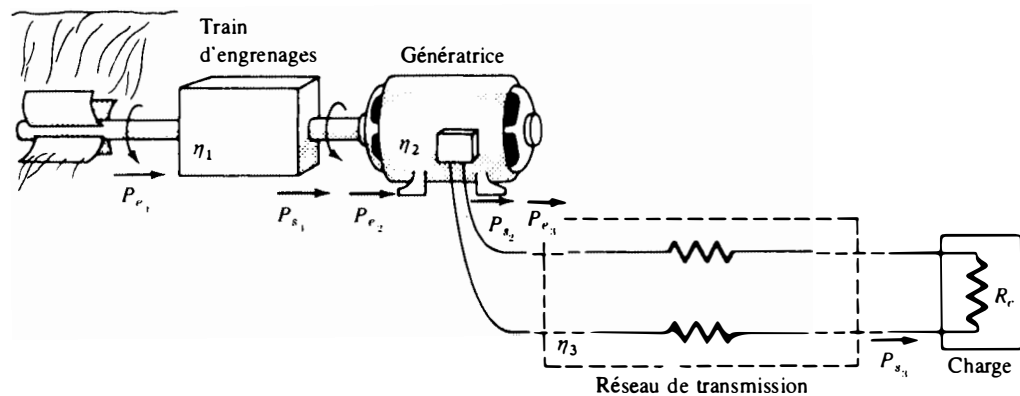
$$P_s = (0,80)(120)(8) = 768 \text{ W}$$

**EXEMPLE 4.9** Quel est le rendement en pourcentage d'un dispositif qui reçoit en entrée 50 J et qui débite en sortie 42,5 J?

Solution:

$$\eta = \frac{W_s}{W_e} \times 100\% = \frac{42,5}{50} \times 100\% = 85\%$$

La figure 4.10 montre les éléments principaux d'une station génératrice. La station est entraînée par une roue à aubes sur laquelle tombe de l'eau. Le train d'engrenages multiplie la vitesse de rotation de la roue et entraîne ainsi le rotor de la génératrice à la vitesse nominale prévue. La tension de



**FIG. 4.10** Principaux éléments d'une station génératrice.

sortie de la génératrice est appliquée à la charge au moyen d'un réseau de transmission. Pour chaque élément du système, nous avons indiqué une puissance d'entrée et une puissance de sortie. Le rendement de chacun est:

$$\eta_1 = \frac{P_{s_1}}{P_{e_1}} \quad \eta_2 = \frac{P_{s_2}}{P_{e_2}} \quad \eta_3 = \frac{P_{s_3}}{P_{e_3}}$$

Faisons le produit de ces trois rendements:

$$\eta_1 \eta_2 \eta_3 = \frac{P_{s_1}}{P_{e_1}} \cdot \frac{P_{s_2}}{P_{e_2}} \cdot \frac{P_{s_3}}{P_{e_3}}$$

et substituons  $P_{s_1}$  à  $P_{e_2}$  ainsi que  $P_{s_2}$  à  $P_{e_3}$ . Après réduction, nous trouvons que le produit des trois rendements est  $P_{s_3}/P_{e_1}$ . De façon générale, le rendement total d'un système en cascade tel que celui illustré à la figure 4.11 est:

$$\eta_{\text{total}} = \eta_1 \eta_2 \eta_3 \cdots \eta_n \quad (4.14)$$

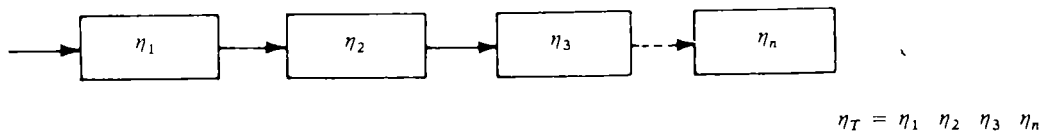


FIG. 4.11 Système en cascade.

**EXEMPLE 4.10** Calculer le rendement global du système de la figure 4.10, si  $\eta_1 = 90\%$ ,  $\eta_2 = 85\%$  et  $\eta_3 = 95\%$ .

*Solution:*

$$\eta_T = \eta_1 \eta_2 \eta_3 = (0.90)(0.85)(0.95) = 0,727 \text{ ou } 72,7\%$$

**EXEMPLE 4.11** Le rendement  $\eta_1$  chute à 60%. Calculer à nouveau le rendement global et le comparer à celui de l'exemple 4.10.

*Solution:*

$$\eta_T = \eta_1 \eta_2 \eta_3 = (0.60)(0.85)(0.95) = 0.485 \text{ ou } 48,5\%$$

La différence entre les deux résultats est assez considérable. De fait, elle démontre que le rendement global d'un système en cascade est déterminé principalement par le rendement du maillon le plus faible: il est inférieur (ou égal si le rendement des autres maillons est de 100%) au rendement du maillon le plus faible du système.

## 4.4 ÉNERGIE

Pour qu'une certaine puissance (le quotient d'un travail par le temps) transforme de l'énergie, elle doit être utilisée pendant un certain temps. Ainsi un moteur d'une puissance suffisante pour entraîner une charge considérable ne produit une transformation d'énergie que s'il est mis en marche pendant une certaine période de temps. Plus longtemps fonctionne un moteur, plus grande est la quantité d'énergie dépensée.

L'énergie perdue ou gagnée par un dispositif se détermine au moyen de la relation:

$$W = P t \quad (4.15)$$

dans laquelle  $W$  = l'énergie en watts-secondes (W·s) ou en joules (J),

$P$  = la puissance en watts (W),

$t$  = le temps en secondes (s).

Puisque la puissance se mesure en watts (ou en joules par seconde) et le temps en secondes, l'unité de mesure de l'énergie est le *watt-seconde* ou le *joule* comme nous l'indiquons ci-dessus. Le watt-seconde est toutefois une unité trop petite pour être commode; aussi on utilise couramment le *watt-heure* (Wh) ou le *kilowattheure* (kWh).

$$\text{Énergie (watts-heures)} = \text{puissance (watts)} \times \text{temps (heures)}$$

**(4.16)**

$$\text{Énergie (kilowattheures)} = \frac{\text{puissance (watts)} \times \text{temps (heures)}}{1000}$$

**(4.17)**

L'énergie électrique fournie par le service résidentiel ou le service commercial se mesure au moyen d'un instrument appelé watt-heuremètre ou compteur d'électricité. Cet appareil se raccorde directement aux lignes du secteur immédiatement en amont du panneau de distribution des immeubles. La figure 4.12 illustre un compteur typique et ses cadrans. La consommation se mesure en kilowattheures, chaque cadran correspondant à une puissance de 10. Le compteur est muni d'un disque d'aluminium; plus ce disque tourne rapidement plus grande est la consommation. C'est ce disque qui entraîne les aiguilles des cadrans par l'intermédiaire d'un train d'engrenages.

**EXEMPLE 4.12** Voir la position des aiguilles des cadrans illustrés à la figure 4.12. Calculer la note d'électricité à acquitter, si la lecture précédente était de 4650 kWh et que le coût moyen du kilowattheure soit de 3,06¢.

*Solution:*

$$5360 - 4650 = 710 \text{ kWh consommés}$$

$$710 \text{ kWh} \left( \frac{3,06¢}{\text{kWh}} \right) = \mathbf{21,73 \$}$$

**EXEMPLE 4.13** Combien d'électricité faut-il (en kilowatt-heures) pour alimenter une ampoule de 60 W sans arrêt pendant 1 an (365 jours)?

*Solution:*

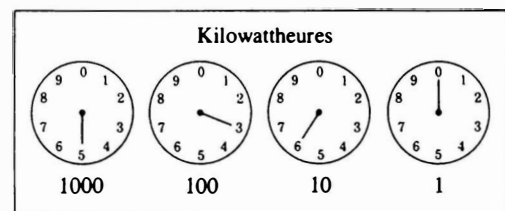
$$W = \frac{P \cdot t}{1000} = \frac{(60)(24)(365)}{1000} = \frac{525\,600}{1000} = \mathbf{525,60 \text{ kWh}}$$

**EXEMPLE 4.14** Combien de temps faut-il à un récepteur de télévision de 205 W pour consommer 4 kWh d'électricité?

*Solution:*

$$W = \frac{P \cdot t}{1000} = \frac{(205)(t)}{1000} \Rightarrow t \text{ (heures)} = \frac{(4)(1000)}{205} = \mathbf{19,51 \text{ h}}$$

**EXEMPLE 4.15** Combien en coûte-t-il pour faire tourner un moteur de 5 hp pendant 3 h, si le coût du kilowattheure est de 3,06¢?



*Courtoisie de Westinghouse Electric.*

**FIG. 4.12** Compteur d'électricité.





*Solution:*

$$W \text{ (kilowattheures)} = \frac{(5)(746 \times 3)}{1000} = 11,2 \text{ kWh}$$

$$\text{Coût} = 11,2(3,06) = 34,27\text{¢}$$

**EXEMPLE 4.16** Combien en coûte-t-il au total pour alimenter

- un grille-pain de 1200 W pendant 30 min;
  - six ampoules de 50 W pendant 4 h;
  - une machine à laver de 400 W pendant 45 min;
  - une sècheuse électrique de 5600 W pendant 20 min?
- Un kilowattheure coûte 3,6¢.

*Solution:*

$$W = \frac{(1200)(\frac{1}{2}) + (6)(50)(4) + (400)(\frac{3}{4}) + (5600)(\frac{1}{3})}{1000}$$

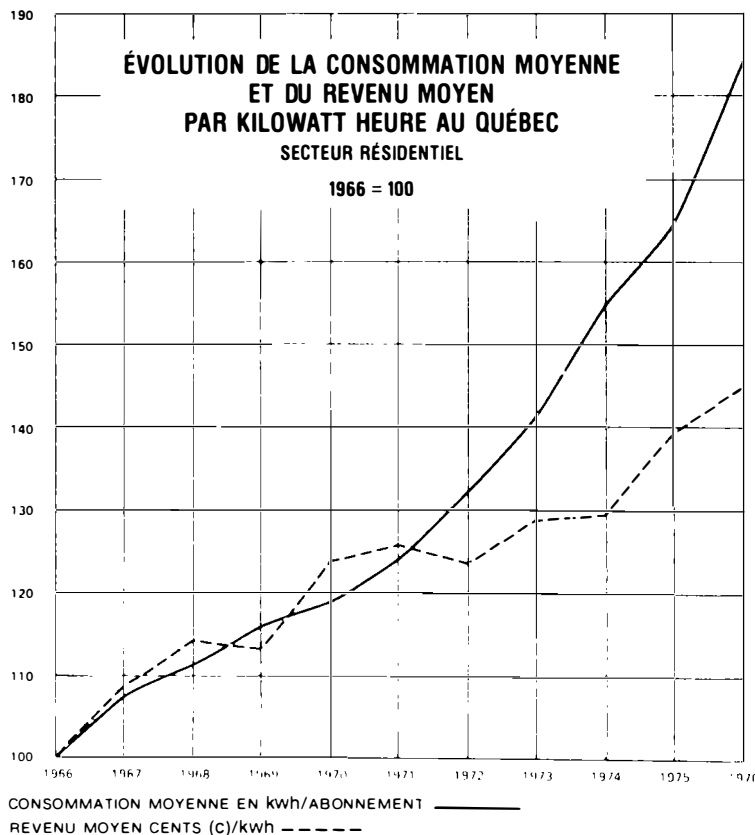
$$= \frac{600 + 1200 + 300 + 1867}{1000}$$

$$= \frac{3967}{1000}$$

$$W = 3,967 \text{ kWh}$$

$$\text{Coût} = (3,967)(3,06) = 12,14\text{¢}$$

Le graphique de la figure 4.13 montre l'évolution entre 1966 et 1976 du coût moyen du kilowattheure et de la consommation moyenne par abonnement, en kilowattheures, au Québec.



Source: Hydro-Québec, Études et recherche, Direction des services à la clientèle.

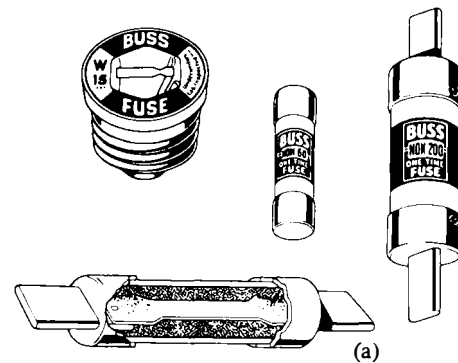
**FIG. 4.13**

Le tableau 4.1 donne la puissance nominale typique de certains appareils électriques usuels. On trouvera sans doute intéressant de calculer ce qu'il en coûte pour faire fonctionner ces appareils sur une certaine période de temps, en tenant compte de l'augmentation du coût moyen du kilowattheure donnée par le graphique précédent.

**TABLEAU 4.1** *Puissance nominale typique de certains appareils électriques usuels.*

Appareil	Puissance nominale (W)	Appareil	Puissance nominale (W)
Appareil de chauffage		Magnétophone	
moteur du brûleur	230	à cassettes	5
ventilateur de		Percolateur	jusqu'à 1 000
chaudière	320	Phonographe	75
Chaîne stéréo	1 230	Projecteur	jusqu'à 1 280
Climatiseur	jusqu'à 2 080	Radiateur	jusqu'à 1 650
Cuisinière		Radio-réveil	4
four encastré	jusqu'à 16 000	Rasoir	320
ordinaire	jusqu'à 8 000	Sécheuse à linge	
Fer à repasser		à gaz	400
(sec ou à vapeur)	1 000	à grande vitesse	8 400
Grille-pain	1 200	ordinaire	5 600
Horloge électrique	2	Téléviseur couleur	160
Machine à laver		Ventilateur portatif	
le linge	400	de fenêtre	210
Machine à laver			
la vaisselle	1 400		

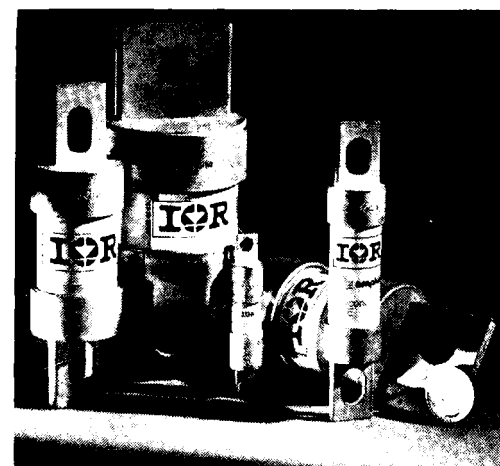
*Courtoisie de Con Edison.*



*Courtoisie de Bussman Manufacturing.*

## 4.5 DISJONCTEURS ET FUSIBLES

Le matériel lourd des grandes usines, les appareils électroménagers et les instruments de laboratoire doivent toujours être protégés contre des surintensités éventuelles du secteur qui pourraient endommager irrémédiablement le matériel électrique ou électronique ou donner naissance à des incendies. Les dispositifs utilisés sont des fusibles ou des disjoncteurs, montés entre le circuit d'utilisation et le circuit d'alimentation, c'est-à-dire le plus souvent dans le panneau de distribution situé dans le sous-sol des maisons ou au point où les lignes de l'immeuble se raccordent à celles de l'appartement. Les fusibles illustrés à la figure 4.14 sont constitués d'un conducteur intérieur que traverse le courant; le conducteur commence à fondre si l'intensité du courant est supérieure à l'intensité nominale marquée sur l'emballage. Évidemment, le circuit s'ouvre si le conducteur fond complètement, protégeant ainsi les appareils qui étaient alimentés.



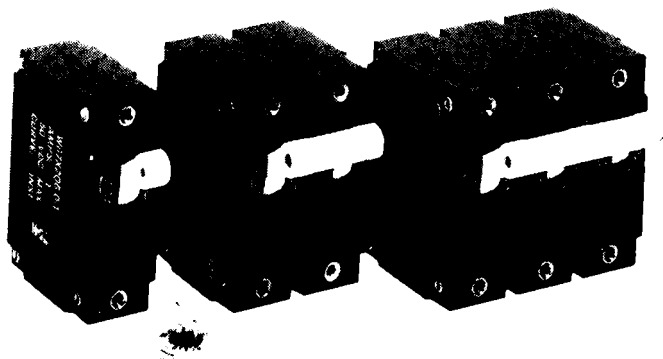
(b)  
Fusibles de 600 V pour courants de 5 A à 800 A.

*Courtoisie de International Rectifier Corp.*

**FIG. 4.14** *Fusibles bimétalliques.*



Dans les constructions récentes, le fusible a été remplacé par le disjoncteur (voir la figure 4.15). Lorsque l'intensité du courant devient supérieure à l'intensité nominale, un électroaimant attire avec une force suffisante une lame de contact et ouvre ainsi le circuit. Lorsqu'on a éliminé la cause de la surcharge, on peut réarmer le disjoncteur. Il peut donc être réutilisé, contrairement au fusible qu'on doit remplacer s'il grille.



Disjoncteurs hydrauliques magnétiques Mini-mag.

Courtoisie de Potter and Brumfield Division, AMF Inc.

**FIG. 4.15** Disjoncteurs.

## PROBLÈMES

### Section 4.1

1. Quelle est la chute de potentiel aux bornes d'une résistance de  $6 \Omega$  traversée par un courant de  $2,5 \text{ A}$ ?
2. Quelle est l'intensité du courant qui traverse une résistance de  $72 \Omega$  si la chute de tension à ses bornes est de  $12 \text{ V}$ ?
3. Quelle est la valeur ohmique de la résistance qui laisse passer un courant maximal de  $1,5 \text{ mA}$  pour une différence de potentiel de  $6 \text{ V}$ ?
4. Calculez l'intensité du courant qui traverse une résistance de  $3,4 \text{ M}\Omega$  raccordée à une source de  $125 \text{ V}$ .
5. Une résistance de  $0,02 \Omega$  est traversée par un courant de  $3,6 \mu\text{A}$ . Quelle est la chute de tension aux bornes de la résistance?
6. La résistance interne d'un voltmètre est de  $15 \text{ k}\Omega$ . Quelle est l'intensité du courant qui traverse l'appareil s'il indique  $62 \text{ V}$ .
7. Un réfrigérateur alimenté sous  $120 \text{ V}$  appelle  $2,2 \text{ A}$ . Quelle est sa résistance?
8. La résistance interne d'une horloge électrique est de  $7,5 \Omega$ . Calculez l'intensité du courant d'alimentation sous  $120 \text{ V}$ .
9. Quelle f.é.m. faut-il pour qu'un courant de  $42 \text{ mA}$  traverse une résistance de  $0,04 \text{ M}\Omega$ ?
10. Le courant d'alimentation d'un fer à souder est de  $0,76 \text{ A}$  sous  $120 \text{ V}$ . Quelle est sa résistance?
11. La résistance d'un élément chauffant est de  $20 \Omega$ . Calculez l'intensité du courant traversant l'élément s'il est alimenté sous  $120 \text{ V}$ .
12. La résistance interne d'une génératrice est de  $0,5 \Omega$ . Déterminez de combien sa résistance interne fait chuter sa tension de sortie, si le courant est de  $15 \text{ A}$ .



## Section 4.2

13. Une résistance absorbe une énergie de 420 J en 7 min. Quelle est la puissance fournie à la résistance?
14. La puissance fournie à un dispositif est de 40 J/s (joules par seconde). Combien de temps faut-il pour que le dispositif reçoive une énergie de 640 J?
15. a. Quelle quantité d'énergie en joules une veilleuse de 2 W dépense-t-elle en 8 h?  
b. Exprimez l'énergie dépensée en kilowattheures.
16. Le débit des charges traversant une résistance de  $10 \Omega$  est de 300 C/min (coulombs par minute). Quelle puissance dissipe la résistance?
17. Pendant combien de temps faut-il qu'un courant constant de 2 A traverse une résistance sous 3 V pour qu'elle dégage 12 J d'énergie?
18. Quelle puissance fournit une batterie de 6 V si le débit des charges est de 48 C/min?
19. Un courant de 7 mA traverse une résistance de  $4 \Omega$ . Quelle est la puissance fournie à la résistance?
20. La chute de tension aux bornes d'une résistance de  $3 \Omega$  est de 9 mV. Quelle est la puissance fournie à la résistance?
21. La puissance fournie à une résistance de  $4 \Omega$  est de 64 W; quelle est l'intensité du courant qui traverse la résistance?
22. La puissance nominale d'une résistance de  $1000 \Omega$  est de 0,5 W. Quelle est l'intensité maximale du courant qui peut traverser la résistance sans l'endommager?
23. La puissance fournie à une résistance de  $7,2 \text{ k}\Omega$  est de 88 W; quelle est la chute de tension aux bornes de la résistance?
24. Une source peut débiter 100 mA sous 400 V. Quelle est la puissance nominale de la source?
25. Quelles sont la résistance nominale et l'intensité nominale du courant d'une ampoule de 100 W et de 120 V?
26. Quelles sont la résistance et la tension nominales d'une machine à laver automatique de 450 W dont le courant d'alimentation est de 3,75 A?
27. La puissance nominale d'une résistance de  $20 \text{ k}\Omega$  est de 100 W. Quelles sont la tension et l'intensité de courant maximales pouvant traverser la résistance?
28. a. Le circuit électrique d'une maison a une capacité de 100 A sous 120 V; calculez la puissance maximale que peut recevoir le circuit.  
b. Le propriétaire de la maison peut-il sans danger faire fonctionner en même temps les appareils suivants:
  1. un moteur de 5 hp;
  2. une sècheuse de 3000 W;
  3. une cuisinière de 2400 W;
  4. un fer à vapeur de 1000 W?

## Section 4.3

29. Quel est le rendement d'un dispositif dont la sortie est de 0,4 hp et l'entrée de 373 W?



30. Quelle est la puissance d'entrée en watts d'un dispositif dont le rendement est de 95% et la puissance de sortie, de 4,2 hp?
31. Quel est le rendement d'un moteur qui fournit 1 hp lorsque le courant et la tension d'entrée sont respectivement de 4 A et de 220 V?
32. Un moteur électrique a un rendement de 87%; il fournit 3,6 hp s'il est alimenté sous 220 V. Quelle est l'intensité du courant d'alimentation du moteur?
33. La puissance nominale d'un moteur est de 2 hp.
  - a. Il est alimenté sous 110 V et son rendement est de 90%; quelle est la puissance en watts que lui fournit le secteur?
  - b. Quelle est l'intensité du courant d'alimentation?
  - c. Quelle est l'intensité du courant d'alimentation si le rendement du moteur n'est que de 70%?
34. Le rendement d'un moteur électrique est de 90%. Si la tension d'entrée est de 220 V, quelle est l'intensité du courant lorsque le moteur développe 4 hp?
35. Deux dispositifs en cascade ont un rendement de 80% chacun. Quelle est l'énergie de sortie du système si l'énergie d'entrée est de 60 J?
36. Le rendement global de deux dispositifs en cascade est de 72%. Si le rendement du premier dispositif du système est de 0,9, quel est le rendement en pourcentage du deuxième dispositif?
37. Les puissances d'entrée et de sortie d'un système de deux dispositifs en cascade sont respectivement de 400 W et de 128 W. Quel est le rendement de chacun des dispositifs, si le rendement de l'un est le double du rendement de l'autre?
38. a. Quel est le rendement total de trois dispositifs en cascade dont les rendements sont de 0,98, 0,87 et 0,21?  
 b. Le dispositif de rendement le plus faible (0,21) est remplacé par un dispositif d'un rendement de 0,900. Quelle est l'augmentation relative du rendement total?

#### Section 4.4

39. Une résistance de 10  $\Omega$  est raccordée aux bornes d'une batterie de 15 V.
  - a. Quelle quantité d'énergie en joules consomme-t-elle en une minute?
  - b) On laisse la résistance raccordée à la batterie pendant deux minutes plutôt qu'une minute seulement. L'énergie débitée par la batterie augmente-t-elle? La puissance augmente-t-elle?
40. Quelle quantité d'énergie en kilowattheures un moteur de brûleur à mazout de 230 W consomme-t-il s'il fonctionne sans arrêt pendant 4 mois?
41. Combien de temps faut-il pour qu'un radiateur de 1500 W consomme une énergie minimale de 10 kWh?
42. Combien en coûte-t-il pour faire fonctionner une radio de 30 W pendant 3 h, si le coût du kilowattheure est de 3,06¢?
43. Si le coût du kilowattheure est de 3,06¢, combien en coûte-t-il au total pour faire fonctionner les appareils suivants:



- a. un climatiseur de 2000 W pendant 24 h;
  - b. une sécheuse de 8000 W pendant 30 min;
  - c. une machine à laver de 400 W pendant 1 h;
  - d. une machine à laver la vaisselle de 1400 W pendant 45 min?
44. Si le kilowattheure coûte 3,06¢, combien en coûte-t-il au total pour faire fonctionner les appareils suivants?
- a. une chaîne stéréo de 200 W pendant 4 h;
  - b. un projecteur de 1200 W pendant 3 h;
  - c. un magnétophone de 60 W pendant 2 h;
  - d. un téléviseur couleur de 420 W pendant 6 h?
45. Répondez au problème 44 en supposant que le coût du kilowattheure est de 7¢?

## GLOSSAIRE

**Diode** Dispositif à semi-conducteurs dont le fonctionnement est semblable à celui d'un simple commutateur; idéalement, il laisse passer le courant dans un sens et le bloque dans l'autre.

**Disjoncteur** Dispositif à deux bornes conçu comme protection contre les surintensités. Un commutateur ou un poussoir permet de le réarmer.

**Énergie (W)** Grandeur dont le changement d'état est déterminé par le produit de la vitesse de la conversion ( $P$ ) par la durée ( $t$ ). Elle s'exprime en joules (J) ou en wattsecondes (Ws).

**Fusible** Dispositif à deux bornes conçu uniquement comme protection contre les surintensités.

**Horsepower (hp)** Unité de puissance égale à 746 W.

**Loi d'Ohm** Équation établissant la relation entre l'intensité du courant, la tension et la résistance d'un circuit électrique.

**Puissance** Quantité de travail pouvant être fournie en un temps déterminé; *vitesse* à laquelle s'effectue le travail. Elle s'exprime en joules par seconde (J/s) ou en watts (W).

**Rendement ( $\eta$ )** Rapport de la puissance de sortie à la puissance d'entrée caractéristique de la conversion de l'énergie dans un circuit.

**Watt-heuremètre** Appareil mesurant en kilowattheure l'énergie électrique fournie aux consommateurs.



# CIRCUITS SÉRIE ET PARALLÈLE

## 5.1 INTRODUCTION

On utilise couramment deux types de courant. L'un est le *courant continu* (c.c.), qui idéalement est unidirectionnel et d'intensité constante. L'autre est le *courant alternatif sinusoïdal* (c.a.), qui change constamment d'intensité et de sens. Dans les quelques chapitres qui suivent, nous présentons une introduction à l'analyse des circuits à courant continu. Les méthodes et les concepts seront étudiés en détail de sorte que, lorsqu'il sera possible de le faire, une brève mise au point suffira pour qu'on puisse les appliquer aux circuits à courant alternatif.

La batterie illustrée à la figure 5.1, en raison de la différence de potentiel (analogue à une pression) existant entre ses deux bornes, crée un écoulement de charges dans le circuit. La borne positive de la batterie attire autant d'électrons dans un intervalle de temps donné que n'en débite la borne négative. Du moment que la batterie demeure raccordée au circuit et que la différence de potentiel entre ses bornes demeure constante, l'intensité et le sens du courant passant dans le circuit ne changent pas.

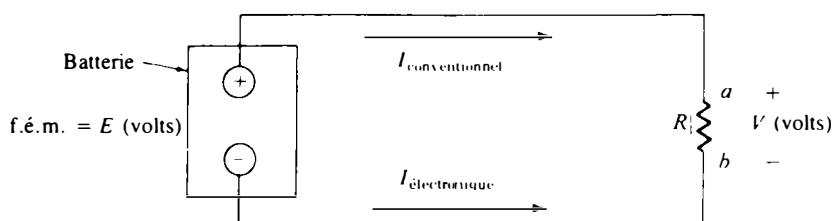


FIG. 5.1



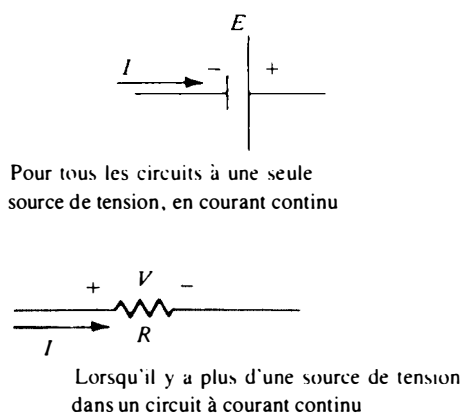


FIG. 5.2

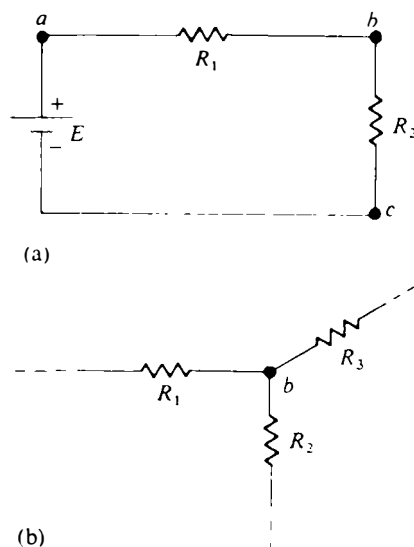


FIG. 5.3

Si nous supposons que le fil soit un conducteur idéal (c'est-à-dire qu'il n'oppose aucune résistance à l'écoulement des charges), la différence de potentiel  $V$  aux bornes de la résistance est alors égale en grandeur à la f.é.m. de la batterie:  $V$  (volts) =  $E$  (volts).

L'intensité du courant passant dans ce circuit n'est limitée que par la valeur de la résistance  $R$ . Plus la résistance est élevée, plus petite est l'intensité du courant et vice versa, comme l'établit la loi d'Ohm.

Conventionnellement, le sens du courant  $I$  est opposé au sens de déplacement des électrons, comme l'illustre la figure 5.1. La raison de cette convention tient à une hypothèse, faite à l'époque où fut découverte l'électricité, que les porteurs de courant étaient des charges positives. Dans le circuit illustré à la figure 5.1, l'écoulement uniforme des charges impose que l'intensité  $I$  du courant est la même dans tout le circuit. On notera en outre que le potentiel augmente aux bornes de la batterie (de  $-$  à  $+$ ), et qu'il chute aux bornes de la résistance (de  $+$  à  $-$ ). Dans les circuits alimentés en courant continu constitués d'une seule source de tension, le courant conventionnel passe toujours du point au potentiel inférieur au point au potentiel supérieur à l'intérieur de la source. Toutefois, le courant conventionnel passe toujours du point de potentiel supérieur au point de potentiel inférieur lorsqu'il traverse une résistance, peu importe le nombre de sources de tension que compte le circuit (figure 5.2).

## 5.2 CIRCUIT SÉRIE

En électricité et en électronique, un *circuit* est un ensemble d'éléments reliés entre eux par des conducteurs, offrant au moins un trajet fermé dans lequel peuvent circuler des charges. Une *branche* d'un circuit est une partie de cet ensemble; elle est constituée d'un ou de plusieurs éléments montés en série. Deux éléments sont montés en *série* si la borne de l'un est reliée à la borne de l'autre sans être raccordée à la borne d'un troisième élément.

Ainsi les résistances  $R_1$  et  $R_2$  illustrées à la figure 5.3a sont montées en série puisqu'elles ne possèdent que le point  $b$  en commun auquel n'est raccordée aucune autre branche. Ce n'est toutefois pas le cas des résistances  $R_1$  et  $R_2$  illustrées à la figure 5.3b, puisque leur point commun  $b$  sert également de point de raccordement à une troisième résistance. Par ailleurs, un examen attentif de la figure 5.3a montre que  $R_2$  est montée en série avec la source de tension  $E$  (elles ont le point  $c$  en commun), et que la source  $E$  est montée en série avec  $R_1$ . Un tel circuit est par conséquent appelé *circuit série*.

Pour calculer la résistance totale d'un circuit série, il suffit simplement de faire la somme des valeurs ohmiques de cha-

cune des résistances du circuit. À titre d'exemple, la résistance totale ( $R_T$ ) du circuit illustré à la figure 5.3a est égale à  $R_1 + R_2$ . En règle générale, la résistance totale d'un montage en série de  $N$  résistances est égale à la somme des valeurs ohmiques des  $N$  résistances:

$$R_T = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_N \quad (5.1)$$

**EXEMPLE 5.1** Calculer la résistance totale du circuit série illustré à la figure 5.4.

*Solution:*  $R_T = R_1 + R_2 = 2 + 3 = 5 \Omega$

**EXEMPLE 5.2** Calculer la  $R_T$  du circuit illustré à la figure 5.5.

*Solution:* 
$$\begin{aligned} R_T &= R_1 + R_2 + R_3 + R_4 \\ &= 4 + 8 + 7 + 10 \\ &= 29 \Omega \end{aligned}$$

Pour calculer la résistance totale d'un montage en série de  $N$  résistances de valeur ohmique identique, il suffit de multiplier la valeur ohmique par le nombre de résistances  $N$ :

$$R_T = N R \quad (5.2)$$

**EXEMPLE 5.3** Calculer la  $R_T$  du circuit série illustré à la figure 5.6.

*Solution:* 
$$\begin{aligned} R_T &= R_1 + R_3 + NR_2 \\ &= 1 + 9 + (3)(7) \\ &= 31 \Omega \end{aligned}$$

Dans un circuit série, l'intensité du courant est la même dans chacun des éléments. Par conséquent, l'intensité  $I$  du courant qui traverse chacune des résistances du circuit illustré à la figure 5.3 est constante et est égale à celle du courant débité par la batterie.

### 5.3 LOI DES TENSIONS DE KIRCHHOFF

La loi des tensions de Kirchhoff s'énonce: *la somme algébrique des différences de potentiel le long d'un circuit fermé (boucle) est nulle.*

On appelle *boucle* tout circuit fermé découpé abstraitement dans le réseau total. À la figure 5.7, le trajet  $abca$  constitue une boucle puisque, selon le sens conventionnel du courant, il est possible de tracer un trajet continu partant du point  $a$ , traversant les deux résistances et la source  $E$ , et revenant finalement au point  $a$ . En appliquant la loi des tensions de Kirchhoff, on doit s'assurer de toujours adopter le même sens pour déterminer si le potentiel augmente ou chute dans chacun

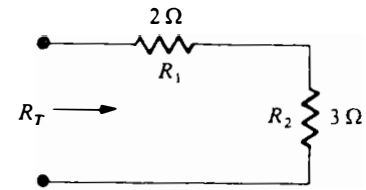


FIG. 5.4

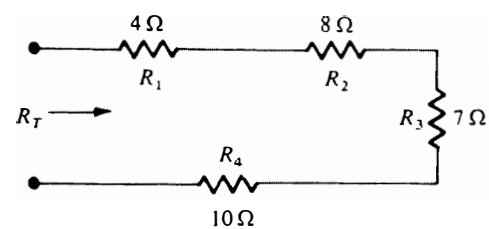


FIG. 5.5

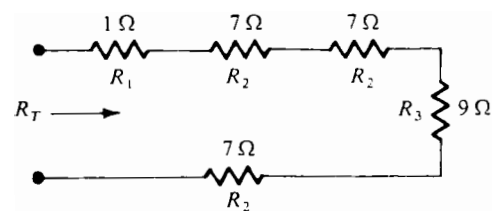


FIG. 5.6

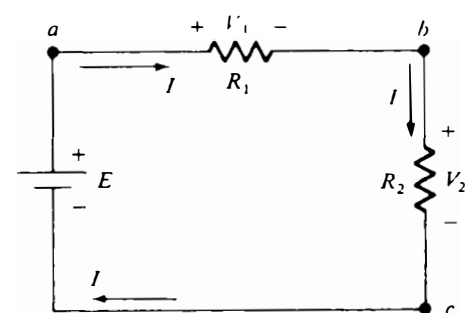


FIG. 5.7

des éléments du circuit. Conventionnellement, les augmentations de potentiel sont positives et les chutes de potentiel négatives. À titre d'exemple, suivons le courant dans le circuit illustré à la figure 5.7. Après avoir quitté le point  $a$ , le courant subit une première chute de potentiel  $V_1$  (de + à -) aux bornes de  $R_1$ , et une seconde chute de potentiel  $V_2$  aux bornes de  $R_2$ . Il traverse ensuite la source de tension, où son potentiel augmente de  $E$  (de - à +), et revient finalement au point  $a$ . En utilisant le symbole  $\Sigma$  de la sommation, le symbole  $\odot$  pour représenter une boucle et la lettre  $V$  pour représenter les différences de potentiel, on peut écrire algébriquement:

$$\boxed{\sum_{\odot} V = 0} \quad (\text{forme algébrique de la loi des tensions de Kirchhoff}) \quad (5.3)$$

Appliquons cette relation au circuit illustré à la figure 5.7 en respectant le sens conventionnel du courant; on obtient:

$$-V_1 - V_2 + E = 0$$

ou:

$$E = V_1 + V_2$$

ce qui signifie que la f.é.m. de la source du circuit est égale aux chutes de potentiel qui se produisent dans le circuit. De fait, on peut même écrire que dans une boucle la somme des f.é.m. est égale à la somme des chutes de potentiel. La loi des tensions de Kirchhoff peut donc aussi s'écrire:

$$\boxed{\sum_{\odot} \text{f.é.m.} = \sum_{\odot} V_{\text{chutes}}} \quad (5.4)$$

C'est cependant l'expression donnée à l'équation (5.3) de la loi des tensions que nous utiliserons dans le manuel.

Notons que rien ne nous oblige à suivre le sens conventionnel du courant dans une boucle. Nous pouvons donc fort bien appliquer la loi des tensions de Kirchhoff en utilisant le sens de déplacement des électrons; dans le cas du circuit illustré à la figure 5.7, la relation s'écrirait alors:

$$\sum_{\odot} V = 0 \\ -E + V_2 + V_1 = 0$$

ou, comme auparavant:

$$E = V_1 + V_2$$

La figure 5.8 illustre un circuit constitué de trois boucles différentes. Appliquons la loi des tensions de Kirchhoff à la boucle 1; nous obtenons:

$$+E - V_1 - V_2 = 0$$

et:

$$E = V_1 + V_2$$

Pour la boucle 2:

$$+V_2 - V_3 - V_4 = 0$$

et:

$$V_2 = V_3 + V_4$$

Pour la boucle 3:

$$E - V_1 - V_3 - V_4 = 0$$

et:

$$E = V_1 + V_3 + V_4$$

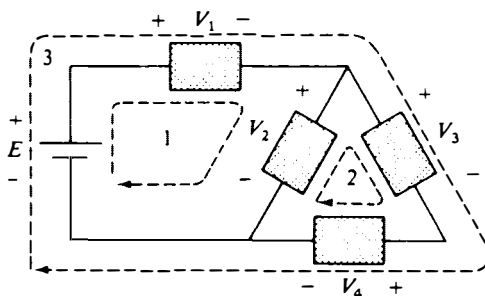


FIG. 5.8

Les exemples qui suivent permettront de mieux saisir l'essence de la loi des tensions de Kirchhoff.

**EXEMPLE 5.4** Déterminer  $V_1$  et  $V_2$  dans les circuits illustrés aux figures 5.9 et 5.10.

*Solution* (figure 5.9). Pour la boucle 1:

$$10 - 6 - V_1 = 0$$

et:

$$V_1 = 4 \text{ V}$$

Pour la boucle 2:

$$10 - V_2 = 0$$

et:

$$V_2 = 10 \text{ V}$$

*Solution* (figure 5.10). Pour la boucle 1:

$$+25 - V_1 + 15 = 0$$

et:

$$V_1 = 40 \text{ V}$$

Pour la boucle 2:

$$+20 + V_2 = 0$$

et:

$$V_2 = -20 \text{ V}$$

Le signe moins du membre droit de la dernière équation indique simplement que la polarité réelle de la différence de potentiel  $V_2$  est le contraire de celle indiquée à la figure 5.10.

**EXEMPLE 5.5** Pour le circuit illustré à la figure 5.11:

- Trouver  $R_T$ .
- Trouver  $I$ .
- Trouver  $V_1$  et  $V_2$ .
- Trouver la puissance fournie aux résistances de  $6 \Omega$  et de  $4 \Omega$ .

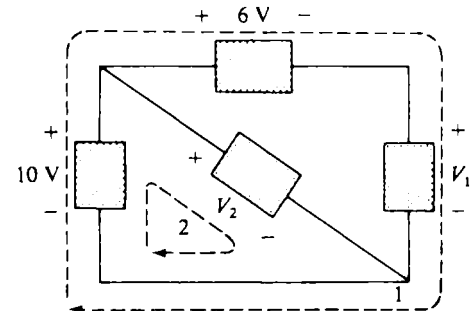


FIG. 5.9

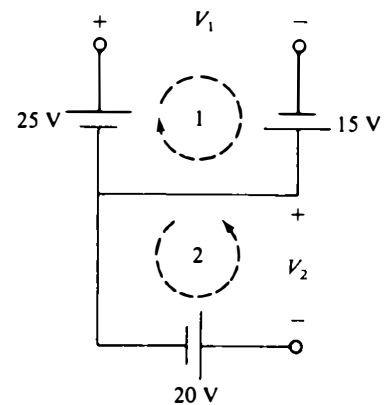


FIG. 5.10

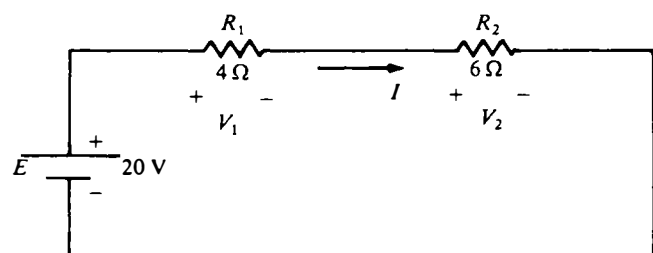


FIG. 5.11

- Trouver la puissance débitée par la batterie, et la comparer à la puissance dissipée par les résistances de  $6 \Omega$  et de  $4 \Omega$ .
- Vérifier la loi des tensions de Kirchhoff (en prenant le sens conventionnel du courant).

*Solution:*

a.  $R_T = R_1 + R_2 = 4 + 6 = 10 \Omega$

b.  $I = \frac{E}{R_T} = \frac{20}{10} = 2 \text{ A}$

$$\begin{aligned} \text{c. } V_1 &= IR_1 = (2)(4) = 8 \text{ V} \\ V_2 &= IR_2 = (2)(6) = 12 \text{ V} \\ \text{d. } P_{4\Omega} &= \frac{V_1^2}{R_1} = \frac{8^2}{4} = \frac{64}{4} = 16 \text{ W} \\ P_{6\Omega} &= I^2 R_2 = (2)^2 \times 6 = 4 \times 6 = 24 \text{ W} \\ \text{e. } P_E &= EI = (20)(2) = 40 \text{ W} \\ P_E &= P_{4\Omega} + P_{6\Omega} \\ 40 &= 16 + 24 \\ 40 &= 40 \\ \text{f. } \sum \circ V &= +E - V_1 - V_2 = 0 \\ E &= V_1 + V_2 \\ 20 &= 8 + 12 \\ 20 &= 20 \end{aligned}$$

**EXEMPLE 5.6** Pour le circuit illustré à la figure 5.12:

- Trouver  $R_T$ .
- Trouver  $I$ .
- Trouver  $V_1$ ,  $V_2$  et  $V_3$ .
- Vérifier la loi des tensions de Kirchhoff (en prenant le sens conventionnel du courant).

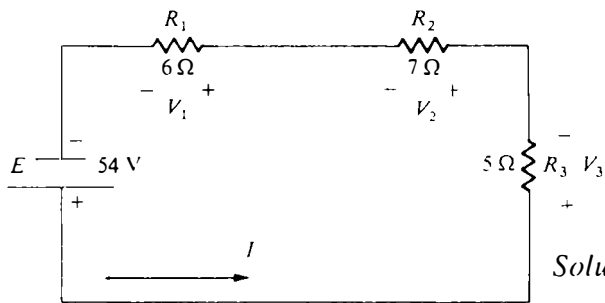


FIG. 5.12

*Solution:*

$$\begin{aligned} \text{a. } R_T &= R_1 + R_2 + R_3 = 6 + 7 + 5 = 18 \Omega \\ \text{b. } I &= \frac{E}{R_T} = \frac{54}{18} = 3 \text{ A} \\ \text{c. } V_1 &= IR_1 = (3)(6) = 18 \text{ V} \\ V_2 &= IR_2 = (3)(7) = 21 \text{ V} \\ V_3 &= IR_3 = (3)(5) = 15 \text{ V} \\ \text{d. } \sum \circ V &= +E - V_3 - V_2 - V_1 = 0 \\ E &= V_1 + V_2 + V_3 \\ 54 &= 18 + 21 + 15 \\ 54 &= 54 \end{aligned}$$

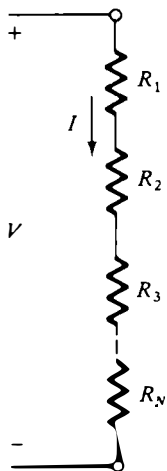


FIG. 5.13

## 5.4 RÈGLE DU DIVISEUR DE TENSION

Le calcul de la tension présente aux bornes d'une résistance ou d'un certain nombre de résistances montées en série dans un circuit série peut se faire en une seule étape à l'aide de la règle du diviseur de tension. La démonstration de cette règle est courte et directe. Prenons par exemple le circuit de la figure 5.13.

1. La résistance totale:  $R_T = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_N$
2. L'intensité:  $I = V/R_T$
3. La tension aux bornes de la résistance  $R_x$  (où  $x$  peut être tout nombre positif de 1 à  $N$ ):  $V_x = IR_x$
4. La tension aux bornes de deux ou plusieurs résistances en série, d'une valeur ohmique totale égale à  $R'_T$ :  $V'_T = IR'_T$
5. Substituons l'expression de  $I$  donnée en (2) dans les équations (3) et (4). La règle du diviseur de tension s'écrit alors:

$$\boxed{V_x = \frac{R_x V}{R_T}} \quad \text{(pour toute résistance } R_x \text{ avec } 0 < x \leq N) \quad (5.5)$$

$$\boxed{V'_T = \frac{R'_T V}{R_T}} \quad \text{(pour deux ou plusieurs résistances en série d'une valeur ohmique totale de } R'_T) \quad (5.6)$$

En d'autres termes, la règle dit que dans un circuit série, la tension aux bornes d'une résistance quelconque (ou d'un ensemble de résistances montées en série) est égale au produit de la valeur ohmique de cette résistance (ou de la somme des valeurs ohmiques des résistances en série) par la différence de potentiel aux bornes de tout le circuit, divisé par la résistance totale du circuit. Notons qu'il n'est pas nécessaire que  $V$  soit une source de f.é.m.

**EXEMPLE 5.7** Déterminer les tensions  $V_2$  et  $V'$  dans le circuit illustré à la figure 5.14.

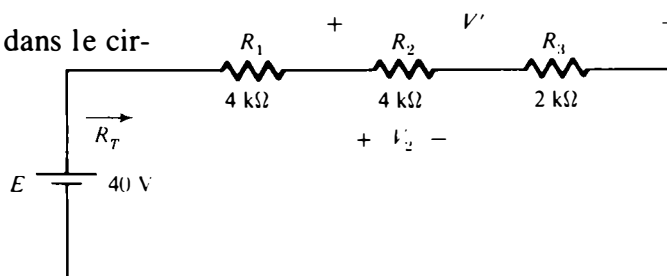


FIG. 5.14

*Solution:*

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{R_2 E}{R_T} = \frac{R_2 E}{R_1 + R_2 + R_3} \\ &= \frac{(4 \times 10^3)(40)}{(4 \times 10^3) + (4 \times 10^3) + (2 \times 10^3)} \\ &= \frac{(4)(40)}{10} \\ &= 16 \text{ V} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V' &= \frac{R'_T E}{R_T} = \frac{(R_2 + R_3) E}{R_1 + R_2 + R_3} \\ &= \frac{[(4 \times 10^3) + (2 \times 10^3)](40)}{10 \times 10^3} \\ &= \frac{(6)(40)}{10} \\ &= 24 \text{ V} \end{aligned}$$

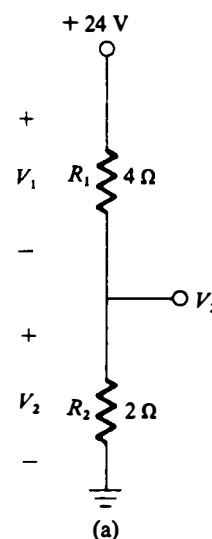


FIG. 5.15

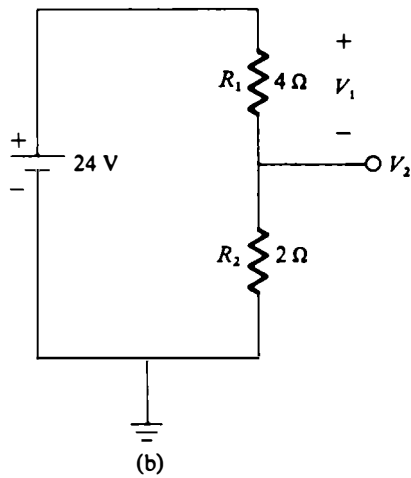


FIG. 5.16

**EXEMPLE 5.8** Déterminer la chute de tension aux bornes des résistances  $R_1$  et  $R_2$  du circuit illustré à la figure 5.15.

*Solution:* La notation employée à la figure 5.15 indique que la différence de potentiel entre la masse (dont le symbole apparaît à la figure) et le point au-dessus des deux résistances est positive et égale à 24 V. Le circuit équivalent est illustré à la figure 5.16. Comme il peut être embarrassant d'indiquer toutes les sources de tension sur de grands schémas, la notation employée à la figure 5.15 est courante. Appliquons maintenant la règle du diviseur de tension. Nous obtenons:

$$V_1 = \frac{4(24)}{4 + 2} = 16 \text{ V}$$

et:

$$V_2 = \frac{2(24)}{4 + 2} = 8 \text{ V}$$

Notons que la résistance la plus grande donne lieu à la plus grande chute de tension. De fait, en doublant la valeur ohmique d'une résistance, on double la chute de tension, comme le montre l'exemple.

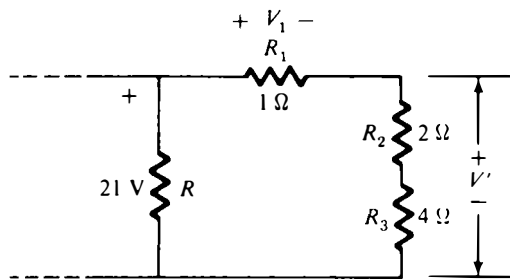


FIG. 5.17

**EXEMPLE 5.9** Voir le circuit illustré à la figure 5.17.

- Calculer  $V_1$ .
- Calculer  $V'$ .

*Solution:*

$$\text{a. } V_1 = \frac{R_1 V}{R_T} = \frac{(1)(21)}{1 + 2 + 4} = \frac{21}{7} = 3 \text{ V}$$

$$\text{b. } V' = \frac{(R_2 + R_3)V}{R_T} = \frac{(6)(21)}{7} = \frac{126}{7} = 18 \text{ V}$$

**EXEMPLE 5.10** Voir le circuit illustré à la figure 5.18.

- Calculer  $V_1$ .
- Calculer  $V_2$ .
- Calculer  $V$ .
- Vérifier la loi des tensions pour ce circuit, en adoptant le sens conventionnel du courant.

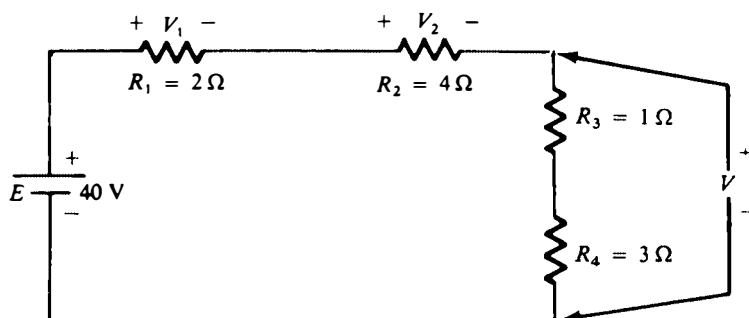


FIG. 5.18

Solution:

$$a. V_1 = \frac{R_1 E}{R_T} = \frac{(2)(40)}{2 + 4 + 1 + 3} = \frac{80}{10} = 8 \text{ V}$$

$$b. V_2 = \frac{R_2 E}{R_T} = \frac{(4)(40)}{10} = 16 \text{ V}$$

$$c. V = \frac{(R_3 + R_4) E}{R_T} = \frac{(4)(40)}{10} = 16 \text{ V}$$

$$d. \sum \circ V = E - V_1 - V_2 - V = 0$$

$$E = V_1 + V_2 + V$$

$$40 = 8 + 16 + 16$$

$$40 = 40$$

## 5.5 CIRCUIT PARALLÈLE

Deux éléments ou deux branches d'un circuit sont *en parallèle* s'ils ont *deux points* en commun. À la figure 5.19, les éléments *A* et *B* sont en parallèle entre eux, et en parallèle avec l'élément *C*. Chacun des éléments étant en parallèle avec les autres éléments, le montage est appelé *circuit parallèle*. À la figure 5.20a, les éléments *A* et *B* sont en parallèle, et en série avec l'élément *C*. Enfin, à la figure 5.20.b, ni *A* ni *B* ne sont en parallèle avec *C*, mais le montage série de *A* et de *B* est en parallèle avec l'élément *C*. Voyons maintenant un circuit comportant des résistances. Dans le circuit illustré à la figure 5.21, les résistances  $R_1$  et  $R_2$  sont en parallèles puisqu'elles sont raccordées à deux points communs, *a* et *b*. Pour la même raison, on dit que la tension  $E$  de la source est appliquée en parallèle à des résistances; évidemment, on constate facilement que *la tension aux bornes d'éléments en parallèle est la même pour chaque élément*. À l'aide de l'équation (3.5), on peut écrire que les résistances  $R_1$  et  $R_2$  ont des conductances respectives de  $G_1 = 1/R_1$  et  $G_2 = 1/R_2$ . La conductance totale d'un circuit parallèle se détermine d'une manière semblable à celle que nous avons utilisée pour calculer la résistance totale d'un circuit série, c'est-à-dire qu'il s'agit simplement de faire la somme des conductances de chacun des composants. Pour le circuit illustré à la figure 5.21, la conductance totale est donc:

$$G_T = G_1 + G_2$$

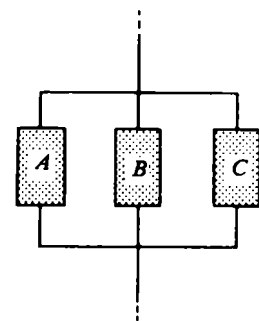
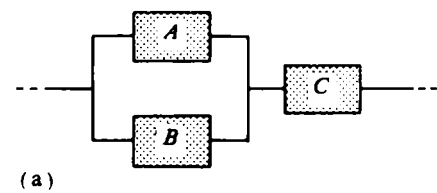
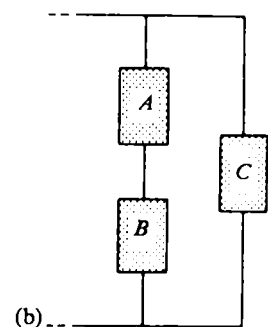


FIG. 5.19



(a)



(b)

FIG. 5.20

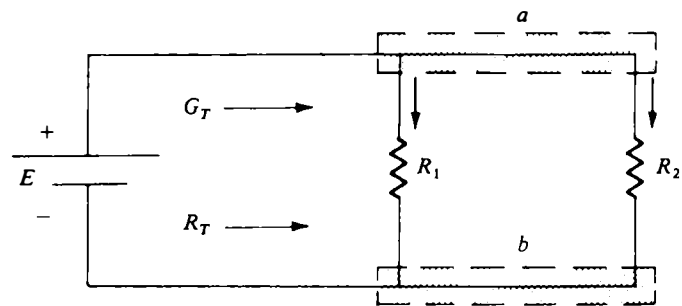


FIG. 5.21



En règle générale, la conductance totale d'un circuit parallèle est égale à la somme des conductances de chacune des branches:

$$G_T = G_1 + G_2 + G_3 + \dots + G_N \quad (5.7)$$

ou:

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_N} \quad (5.8)$$

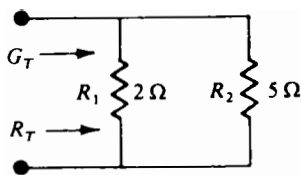


FIG. 5.22

**EXEMPLE 5.11** Calculer la conductance totale et la résistance totale du réseau parallèle illustré à la figure 5.22.

*Solution:*

$$\begin{aligned} G_T &= G_1 + G_2 \\ G_1 &= \frac{1}{R_1} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ S} \\ G_2 &= \frac{1}{R_2} = \frac{1}{5} = 0,2 \text{ S} \\ G_T &= 0,5 + 0,2 = \mathbf{0,7 \text{ S}} \\ R_T &= \frac{1}{G_T} = \frac{1}{0,7} = \mathbf{1,429 \Omega} \end{aligned}$$

**EXEMPLE 5.12** Calculer  $G_T$  et  $R_T$  dans le réseau illustré à la figure 5.23.

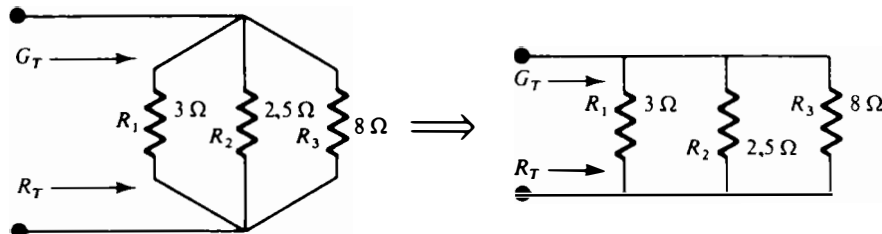


FIG. 5.23

*Solution:*

$$\begin{aligned} G_T &= G_1 + G_2 + G_3 \\ G_1 &= \frac{1}{R_1} = \frac{1}{3} = 0,333 \text{ S} \\ G_2 &= \frac{1}{R_2} = \frac{1}{2,5} = 0,4 \text{ S} \\ G_3 &= \frac{1}{R_3} = \frac{1}{8} = 0,125 \text{ S} \\ G_T &= 0,333 + 0,4 + 0,125 = \mathbf{0,858 \text{ S}} \\ R_T &= \frac{1}{G_T} = \frac{1}{0,858} = \mathbf{1,165 \Omega} \end{aligned}$$

La conductance d'un circuit parallèle et la résistance d'un circuit série sont souvent appelées *duals*, puisqu'il est possible

d'établir certaines relations s'appliquant au circuit parallèle à partir de celles qu'on pourrait établir pour le circuit série, et vice versa, simplement en permutant les symboles  $R$  et  $G$  dans ces relations. Ainsi, si nous remplaçons  $G$  dans l'équation (5.7) par  $R$  et si on conserve les mêmes indices inférieurs, nous obtenons l'équation qui permet de calculer la résistance totale d'un circuit série:

$$R_T = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_N \quad (5.1)$$

De façon semblable, si nous substituons  $G$  à  $R$  dans l'équation (5.2), nous obtenons, en raison du principe de correspondance par dualité, l'expression qui permet de calculer la conductance totale d'un circuit parallèle constitué de  $N$  conductances:

$$G_T = N G \quad (5.9)$$

Pour la résistance totale  $R_T$ , nous avons:

$$\frac{1}{R_T} = N \frac{1}{R}$$

et:

$$R_T = \frac{R}{N} \quad (5.10)$$

La résistance totale d'un circuit parallèle constitué de  $N$  résistances identiques est donc égale au quotient de la valeur ohmique d'une résistance par le nombre total de résistances.

**EXEMPLE 5.13** Calculer  $G_T$  et  $R_T$  dans le circuit illustré à la figure 5.24.

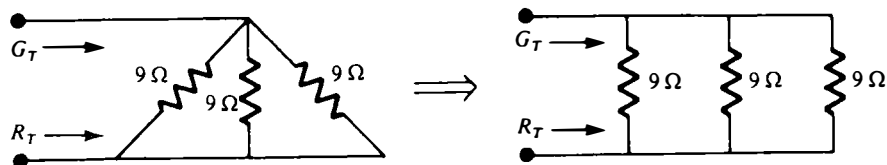


FIG. 5.24

*Solution:*

$$G_T = NG$$

$$G = \frac{1}{9} = 0,111 \text{ S}$$

$$G_T = (3)(0,111) = \mathbf{0,333 \text{ S}}$$

et:

$$R_T = \frac{1}{G_T} = \frac{1}{0,333} = 3 \Omega$$

ou:

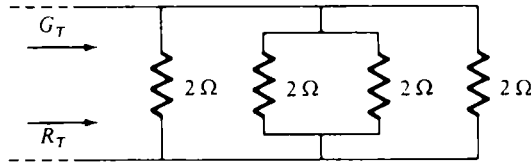
$$R_T = \frac{R}{N} = \frac{9}{3} = \mathbf{3 \Omega}$$

**EXEMPLE 5.14** Calculer  $R_T$  et  $G_T$  dans le circuit illustré à la figure 5.25:

*Solution:*

$$R_T = \frac{R}{N} = \frac{2}{4} = 0,5 \Omega$$

$$G_T = \frac{1}{R_T} = \frac{1}{0,5} = 2 \text{ S}$$



**FIG. 5.25**

Souvent, il est commode d'avoir une formule toute faite qui permet de calculer la résistance totale de deux résistances montées en parallèle. Considérons par exemple le circuit illustré à la figure 5.26:

$$G_T = \frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

et:

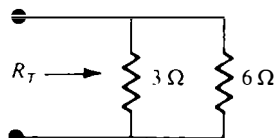
$$R_T = \frac{1}{(1/R_1) + (1/R_2)} = \frac{1}{(R_1 + R_2)/(R_1 R_2)}$$

de sorte que:

$$R_T = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (5.11)$$

On peut évidemment établir une équation tout à fait semblable pour un montage de trois résistances en parallèle:

$$R_T = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \quad (5.12)$$



**FIG. 5.27**

Dans les exemples qui suivent, on notera que la *résistance totale de deux résistances montées en parallèle est toujours inférieure à la valeur ohmique de la plus faible des résistances mais supérieure à la moitié de la valeur ohmique de cette résistance.*

**EXEMPLE 5.15** Calculer la résistance totale dans le circuit parallèle illustré à la figure 5.27.

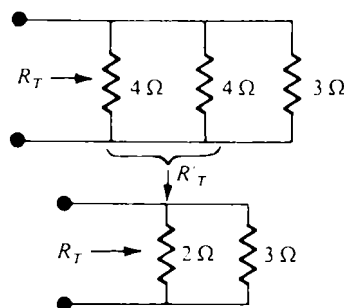
*Solution:*

$$R_T = \frac{(3)(6)}{3 + 6} = \frac{18}{9} = 2 \Omega$$

**EXEMPLE 5.16** Calculer  $R_T$  dans le circuit illustré à la figure 5.28.

*Solution:*

$$\begin{aligned} R_T &= \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} = \frac{(4)(4)(3)}{(4)(4) + (4)(3) + (4)(3)} \\ &= \frac{48}{16 + 12 + 12} = \frac{48}{40} = 1,2 \Omega \end{aligned}$$



**FIG. 5.28**

ou:

$$R'_T = \frac{R}{N} = \frac{4}{2} = 2 \Omega$$

et:

$$R_T = \frac{(2)(3)}{2 + 3} = \frac{6}{5} = 1,2 \Omega$$

**EXEMPLE 5.17** Calculer  $R_T$  dans le circuit illustré à la figure 5.29.

*Solution:*

$$R'_T = \frac{R}{N} = \frac{4}{3} = 1,33 \Omega$$

$$R''_T = \frac{(3)(8)}{3 + 8} = \frac{24}{11} = 2,18 \Omega$$

$$R_T = \frac{(1,33)(2,18)}{1,33 + 2,18} = \frac{2,91}{3,51} = 0,83 \Omega$$

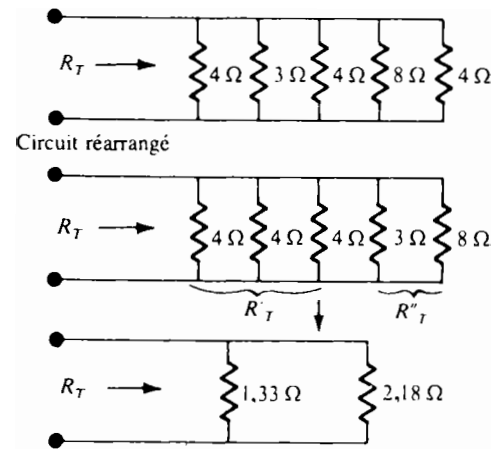


FIG. 5.29

## 5.6 LOI DES COURANTS DE KIRCHHOFF

La loi des courants de Kirchhoff est: *la somme algébrique des courants qui arrivent à un noeud et qui en partent est nulle* (un noeud étant le point de jonction de deux ou plusieurs branches). Autrement dit, *la somme des courants qui arrivent à un noeud d'un circuit est égale à la somme des courants qui en partent*. On peut donc écrire algébriquement:

$$\sum I_{\text{arrivant}} = \sum I_{\text{partant}} \quad (5.13)$$

À la figure 5.30, les courants  $I_1$ ,  $I_3$  et  $I_4$  arrivent au noeud alors que les courants  $I_2$  et  $I_5$  en partent. Appliquons l'équation (5.13); nous obtenons:

$$I_1 + I_3 + I_4 = I_2 + I_5$$

ce qui donne après substitution des valeurs numériques:

$$\begin{aligned} 2 + 4 + 3 &= 8 + 1 \\ 9 &= 9 \end{aligned}$$

La région ombragée à la figure 5.30 n'est pas nécessairement un simple point de jonction. En effet, comme l'illustre la figure 5.31, le noeud peut être constitué d'un certain nombre de composants montés en série et en parallèle, ou il peut être un réseau très complexe. La loi des courants s'écrit alors:

$$I_A + I_B + I_C = I_D$$

Considérons maintenant quelques exemples d'application de cette loi pour déterminer des courants inconnus.

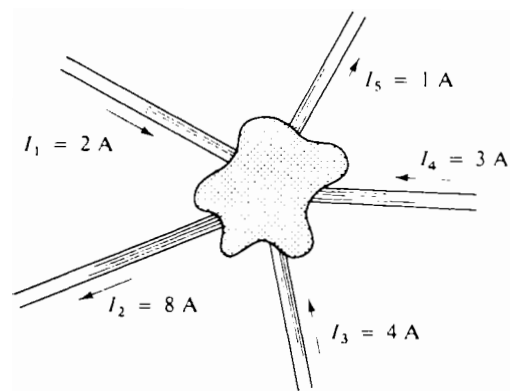


FIG. 5.30

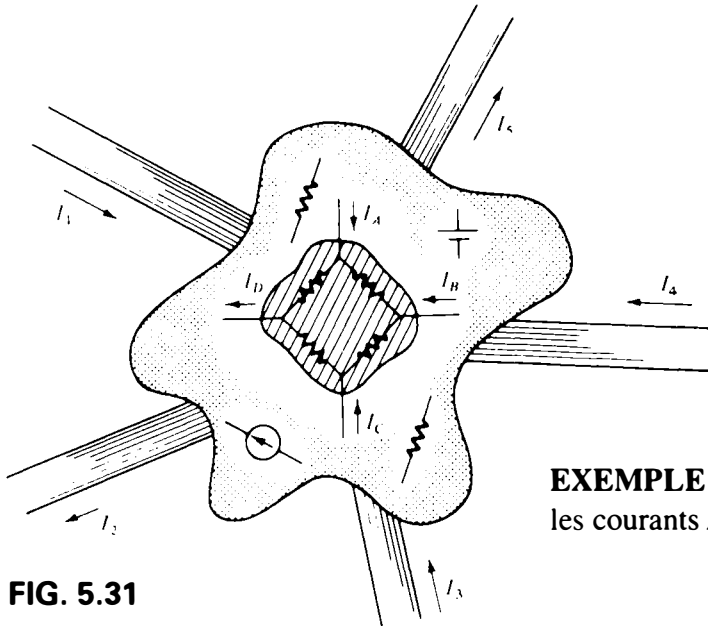


FIG. 5.31

**EXEMPLE 5.18** À l'aide de la loi des courants, déterminer les courants  $I_3$  et  $I_5$  dans le réseau illustré à la figure 5.32.

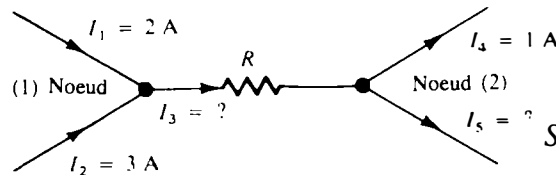


FIG. 5.32

*Solution:*

$$\begin{array}{ll}
 \text{(1)} & \text{(2)} \\
 I_1 + I_2 = I_3 & I_3 = I_4 + I_5 \\
 2 + 3 = I_3 & \text{ou } I_5 = I_3 - I_4 = 5 - 1 \\
 \text{et } I_3 = 5 \text{ A} & \text{et } I_5 = 4 \text{ A}
 \end{array}$$

**EXEMPLE 5.19** Déterminer les courants  $I_3$  et  $I_5$  dans le réseau illustré à la figure 5.33.

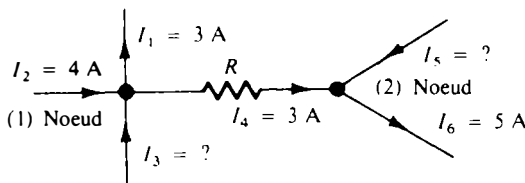


FIG. 5.33

*Solution:*

$$\begin{array}{ll}
 \text{(1)} & \text{(2)} \\
 I_2 + I_3 = I_1 + I_4 & I_4 + I_5 = I_6 \\
 \text{et } I_3 = I_1 + I_4 - I_2 & \text{et } I_5 = I_6 - I_4 \\
 = 3 + 3 - 4 & = 5 - 3 \\
 I_3 = 2 \text{ A} & I_5 = 2 \text{ A}
 \end{array}$$

**EXEMPLE 5.20** Voir le circuit illustré à la figure 5.34.

- Déterminer la conductance totale et la résistance totale du circuit.
- Déterminer le courant  $I_T$ .
- Déterminer le courant de chacune des branches.
- Vérifier la loi des courants au noeud  $a$ .
- Déterminer la puissance dissipée par chaque résistance et indiquer si elle est égale à la puissance fournie.

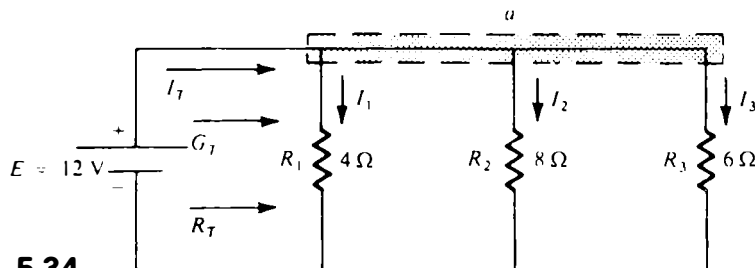


FIG. 5.34

Solution:

$$\begin{aligned} \text{a. } G_T &= G_1 + G_2 + G_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{6} \\ &= 0,25 + 0,125 + 0,167 \end{aligned}$$

$$G_T = \mathbf{0,542 \text{ S}}$$

$$R_T = \frac{1}{G_T} = \frac{1}{0,542} = \mathbf{1,85 \Omega}$$

$$\text{b. } I_T = EG_T = (12)(0,542) = \mathbf{6,5 \text{ A}}$$

ou

$$I_T = \frac{E}{R_T} = \frac{12}{1,85} = \mathbf{6,5 \text{ A}}$$

$$\text{c. } I_1 = \frac{V_1}{R_1} = \frac{E}{R_1} = \frac{12}{4} = \mathbf{3 \text{ A}}$$

$$I_2 = \frac{V_2}{R_2} = \frac{E}{R_2} = \frac{12}{8} = \mathbf{1,5 \text{ A}}$$

$$I_3 = \frac{V_3}{R_3} = \frac{E}{R_3} = \frac{12}{6} = \mathbf{2 \text{ A}}$$

$$\text{d. } +I_T - I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

$$I_T = I_1 + I_2 + I_3$$

$$6,5 = 3 + 1,5 + 2$$

$$\underline{6,5 = 6,5}$$

$$\text{e. } P = EI_T = (12)(6,5) = \mathbf{78 \text{ W}}$$

$$P_{R_1} = EI_1 = (12)(3) = \mathbf{36 \text{ W}}$$

$$P_{R_2} = EI_2 = (12)(1,5) = \mathbf{18 \text{ W}}$$

$$P_{R_3} = EI_3 = (12)(2) = \mathbf{24 \text{ W}}$$

$$P = P_{R_1} + P_{R_2} + P_{R_3}$$

$$78 = 36 + 18 + 24$$

$$\underline{78 = 78}$$

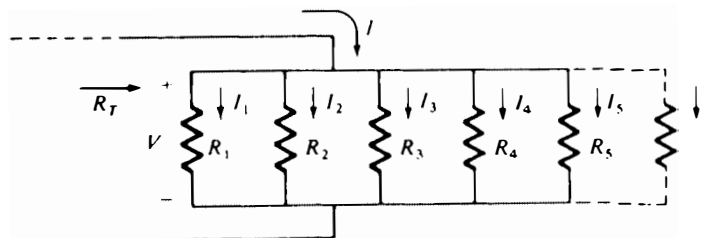


FIG. 5.35

## 5.7 RÈGLE DU DIVISEUR DE COURANT

Établissons la règle du diviseur de courant au moyen du réseau illustré à la figure 5.35. Le courant d'entrée  $I$  est égal à  $V/R_T$ , où  $R_T$  est la résistance totale des branches en parallèle. Substituons  $I_x R_x$  à  $V$  dans cette équation,  $I_x$  étant le courant parcourant la branche dont la résistance est  $R_x$ ; nous obtenons:

$$I = \frac{V}{R_T} = \frac{I_x R_x}{R_T}$$

et:

$$I_x = \frac{R_T}{R_x} I \tag{5.14}$$

L'équation (5.14) est la forme généralisée de la *règle du diviseur de courant*. Cette règle stipule que le courant dans une branche parallèle quelconque est égal au produit de la résistance totale des branches parallèles et du courant d'entrée, divisé par la résistance de la branche considérée.

Pour le courant  $I_1$ :

$$I_1 = \frac{R_T}{R_1} I$$

et pour  $I_2$ :

$$I_2 = \frac{R_T}{R_2} I$$

Dans le cas particulier d'un montage parallèle de deux résistances (figure 5.36), on peut écrire:

$$R_T = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

et:

$$I_1 = \frac{R_T}{R_1} I = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \frac{I}{R_1}$$

et:

$$I_1 = \frac{R_2 I}{R_1 + R_2} \tag{5.15a}$$

À noter que les indices sont différents.

Pour  $I_2$ , on a:

$$I_2 = \frac{R_1 I}{R_1 + R_2} \tag{5.15b}$$

En clair, le courant qui passe dans une des deux branches d'un montage parallèle est égal au produit de la résistance de l'*autre* branche et du courant d'entrée divisé par la *somme* des résistances (et non par la résistance totale en parallèle des deux branches).

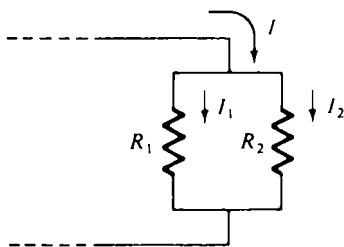


FIG. 5.36

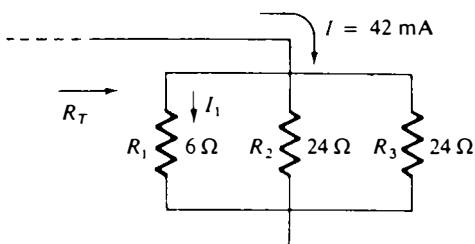


FIG. 5.37

**EXEMPLE 5.21** Déterminer le courant  $I_1$  dans le réseau illustré à la figure 5.37.

*Solution:* De l'équation (5.14), on a:

$$R_T = 6 \parallel 24 \parallel 24 = 6 \parallel 12 = 4 \Omega$$

$$I_1 = \frac{4(42 \times 10^{-3})}{6} = 28 \text{ mA}$$

**EXEMPLE 5.22** Déterminer les courants  $I_1$  et  $I_2$  dans le réseau illustré à la figure 5.38.

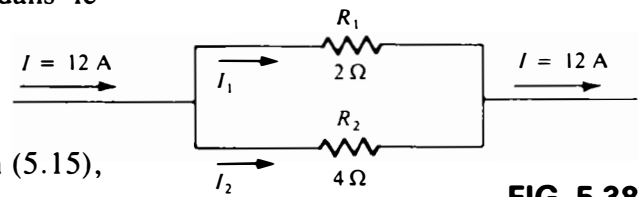


FIG. 5.38

*Solution:* De la règle du diviseur de courant, équation (5.15), on a:

$$I_1 = \frac{(4)(12)}{4 + 2} = 8 \text{ A}$$

Et de par la loi des courants de Kirchhoff:

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 \\ I_2 &= I - I_1 = 12 - 8 \\ I_2 &= 4 \text{ A} \end{aligned}$$

ou encore, de la règle du diviseur de courant:

$$I_2 = \frac{(2)(12)}{4 + 2} = 4 \text{ A}$$

**EXEMPLE 5.23** Déterminer  $I_1$  et  $I_2$  dans le montage illustré à la figure 5.39.

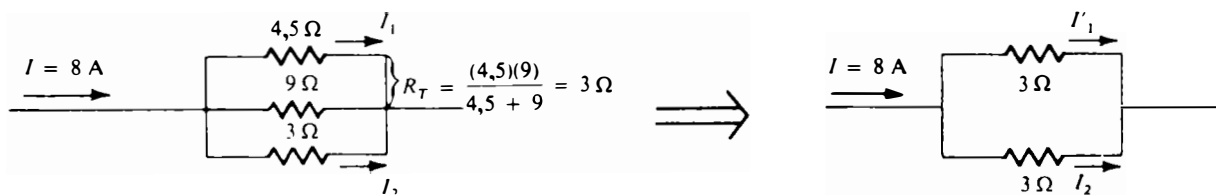


FIG. 5.39

*Solution:*

$$I'_1 = I_2 = \frac{8}{2} = 4 \text{ A}$$

Le courant se divise également entre les deux branches, car leurs résistances sont égales.

La règle du diviseur de courant permet d'écrire (figure 5.40):

$$I_1 = \frac{(9)(4)}{9 + 4,5} = \frac{36}{13,5}$$

$$I_1 = 2,667 \text{ A}$$

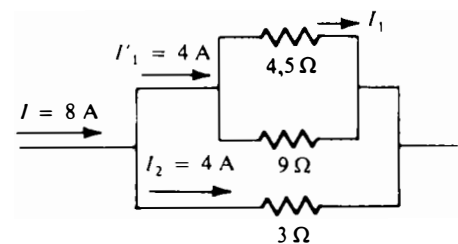


FIG. 5.40

Des exemples précédents, on peut tirer certaines conclusions.

1. Il est souvent utile de retracer le circuit pour l'analyser.
2. Le courant alimentant un montage parallèle de résistances se divise entre les résistances selon le rapport inverse de leurs valeurs ohmiques. C'est ce que la figure 5.41 illustre.

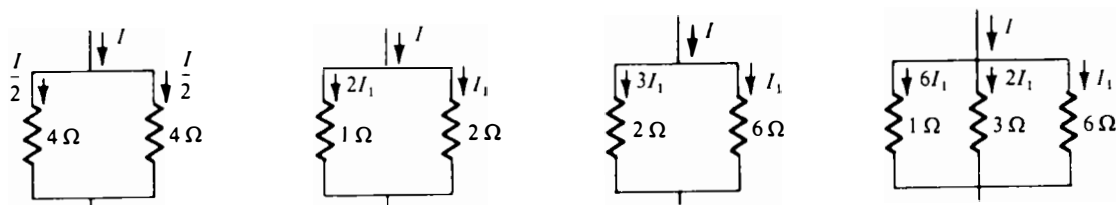


FIG. 5.41



3. Dans le cas particulier d'un montage parallèle de deux résistances, c'est la résistance la plus petite qui est traversée par le courant le plus intense.

Le recours à une analogie mécanique permet souvent de mieux comprendre cette distribution du courant. Considérons un réseau de distribution d'eau. Dans un tel réseau, l'eau est l'analogie des charges, et les conduites l'analogie des conducteurs, le diamètre des conduites correspondant à la résistance des conducteurs: plus petit est le diamètre, plus grande est la résistance.

Le courant total  $I$  du circuit illustré à la figure 5.42a se divise également entre deux résistances identiques. De façon analogue, le même débit d'eau passe dans deux conduites en parallèle si leurs diamètres sont les mêmes.

Dans le circuit représenté à la figure 5.42b, une résistance est trois fois plus grande que l'autre; le courant se divise alors comme l'illustre la figure. Dans l'analogie mécanique, une conduite a un diamètre trois fois plus grand que celui de la seconde; le débit d'eau (courant) qui passe dans la conduite la plus petite est évidemment trois fois plus petit que celui de la conduite la plus grosse. Soulignons enfin que dans les deux exemples, le débit d'eau à l'entrée des deux conduites en parallèle est égal au débit d'eau à leur sortie.

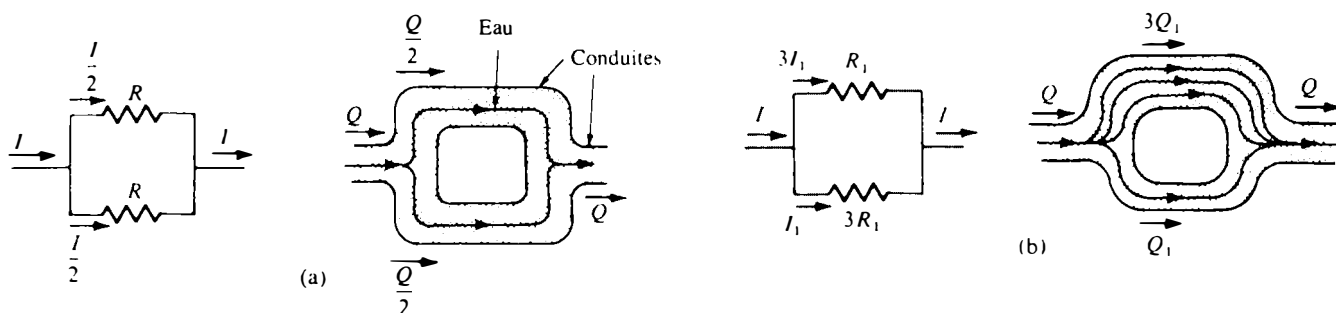


FIG. 5.42

## 5.8 COURTS-CIRCUITS

Par élément *court-circuité*, on entend un élément aux bornes duquel est raccordée une branche de très faible résistance. À titre d'exemple, la résistance de  $2\ \Omega$  du circuit illustré à la figure 5.43 est court-circuitée par un bout de fil de résistance pratiquement nulle. Le courant qui passe dans le court-circuit peut se déterminer au moyen de la règle du diviseur de courant:

$$I_s = \frac{(2)(5)}{2 + 0} = 5 = I$$

Le courant total qui alimente les deux branches en parallèle passe donc entièrement dans le court-circuit. Aucun courant ne traverse la résistance, et il ne se produit évidemment aucune chute de tension à ses bornes.

L'effet d'un court-circuit peut être dangereux, car le courant est susceptible de passer à une valeur très élevée, une fois la

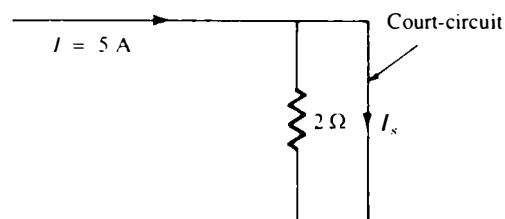


FIG. 5.43

charge court-circuitée. Dans le circuit illustré à la figure 5.44a, l'intensité du courant est limitée par la charge ( $99 \Omega$ ) et par la résistance des conducteurs ( $1 \Omega$ ):

$$I = \frac{120}{99 + 1} = \frac{120}{100} = 1,2 \text{ A}$$

À la figure 5.44b, la résistance de  $99 \Omega$  est court-circuitée par un bout de fil; la résistance totale du circuit est par conséquent uniquement celle des conducteurs ( $1 \Omega$ ). L'intensité du courant qui parcourt les conducteurs et le court-circuit est alors:

$$I = \frac{120}{1} = 120 \text{ A}$$

intensité suffisamment grande pour que la chaleur dégagée ( $I^2R$ ) fasse fondre la gaine isolante du fil, d'où le danger d'émission d'étincelles et d'incendie.

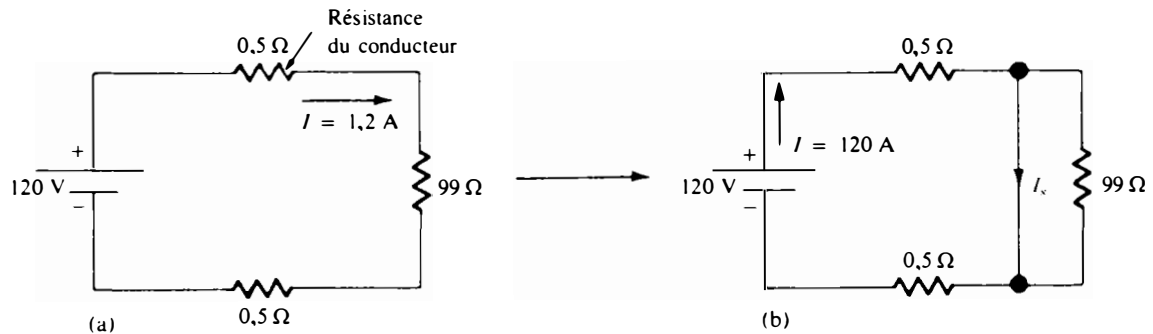


FIG. 5.44

### 5.9 SOURCES DE TENSION EN SÉRIE

Plusieurs sources de tension en série peuvent être remplacées par une seule source de tension dont la f.é.m. est de grandeur et de polarité égales à celles de la f.é.m. *résultante*. On déter-

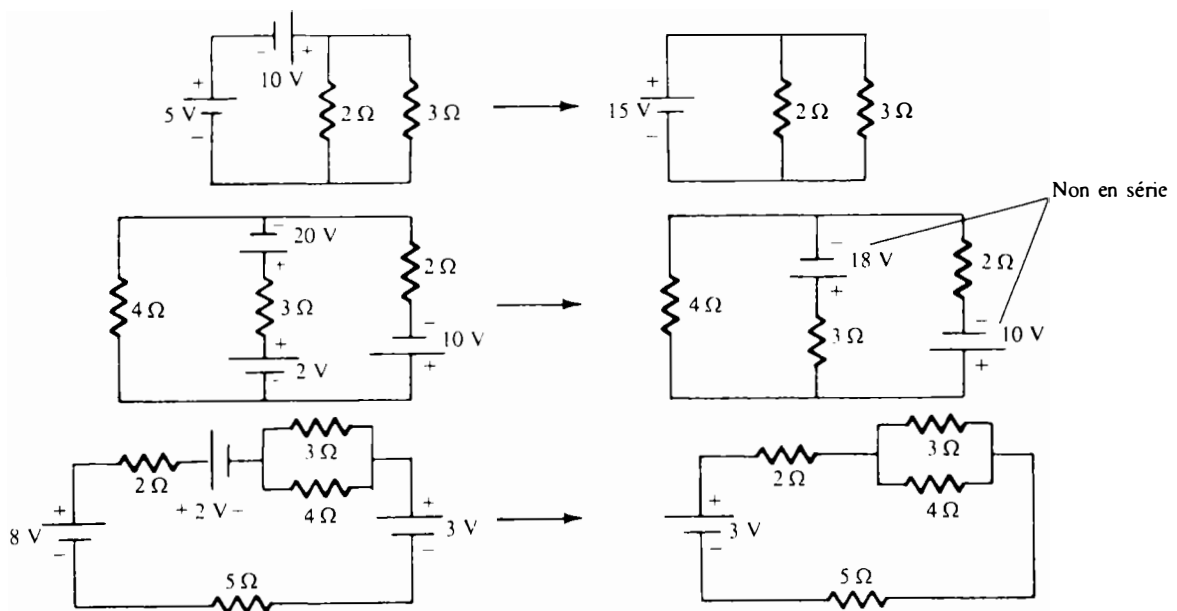


FIG. 5.45

mine la résultante en prenant la somme de toutes les f.é.m. de même polarité, et en soustrayant la somme de toutes les f.é.m. de polarité opposée. La partie gauche de la figure 5.45 représente trois circuits comprenant des sources de tension en série, alors que la partie droite représente les circuits simplifiés correspondants.

## 5.10 RÉSISTANCE INTERNE DES SOURCES DE TENSION

Toute source de f.é.m., qu'il s'agisse d'une génératrice, d'une batterie ou d'une alimentation de laboratoire (figure 5.46a), a une certaine résistance interne. Le circuit équivalent réel d'une source de f.é.m. est donc semblable à celui illustré à la figure 5.46b. Dans la présente section, nous étudierons l'incidence de la résistance interne d'une source sur sa tension de sortie, de sorte que nous serons en mesure d'expliquer tout problème pouvant se présenter au sujet d'une source de f.é.m.

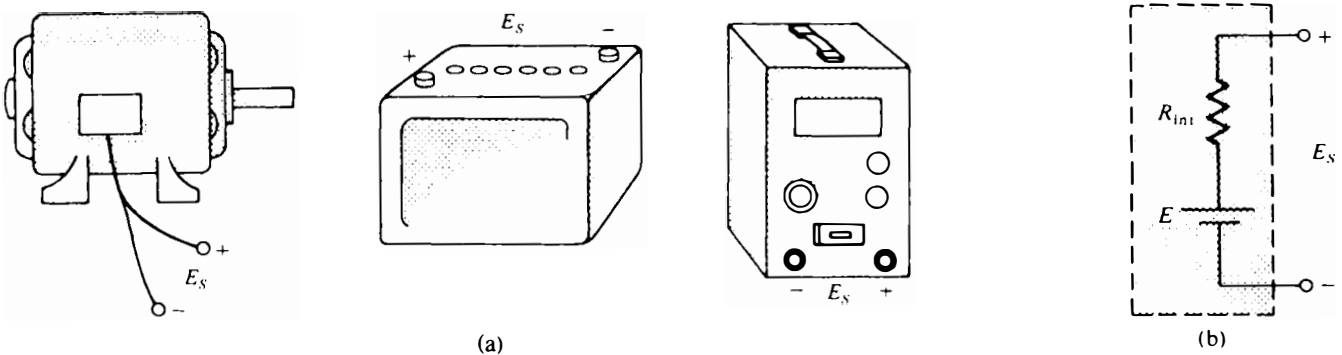


FIG. 5.46

Jusqu'à maintenant, notre analyse des circuits s'est faite avec l'hypothèse que la source de tension employée était idéale, c'est-à-dire que sa résistance interne était nulle (figure 5.47a). Nous continuerons de faire cette supposition dans le reste du manuel, sauf indication contraire. Occasionnellement, nous tiendrons compte en effet de la résistance interne d'une source pour pouvoir étudier son incidence sur la sortie de cette dernière.

La source de tension idéale illustrée à la figure 5.47a a une résistance interne nulle; sa tension de sortie  $E$  est constante, sans charge (SC) ou à pleine charge. Compte tenu maintenant de la résistance interne de la source (figure 5.47b), la tension de sortie est  $E$  seulement si la charge est nulle ( $I_C = 0$ ). Dès qu'une charge ( $R_C$ ) est raccordée à la source (figure 5.47c), la tension de sortie de la source chute à  $E_s$ , en raison de la chute de potentiel aux bornes de la résistance interne.

Appliquons la loi des tensions sur le trajet fermé illustré à la figure 5.47c; nous obtenons:

$$E - IR_{int} - E_S = 0$$

$$E = E_{SC}$$

$$E_{SC} - IR_{int} - E_S = 0$$

$$E_S = E_{SC} - IR_{int} \quad (5.16)$$

Cette dernière équation permet donc de calculer la résistance interne d'une source si elle est inconnue. En effet, on obtient par simple manipulation:

$$R_{int} = \frac{E_{SC} - E_S}{I} = \frac{E_{SC}}{I} - \frac{IR_C}{I}$$

et:

$$R_{int} = \frac{E_{SC}}{I} - R_C \quad (5.17)$$

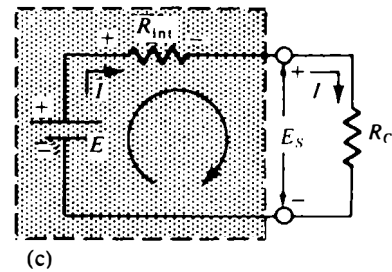
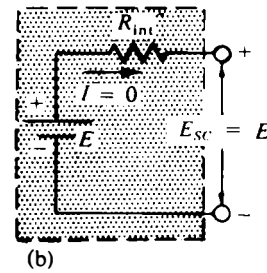
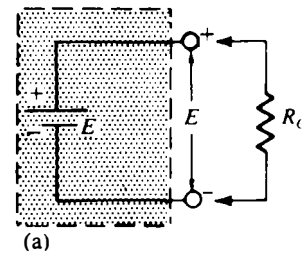


FIG. 5.47

Il suffit donc de mesurer la tension de sortie en l'absence de charge, et l'intensité du courant qui passe dans le circuit de charge.

La figure 5.48b représente la courbe de la tension de sortie en fonction de l'appel de courant pour le circuit illustré à la figure 5.48a. Notons qu'une augmentation du courant ( $I_C$ ) débité dans la charge fait nécessairement augmenter le courant qui passe dans la source et, par conséquent, la chute de tension due à sa résistance interne, ce qui provoque une baisse de la tension présente aux bornes de la source. Dans le cas limite où la résistance de la charge tend vers zéro, toute la tension

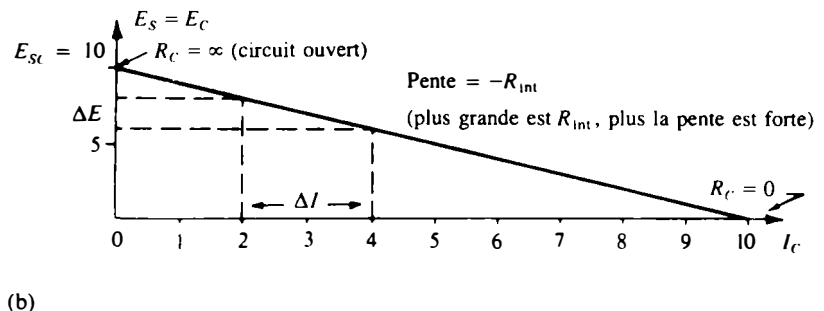
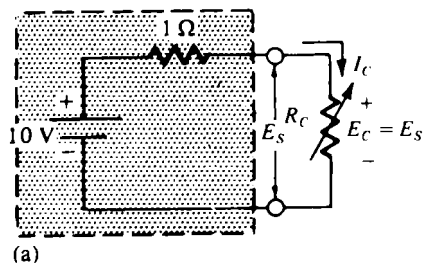


FIG. 5.48

générée apparaît donc aux bornes de la résistance interne, la tension aux bornes de sortie étant nulle. Notons par ailleurs que plus grande est la pente de la droite représentée à la figure 5.48b, plus grande est la résistance interne de la source. De

fait, pour tout intervalle de tension ou de courant, la grandeur de la résistance interne est donnée par la relation:

$$R_{\text{int}} = \frac{\Delta E}{\Delta I} \quad \text{où } \Delta \text{ symbolise une variation finie} \quad (5.18)$$

Pour l'intervalle de 2 A à 4 A illustré à la figure 5.48b,  $\Delta E$  est de 2 V, de sorte que  $R_{\text{int}} = 2/2 = 1 \Omega$ , comme l'indique la figure 5.48a. L'équation 5.18 traduit bien le fait que plus grande est la pente de la droite de la figure 5.48, ou plus rapide est la chute de la tension de sortie, plus grande est la résistance interne de la source.

Évidemment, une chute de la tension de sortie entraîne une chute de la puissance fournie à la charge. Multiplions en effet les deux membres de l'équation (5.16) par le courant  $I$  parcourant le circuit; nous obtenons:

$$IE_S = IE_{SC} - I^2R_{\text{int}} \quad (5.19)$$

Puissance fournie à la charge
Puissance de sortie de la batterie
Perte de puissance sous forme de chaleur

**EXEMPLE 5.24** En l'absence de toute charge, la tension de sortie de l'alimentation illustrée à la figure 5.49a est de 40 V. Lorsqu'on raccorde une charge de  $500 \Omega$  (figure 5.49b), la tension de sortie chute à 36 V. Comment peut-on expliquer cette différence de 4 V, et quelle est la résistance interne de la source?

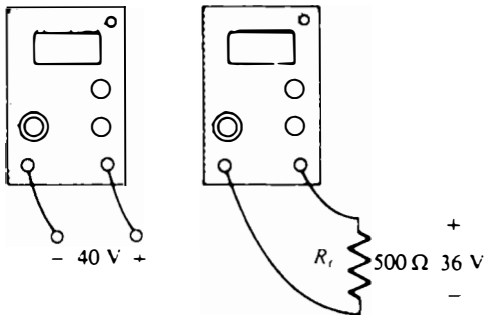


FIG. 5.49

*Solution:* La différence de 4 V apparaît maintenant aux bornes de la résistance interne de la source. L'intensité du courant de charge est  $36/0,5 \text{ k}\Omega = 72 \text{ mA}$ . Appliquons l'équation (5.17); nous avons:

$$R_{\text{int}} = \frac{E_{SC}}{I} - R_C = \frac{40}{72 \text{ mA}} - 0,5 \text{ k}\Omega = 555,55 - 500 = 55,55 \Omega$$

**EXEMPLE 5.25** La résistance interne de la batterie illustrée à la figure 5.50 est de  $2 \Omega$ . Calculer la tension  $E_S$  et la perte de puissance dans la résistance interne si la charge est une résistance de  $13 \Omega$ .

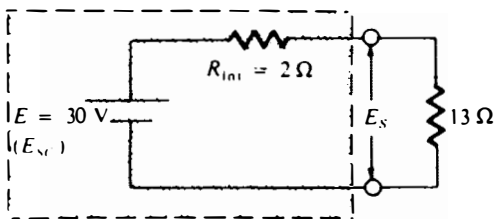


FIG. 5.50

*Solution:*

$$I = \frac{30}{2 + 13} = \frac{30}{15} = 2 \text{ A}$$

$$E_S = E_{SC} - IR_{\text{int}} = 30 - (2)(2) = 26 \text{ V}$$

$$P_{\text{perdue}} = I^2R_{\text{int}} = (2)^2(2) = 8 \text{ W}$$

**EXEMPLE 5.26** La caractéristique de sortie d'une génératrice est donnée à la figure 5.51. Les valeurs nominales (avec charge maximale) de sa tension et de son courant sont respectivement de 120 V et de 8 A. Calculer la résistance interne moyenne de la génératrice. Quel courant de charge fait chuter la tension à 100 V?

*Solution:*

$$R_{\text{int}} = \frac{\Delta E}{\Delta I} = \frac{4}{8} = 0,5 \Omega$$

$$\Delta I = \frac{\Delta E}{R_{\text{int}}} = \frac{24}{0,5} = I_C = 48 \text{ A}$$

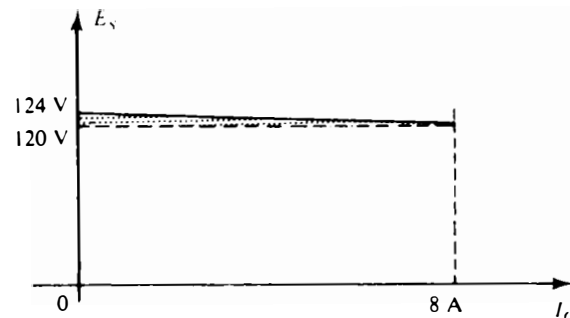


FIG. 5.51

## 5.11 RÉGULATION DE TENSION

Idéalement, une source de tension fournirait une tension de sortie constante malgré les variations du courant dans la charge ( $I_C$ ). En d'autres termes, une source de 12 V fournirait constamment une tension de sortie de 12 V malgré les variations de l'appel de courant dans la charge. Toutefois, les sources de tensions réelles s'écartent de ces conditions idéales. Le taux de régulation d'une source est une mesure de cet écart: il se définit à partir de la tension fournie pour la charge maximale de service et de la tension fournie pour une charge nulle (figure 5.52) de la façon suivante:

$$\text{Taux de régulation (VR\%)} = \frac{E_{c_n} - E_{c_m}}{E_{c_m}} \times 100\%$$

(5.20)

Dans les conditions idéales,  $E_{c_m} = E_{c_n}$  et  $\text{VR\%} = 0$ . Par conséquent, *plus petit est le taux de régulation et plus petite est la variation de la tension de sortie avec la charge.*

Il est également possible de démontrer que le taux de régulation est aussi donné par:

$$\text{VR\%} = \frac{R_{\text{int}}}{R_C} \times 100\%$$

(5.21)

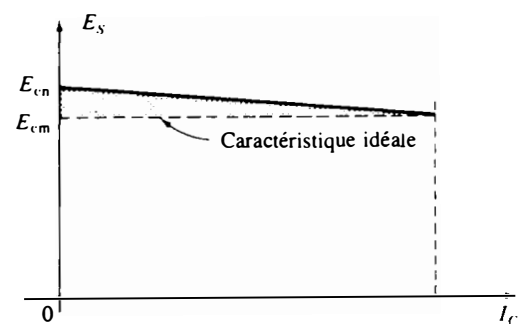


FIG. 5.52

Pour une charge donnée, plus petite est la résistance interne plus petit est par conséquent le taux de régulation.

**EXEMPLE 5.27** Calculer le taux de régulation de la source dont la caractéristique de sortie est donnée à la figure 5.51.

*Solution:*

$$\begin{aligned}
 VR\% &= \frac{E_{cn} - E_{cm}}{E_{cm}} \times 100\% \\
 &= \frac{124 - 120}{120} \times 100\% = \frac{4}{120} \times 100\% \\
 VR &= 3,33\%
 \end{aligned}$$

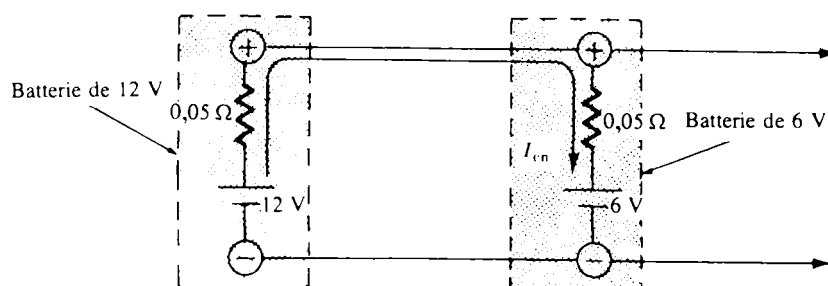
**EXEMPLE 5.28** Déterminer le taux de régulation de la source illustrée à la figure 5.50.

*Solution:*

$$\begin{aligned}
 VR\% &= \frac{R_{int}}{R_c} \times 100\% = \frac{2}{13} \times 100\% \\
 &\cong 15,38\%
 \end{aligned}$$

## 5.12 SOURCES DE TENSION EN PARALLÈLE

En courant continu, il faut éviter de monter des sources de tension en parallèle à moins que leurs caractéristiques ne soient identiques (même tension, même résistance interne, même capacité, etc.). La figure 5.53 illustre deux batteries montées en parallèle, dont les résistances internes sont les mêmes mais dont les tensions de sortie sont différentes. En l'absence de toute charge, la batterie de 12 V se décharge dans l'autre. À un moment donné, sa tension sous charge nulle passera à environ 11 V, et sa résistance interne s'élèvera à peut-être 10  $\Omega$  (200 fois la résistance nominale). La chute de potentiel aux bornes de la résistance interne de la batterie de 12 V sera alors de 5 V [( $V = 10(11 - 6)/(10 + 0,05) = 5$  V)], la tension de sortie de la batterie n'étant plus que de 6 V. De même, la capacité de la batterie aura chuté, à un point tel que la batterie ne sera plus utilisable. Raccordons maintenant une charge à notre montage; le courant débité dans la charge proviendra presque exclusivement de la batterie de 6 V, et la tension sera de 6 V. Ce n'est donc qu'occasionnellement que des batteries de f.é.m. différentes sont montées en parallèle, et ordinairement pour de très courtes périodes de temps.



**FIG. 5.53**

Par contre, des batteries de même tension nominale sont parfois mises en parallèle si l'appel de courant d'une charge est plus grand que la capacité nominale d'une seule batterie. À la figure 5.54, deux batteries semblables de 6 V et d'une capacité de 50 Ah à 2 A ont été montées en parallèle. Dans des conditions idéales, aucune batterie ne se charge ou ne se décharge en l'absence de toute charge puisque les deux sont semblables. Lorsqu'une charge est raccordée au montage, le courant  $I_T$  débité est de 4 A ( $I_T = I_{B1} + I_{B2}$ ), à condition que chaque batterie débite 2 A. La capacité du montage est donc de 100 Ah à 4 A. La tension d'alimentation demeure toutefois à 6 V.

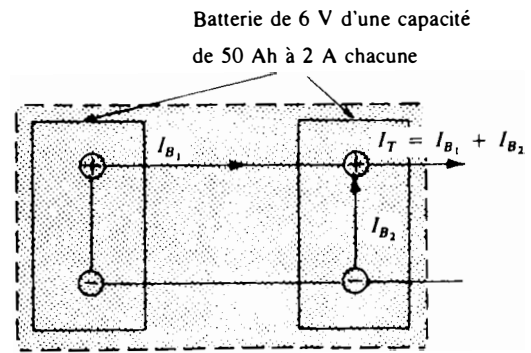


FIG. 5.54

PROBLÈMES

Section 5.2

1. a. Calculez la résistance totale de chacun des circuits illustrés à la figure 5.55.
- b. Calculez le courant  $I$  dans chaque circuit.

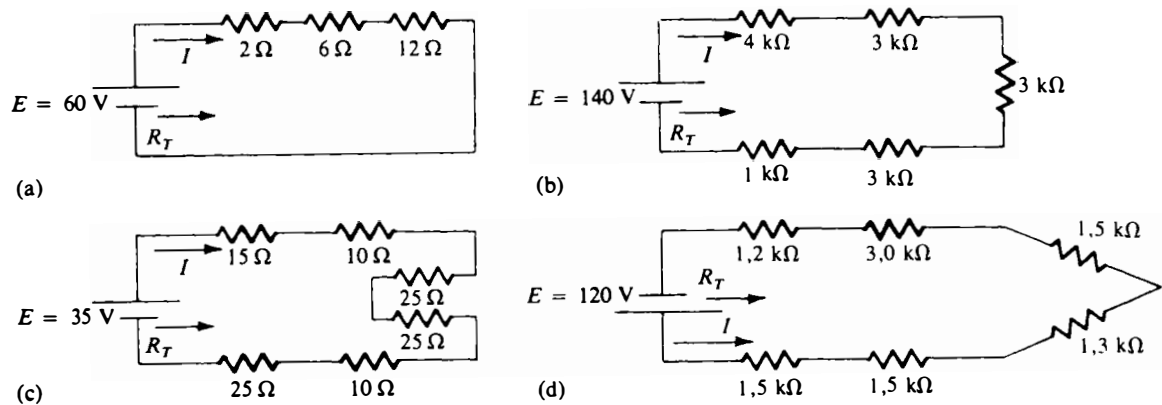


FIG. 5.55

2. a. Voir les circuits illustrés à la figure 5.56. Déterminez les résistances inconnues.
- b. Déterminez le courant  $I$  dans chaque circuit.

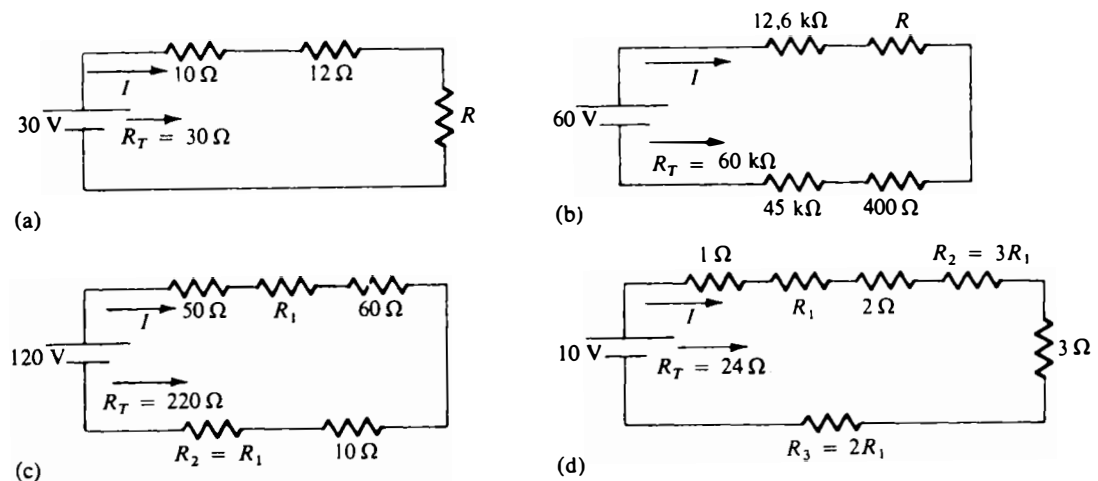


FIG. 5.56



3. Déterminez quelle est la tension  $E$  nécessaire pour qu'il passe, dans chaque circuit illustré à la figure 5.57, le courant dont la valeur est indiquée.

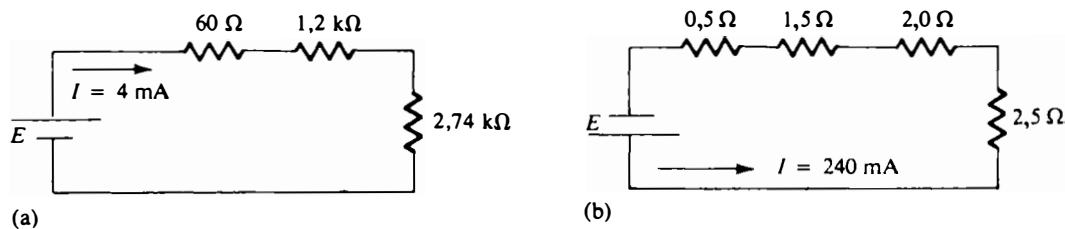


FIG. 5.57

Section 5.3

4. Déterminez la valeur et la polarité de  $V_{ab}$  dans les circuits illustrés à la figure 5.58. Chaque boîte noire peut contenir une charge ou une alimentation, ou une combinaison des deux.

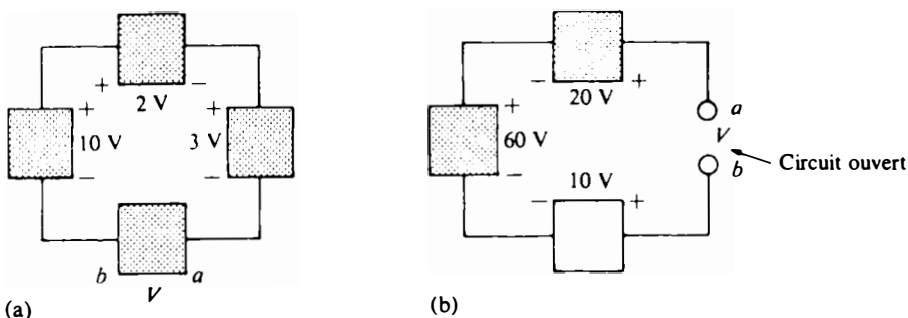


FIG. 5.58

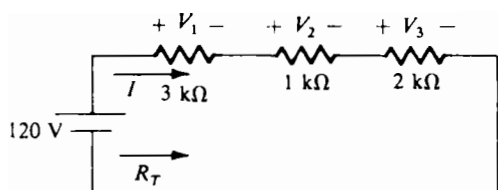


FIG. 5.59

5. Voir le circuit illustré à la figure 5.59.
  - a. Déterminez la résistance totale, le courant total et les chutes de tension.
  - b. Vérifiez la loi des tensions de Kirchhoff.
  - c. Calculez la puissance dissipée par chacune des résistances, et comparez la puissance fournie à la puissance dissipée.
  - d. On a le choix d'utiliser des résistances de puissance nominale de 0,5 W, 1 W ou 2 W. Quelle puissance nominale minimale choisira-t-on pour chacune des résistances de ce circuit?
6. Refaites le problème 5 avec le circuit illustré à la figure 5.60.

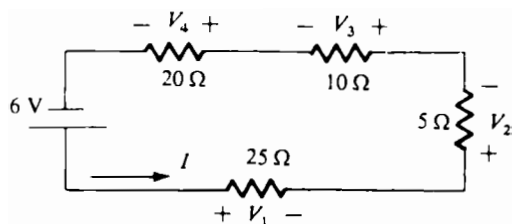


FIG. 5.60

\*7. Déterminez les quantités inconnues dans les circuits illustrés à la figure 5.61, à partir des renseignements donnés.

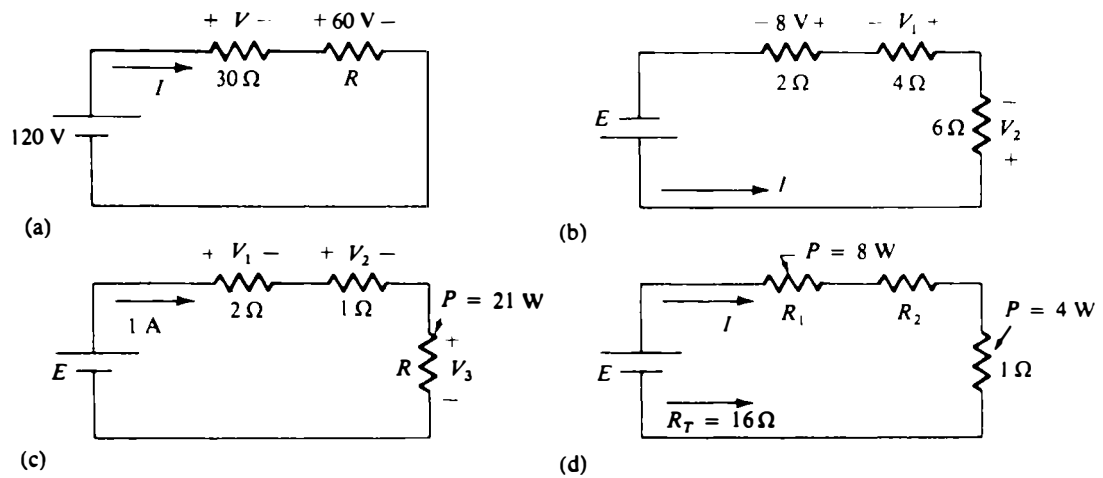


FIG. 5.61

8. Huit ampoules de sapin de Noël sont raccordées en série, comme l'illustre la figure 5.62.
- Le jeu d'ampoules est branché sur une source de 120 V. Quel est le courant passant dans les ampoules, si la résistance interne de chacune d'entre elles est de  $28,125 \Omega$ ?
  - Déterminez la puissance fournie à chaque ampoule.
  - Calculez la chute de tension aux bornes de chaque ampoule.
  - Une ampoule grille. Qu'arrive-t-il aux autres?

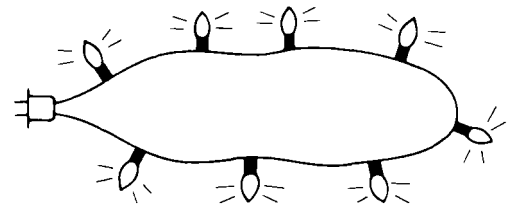


FIG. 5.62

Section 5.4

9. À l'aide de la règle du diviseur de tension, déterminez la valeur et la polarité de  $V_{ab}$  dans les circuits illustrés à la figure 5.63.

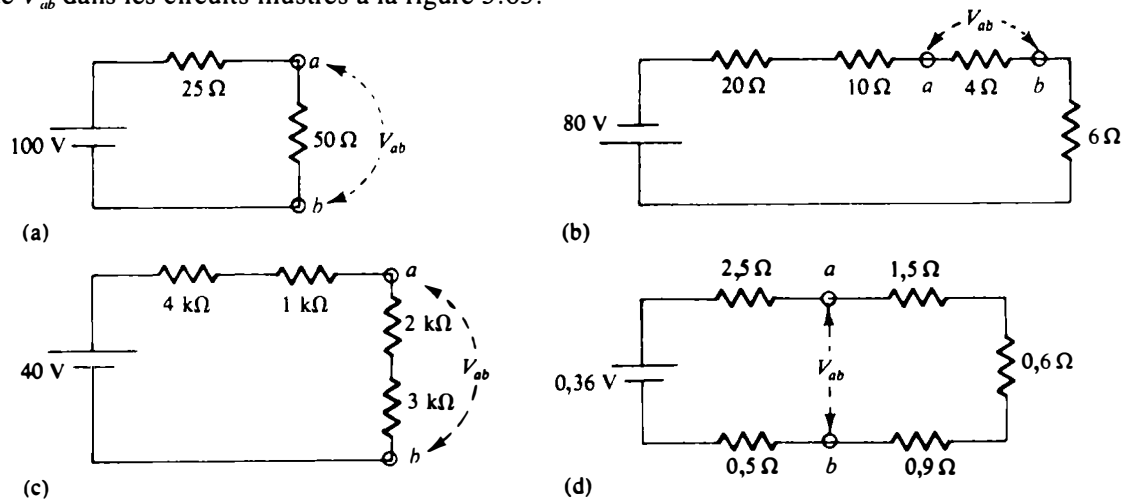


FIG. 5.63

10. Déterminez les quantités inconnues dans les circuits illustrés à la figure 5.64 à partir des renseignements donnés.



FIG. 5.64

Section 5.5

11. Déterminez la conductance totale et la résistance totale des circuits illustrés à la figure 5.65.

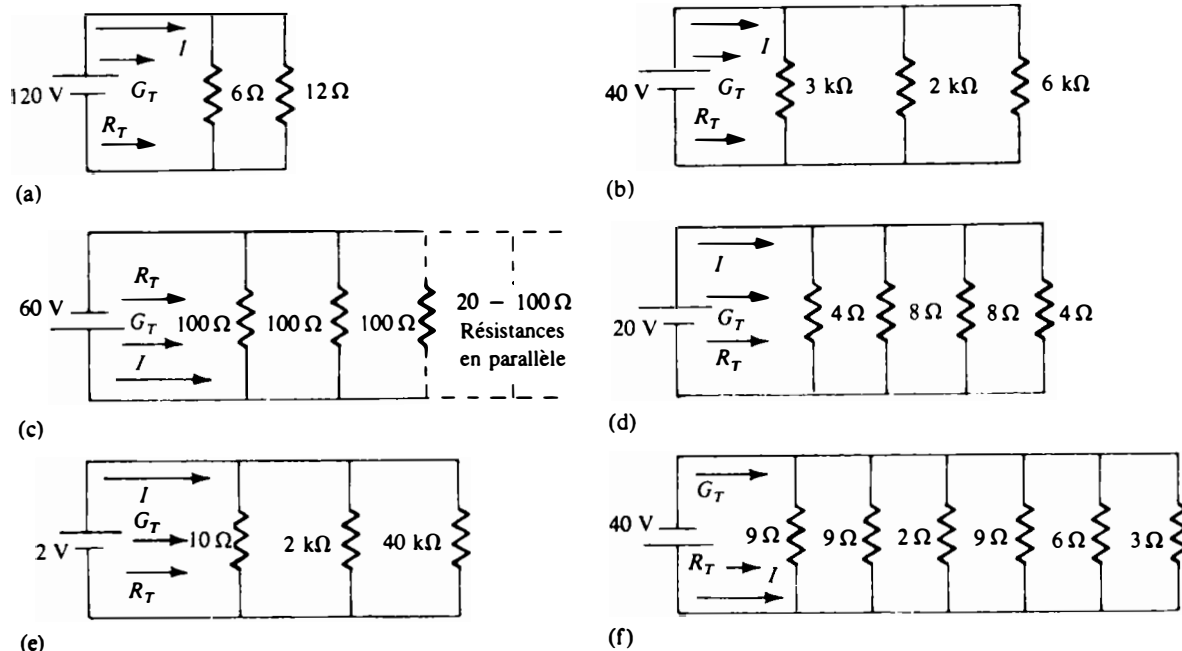


FIG. 5.65

12. Voir les réseaux illustrés à la figure 5.66. Déterminez la valeur en ohms des résistances inconnues (la conductance totale de chaque réseau est indiquée à la figure).

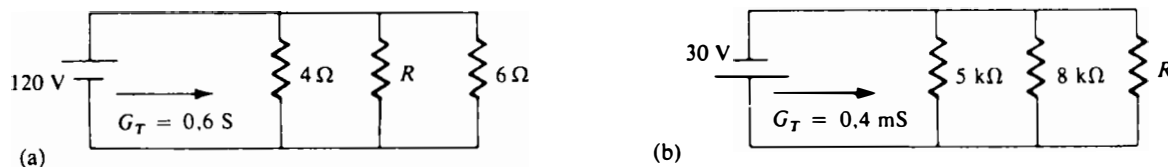


FIG. 5.66

13. Voir les circuits illustrés à la figure 5.67. Déterminez la valeur en ohms des résistances inconnues (la résistance totale des circuits est indiquée à la figure).

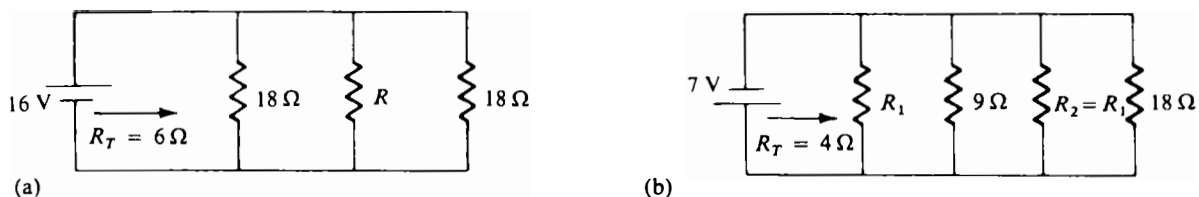


FIG. 5.67

Section 5.6

14. Déterminez l'intensité et le sens des courants inconnus dans les circuits illustrés à la figure 5.68.

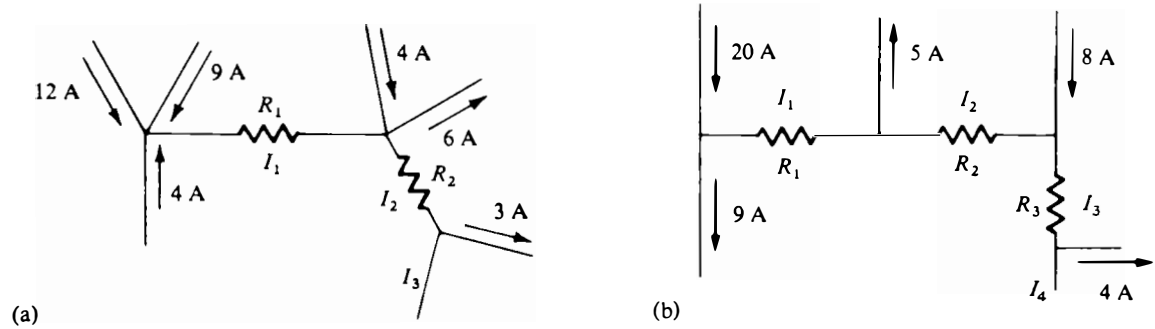


FIG. 5.68

15. Voir le réseau illustré à la figure 5.69.

- Déterminez la conductance totale et la résistance totale du réseau.
- Calculez  $I_T$  et le courant passant dans chacune des branches en parallèle.
- Vérifiez la loi des courants dans le cas d'un noeud.
- Calculez la puissance dissipée par chaque résistance et comparez la puissance fournie à la puissance dissipée.
- On a le choix d'utiliser des résistances de puissance nominale de 0,5 W, 1 W, 2 W et 50 W. Quelle puissance nominale minimale choisira-t-on pour chacune des résistances de ce circuit?

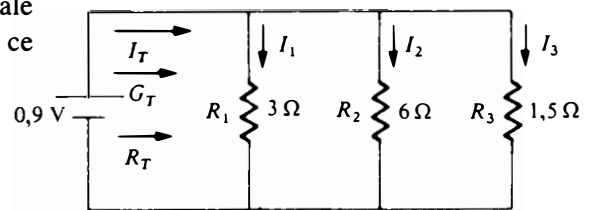


FIG. 5.69

\*16. Refaites le problème 15 pour le réseau illustré à la figure 5.69.

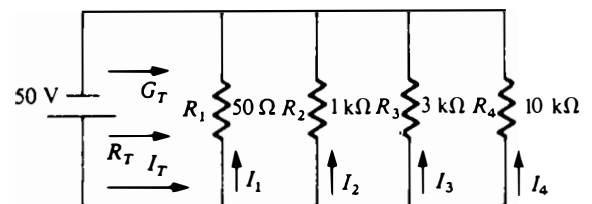


FIG. 5.70

\*17. Déterminez les quantités inconnues dans les circuits illustrés à la figure 5.71, à partir des renseignements donnés.

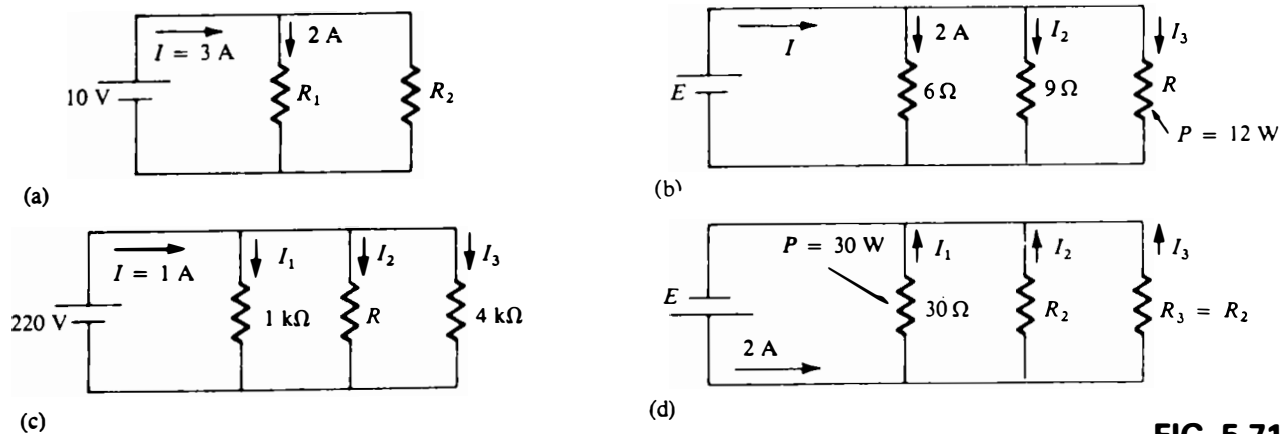


FIG. 5.71

18. Huit ampoules de sapin de Noël sont raccordées en parallèle, comme l'illustre la figure 5.72.
- Le jeu d'ampoules est branché sur une source de 120 V. Quel est le courant passant dans chacune d'elles, si leur résistance interne est de 1,8 k $\Omega$ ?
  - Déterminez la résistance totale du circuit.
  - Déterminez la puissance fournie à chacune des ampoules.
  - Une ampoule grille. Qu'arrive-t-il aux autres?
  - Comparez ce circuit à celui illustré à la figure 5.62. Quels sont les avantages et les inconvénients de chaque circuit?



FIG. 5.72

19. La figure 5.73 schématise une partie d'un circuit électrique domestique.
- Déterminez le courant passant dans chacune des branches parallèles du circuit.
  - Déterminez le courant débité par la source de 120 V. Le disjoncteur de 20 A s'ouvre-t-il?
  - Quelle est la résistance totale du circuit?
  - Déterminez la puissance fournie par la source de 120 V. Comment se compare-t-elle à la puissance totale de la charge?

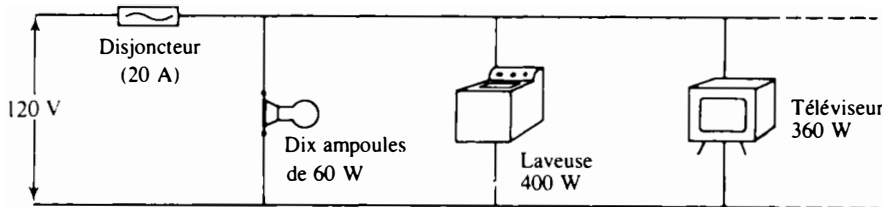


FIG. 5.73

Section 5.7

20. À l'aide de la règle du diviseur de courant, déterminez les courants inconnus dans les réseaux illustrés à la figure 5.74.

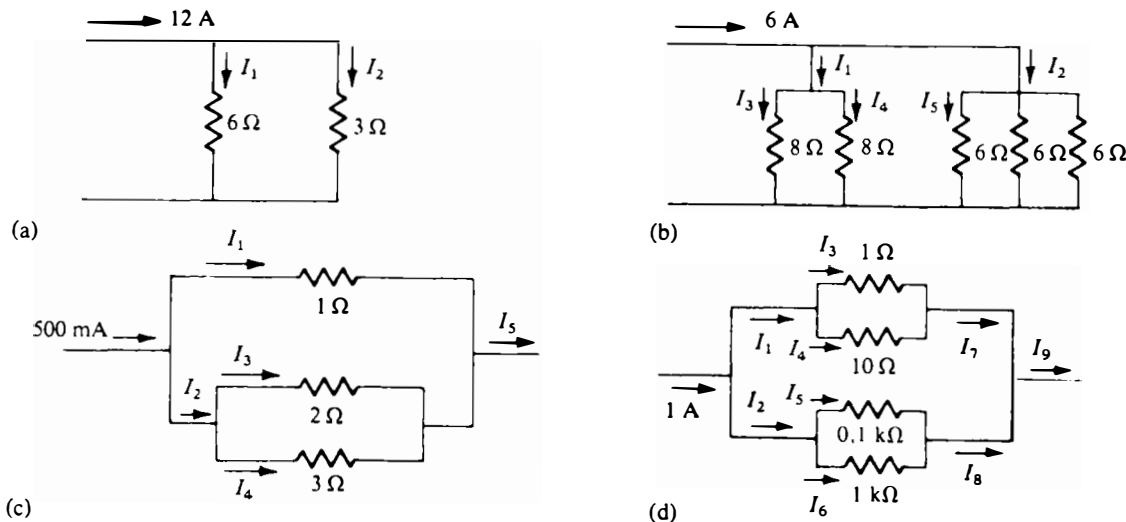


FIG. 5.74

21. Déterminez les quantités inconnues dans les réseaux illustrés à la figure 5.75, à partir des renseignements donnés.

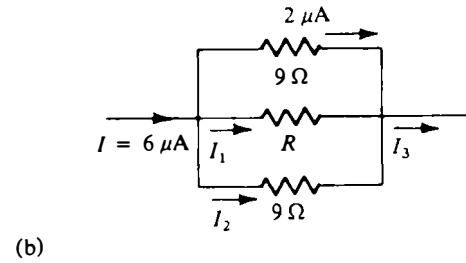
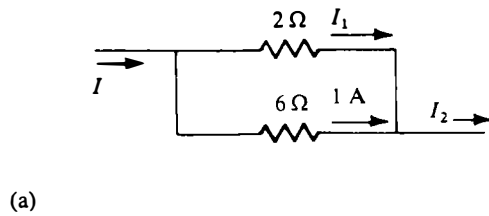


FIG. 5.75

Section 5.9

22. Simplifiez les circuits illustrés à la figure 5.76 en réduisant le plus possible le nombre de sources de tension.

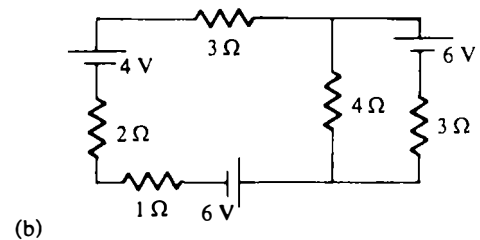
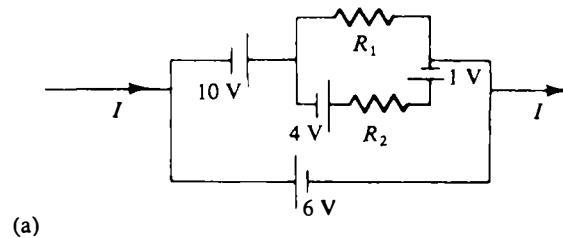


FIG. 5.76

Section 5.10

- 23. Calculez la résistance interne d'une batterie qui, en l'absence de toute charge, fournit une tension de sortie de 60 V et qui, en présence d'une charge de 28 Ω, débite un courant de 2 A.
- 24. Calculez la tension  $E_s$  et la perte de puissance dans la résistance interne de la boîte noire illustrée à la figure 5.77.

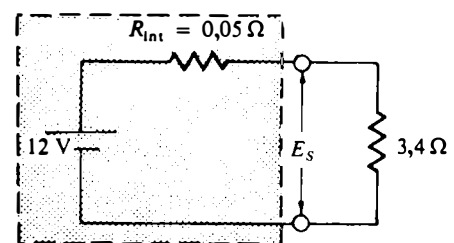


FIG. 5.77

- 25. Déterminez la résistance interne d'une batterie qui, en l'absence de toute charge, fournit une tension de 6 V et qui, en présence d'une charge de 0,5 kΩ débite un courant de 10 mA.

Section 5.11

- 26. Déterminez le taux de régulation de la batterie dont il est question au problème 23.
- 27. Déterminez le taux de régulation de la source illustrée à la figure 5.77.

## GLOSSAIRE

- Boucle** Toute partie d'un circuit formée de branches qui constitue un trajet quittant un point dans un sens et y revenant par un autre sens.
- Branche** Partie d'un circuit constituée d'un ou de plusieurs éléments montés en série.
- Circuit** Ensemble d'éléments reliés entre eux par des conducteurs offrant au moins un trajet fermé le long duquel peuvent circuler des charges.
- Circuit parallèle** Circuit dont les éléments ont deux points en commun.
- Circuit série** Circuit dont les éléments n'ont qu'un seul point en commun et dont les terminaisons ne sont pas raccordées à un autre élément.
- Court-circuit** Raccordement direct de très faible résistance modifiant considérablement les caractéristiques d'un élément ou d'un circuit.
- Loi des courants de Kirchhoff** Loi stipulant que la somme algébrique des courants qui arrivent à un noeud et des courants qui en partent est nulle.
- Loi des tensions de Kirchhoff** Loi stipulant que la somme algébrique des différences de potentiel sur un circuit fermé est nulle.
- Noeud** Point de jonction de deux ou plusieurs branches.
- Règle du diviseur de courant** Méthode de détermination de l'intensité des courants passant dans des éléments montés en parallèle, sans détermination préalable de la tension présente aux bornes de ces éléments.
- Règle du diviseur de tension** Méthode de détermination de la tension dans un circuit série, sans détermination préalable de l'intensité du courant passant dans le circuit.
- Résistance interne** Résistance inhérente à toute source d'énergie.
- Sens conventionnel du courant** Sens défini de l'écoulement des charges dans un circuit électrique, qui est l'opposé du sens de déplacement des électrons.
- Taux de régulation (VR)** Nombre (habituellement exprimé en pour cent) indiquant dans quelle mesure la tension de sortie d'une source varie en fonction de la charge.

# RÉSEAUX SÉRIE- PARALLÈLE

## 6.1 ANALYSE DES RÉSEAUX SÉRIE-PARALLÈLE

Une bonne compréhension des principes fondamentaux des circuits série et des circuits parallèle est tout ce que nécessite l'étude des réseaux série-parallèle, même les plus complexes, à *une* source de f.é.m. (un réseau série-parallèle est une combinaison d'éléments montés en série et d'éléments montés en parallèle). Les réseaux à plusieurs sources de f.é.m. seront étudiés aux chapitres 7 et 8.

En règle générale, l'analyse d'un réseau série-parallèle à courant continu se fait par étapes:

1. On prend d'abord connaissance des données du problème, puis on esquisse mentalement l'approche à suivre. Cette analyse préliminaire se traduira à coup sûr par une économie de temps et d'efforts.
2. En suivant l'approche choisie, on examine chacune des branches indépendamment avant de tenter de voir comment elles s'agencent pour former le réseau série-parallèle. On prévient ainsi de nombreuses erreurs qu'entraîne habituellement l'absence d'une approche systématique.
3. Une fois la solution obtenue, on s'assure de sa validité en comparant les grandeurs des sources de f.é.m. et des éléments du réseau. Si la solution semble douteuse, il y a lieu de refaire l'analyse au moyen d'une autre méthode, ou de vérifier attentivement chacune des étapes du travail ayant conduit à la solution.



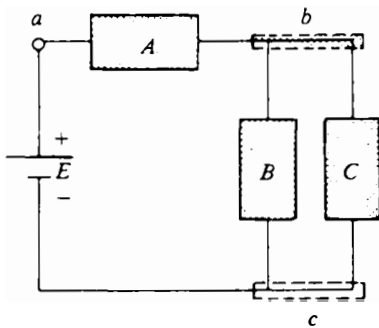


FIG. 6.1

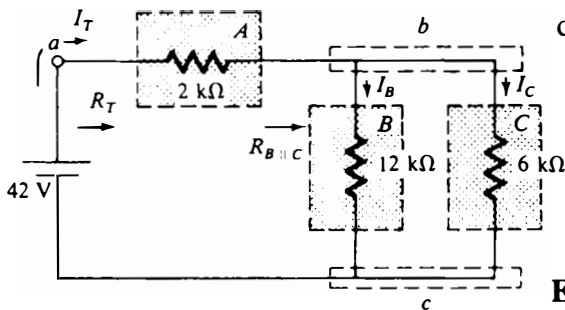


FIG. 6.2

À la figure 6.1, les boîtes noires  $B$  et  $C$  sont montées en parallèle (les points  $b$  et  $c$  étant communs) et la source de tension  $E$  est en série avec la boîte noire  $A$  (le point  $a$  étant commun). Le montage parallèle des boîtes  $B$  et  $C$  est en série avec la source  $E$  et la boîte  $A$ , les points communs étant respectivement les points  $b$  et  $c$ . Supposons maintenant que les boîtes noires ne contiennent que des résistances (figure 6.2).

Pour déterminer le courant débité par la source et, par conséquent, les courants des branches, il faut d'abord calculer la résistance totale du réseau. La méthode la plus directe consiste à déterminer en premier la résistance de chaque branche et, ensuite, la résistance des combinaisons en série et en parallèle des branches.

**EXEMPLE 6.1** Les branches du réseau illustré à la figure 6.2 ne sont constitués que d'une résistance; nous avons donc:

$$R_A = 2 \text{ k}\Omega \quad R_B = 12 \text{ k}\Omega \quad R_C = 6 \text{ k}\Omega$$

Pour rendre notre analyse aussi claire et transparente que possible, adoptons la notation suivante:

$$R_{x \parallel y} = R_x \parallel R_y = \frac{R_x R_y}{R_x + R_y}$$

$$R_{x,y} = R_x + R_y$$

La résistance totale est:

$$R_T = R_A + R_{B \parallel C} = 2 \text{ k}\Omega + \frac{(12 \text{ k}\Omega)(6 \text{ k}\Omega)}{12 \text{ k}\Omega + 6 \text{ k}\Omega}$$

$$= 2 \text{ k}\Omega + 4 \text{ k}\Omega$$

$$= 6 \text{ k}\Omega$$

et l'intensité du courant total est:

$$I_T = \frac{E}{R_T} = \frac{42}{6 \text{ k}\Omega} = 7 \text{ mA}$$

$$I_A = I_T = 7 \text{ mA}$$

Pour déterminer  $I_B$  et  $I_C$ , nous avons recours à la règle du diviseur de courant:

$$I_B = \frac{6 \text{ k}\Omega (I_T)}{6 \text{ k}\Omega + 12 \text{ k}\Omega} = \frac{6}{18} I_T = \frac{1}{3} (7) = 2\frac{1}{3} \text{ mA}$$

$$I_C = \frac{12 \text{ k}\Omega (I_T)}{12 \text{ k}\Omega + 6 \text{ k}\Omega} = \frac{12}{18} I_T = \frac{2}{3} (7) = 4\frac{2}{3} \text{ mA}$$

ou encore:

$$I_C = I_T - I_B = 7 - 2\frac{1}{3} = \frac{21}{3} - \frac{7}{3} = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3} \text{ mA}$$

**EXEMPLE 6.2** Supposons maintenant que nos boîtes noires contiennent des résistances montées en série et en parallèle (figure 6.3). Alors:

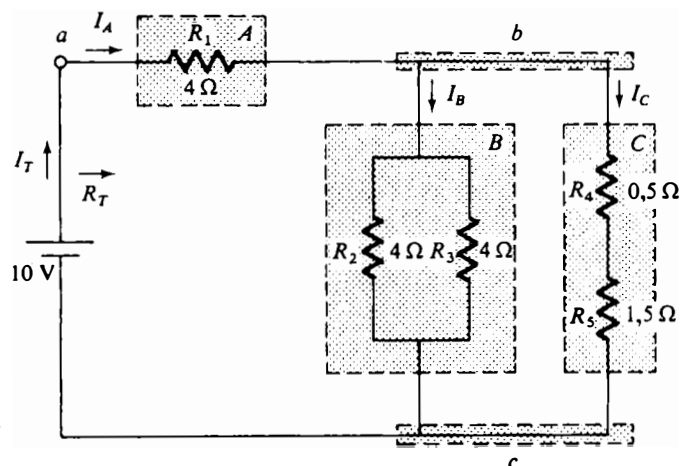


FIG. 6.3

$$R_A = 4 \Omega$$

$$R_B = R_2 \parallel R_3 = R_{2 \parallel 3} = \frac{R}{N} = \frac{4}{2} = 2 \Omega$$

$$R_C = R_4 + R_5 = R_{4,5} = 0,5 + 1,5 = 2 \Omega$$

de sorte que:

$$R_{B \parallel C} = \frac{R}{N} = \frac{2}{2} = 1 \Omega$$

où:

$$R_T = R_A + R_{B \parallel C} \quad (\text{À noter la similarité entre cette équation et celle de l'exemple 6.1})$$

$$= 4 + 1 = 5 \Omega$$

et:

$$I_T = \frac{E}{R_T} = \frac{10}{5} = 2 \text{ A}$$

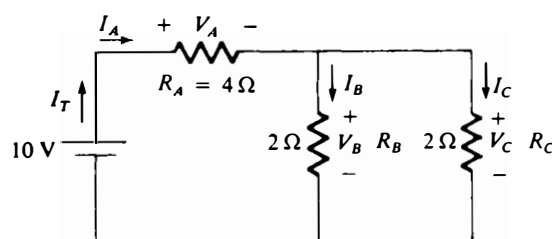


FIG. 6.4

Pour déterminer les courants  $I_A$ ,  $I_B$  et  $I_C$ , simplifions le réseau de la façon indiquée à la figure 6.4:

$$I_A = I_T = 2 \text{ A}$$

et:

$$I_B = I_C = \frac{I_A}{2} = \frac{I_T}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ A}$$

Dans le réseau illustré à la figure 6.3, nous avons donc:

$$I_{R_2} = I_{R_3} = \frac{I_B}{2} = 0,5 \text{ A}$$

et, au moyen de l'une ou l'autre des figures, nous trouvons les tensions  $V_A$ ,  $V_B$  et  $V_C$ :

$$V_A = I_A R_A = (2)(4) = 8 \text{ V}$$

$$V_B = I_B R_B = (1)(2) = 2 \text{ V}$$

$$V_C = V_B = 2 \text{ V}$$



Vérifions finalement ces résultats au moyen de la loi des tensions. Dans le cas de la boucle gauche du réseau illustré à la figure 6.4, nous avons:

$$\sum_{\circlearrowleft} V = E - V_A - V_B = 0$$

ou:

$$E = V_A + V_B = 8 + 2$$

$$10 = 10$$

**EXEMPLE 6.3** La figure 6.5 représente une autre variante du réseau illustré à la figure 6.1. Dans ce cas, nous avons:

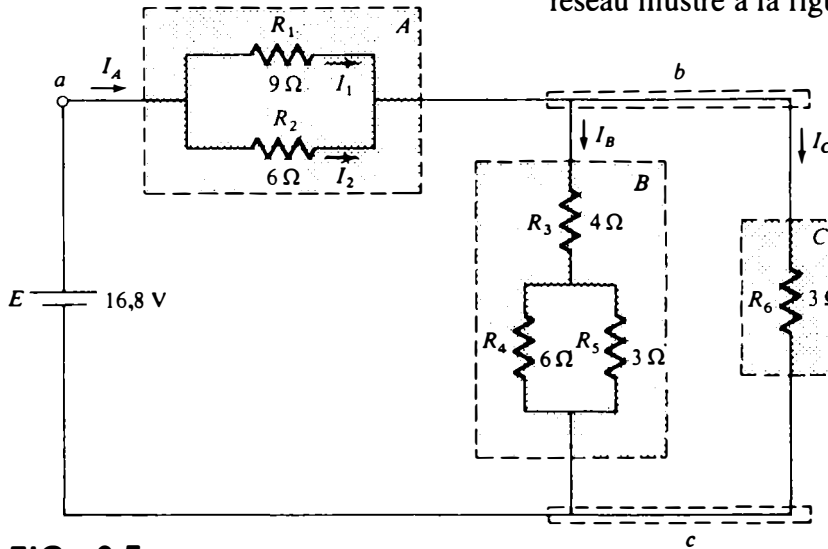


FIG. 6.5

$$R_A = R_{1 \parallel 2} = \frac{(9)(6)}{9 + 6} = \frac{54}{15} = 3,6 \Omega$$

$$R_B = R_3 + R_{4 \parallel 5} = 4 + \frac{(6)(3)}{6 + 3} = 4 + 2 = 6 \Omega$$

$$R_C = 3 \Omega$$

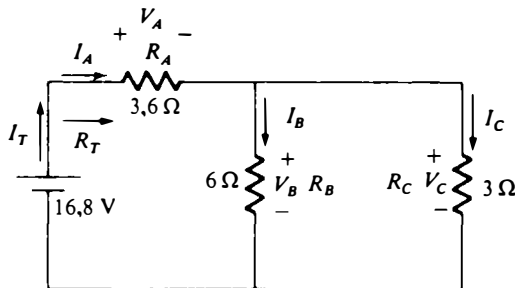


FIG. 6.6

Le réseau simplifié est représenté à la figure 6.6. À noter que la configuration des réseaux des figures 6.6, 6.4 et 6.2 est la même.

$$R_T = R_A + R_{B \parallel C}$$

$$= 3,6 + \frac{(6)(3)}{6 + 3} = 3,6 + 2 = 5,6 \Omega$$

$$I_T = \frac{E}{R_T} = \frac{16,8}{5,6} = 3 \text{ A}$$

$$I_A = I_T = 3 \text{ A}$$

La règle du diviseur de courant permet d'écrire:

$$I_B = \frac{R_C(I_A)}{R_C + R_B} = \frac{3(3)}{3 + 6} = \frac{9}{9} = 1 \text{ A}$$

La loi des courants donne d'autre part:

$$I_C = I_A - I_B = 3 - 1 = 2 \text{ A}$$



et la loi d'Ohm:

$$V_A = I_A R_A = (3)(3,6) = 10,8 \text{ V}$$

$$V_B = I_B R_B = V_C = I_C R_C = (2)(3) = 6 \text{ V}$$

Revenons à notre réseau d'origine (figure 6.5); nous avons:

$$I_1 = \frac{R_2(I_A)}{R_2 + R_1} = \frac{6(3)}{6 + 9} = \frac{18}{15} = 1,2 \text{ A}$$

Appliquons la loi des courants:

$$I_2 = I_A - I_1 = 3 - 1,2 = 1,8 \text{ A}$$

et vérifions nos résultats au moyen de la loi des tensions. Dans le cas de la boucle gauche du réseau simplifié illustré à la figure 6.6, nous avons:

$$\begin{aligned} \sum \circ V &= E - V_A - V_B = 0 \\ E &= V_A + V_B \\ 16,8 &= 10,8 + 6 \\ 16,8 &= 16,8 \end{aligned}$$

La figure 6.1 ne représente que l'une des infinies configurations possibles d'un réseau. Les boîtes noires peuvent être beaucoup plus nombreuses, être agencées différemment, etc. Mais peu importe la complexité d'un réseau donné, notre méthode d'analyse restera la même: examiner chacune des branches indépendamment d'abord, avant de tenter de voir comment elles s'agencent pour former le réseau. Cette méthode s'assimilant le mieux à force d'exemples et de problèmes, nous donnons une série d'exemples supplémentaires à la section qui suit.

## 6.2 EXEMPLES SUPPLÉMENTAIRES

**EXEMPLE 6.4** Déterminer la tension  $V_2$  et le courant  $I_4$  dans le réseau illustré à la figure 6.7.

*Solution:* Les trois branches du réseau étant en parallèle (voir la figure 6.8: les points  $a$  et  $b$  sont communs), la tension aux bornes de chacune est la f.é.m.  $E$  de la source:

$$R'_T = R_2 \parallel R_3 = 3 \parallel 4 = \frac{3(4)}{3 + 4} = \frac{12}{7} = 1,71 \Omega$$

La loi d'Ohm donne:

$$I_4 = \frac{E}{R_4} = \frac{12}{8} = 1,5 \text{ A}$$

et la règle du diviseur de tension:

$$V_2 = \frac{(1,71)(12)}{1,71 + 4} = \frac{20,52}{5,71} = 3,6 \text{ V}$$

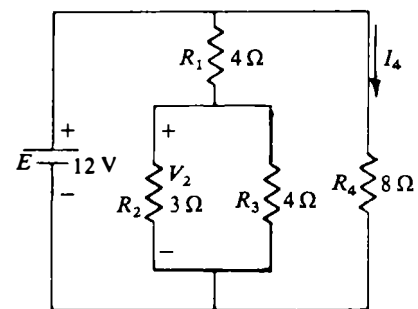


FIG. 6.7

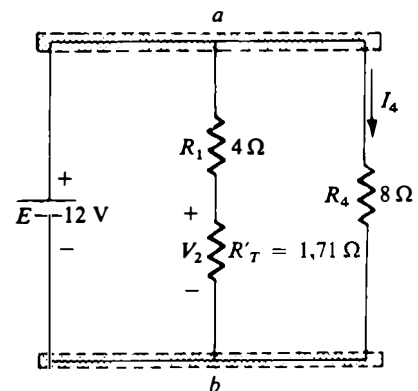


FIG. 6.8

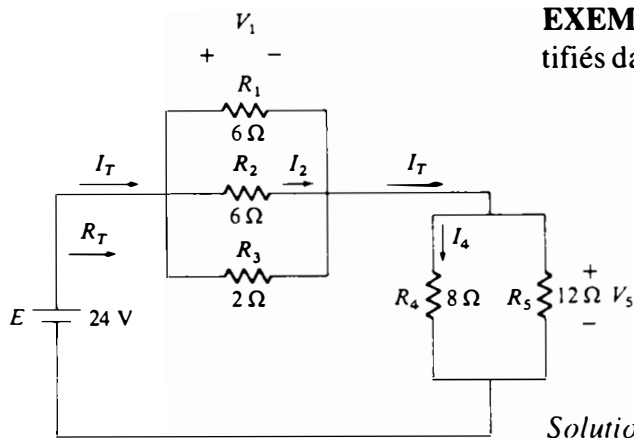


FIG. 6.9

**EXEMPLE 6.5** Déterminer les courants et les tensions identifiés dans le réseau illustré à la figure 6.9.

Solution:

$$R_{1 \parallel 2} = \frac{R}{N} = \frac{6}{2} = 3 \Omega$$

$$R_{1 \parallel 2 \parallel 3} = \frac{(3)(2)}{3 + 2} = \frac{6}{5} = 1,2 \Omega$$

$$R_{4 \parallel 5} = \frac{(8)(12)}{8 + 12} = \frac{96}{20} = 4,8 \Omega$$

La figure 6.10 représente le réseau simplifié; dans ce réseau, nous avons:

$$R_T = R_{1 \parallel 2 \parallel 3} + R_{4 \parallel 5} = 1,2 + 4,8 = 6 \Omega$$

$$I_T = \frac{E}{R_T} = \frac{24}{6} = 4 \text{ A}$$

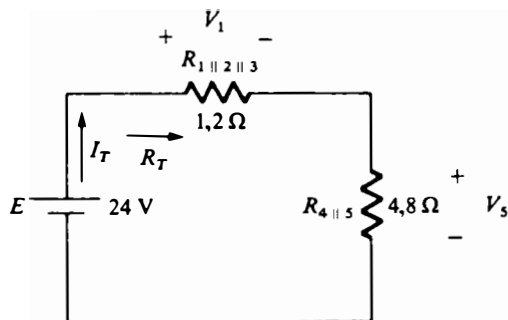


FIG. 6.10

et:

$$V_1 = I_T R_{1 \parallel 2 \parallel 3} = (4)(1,2) = 4,8 \text{ V}$$

$$V_5 = I_T R_{4 \parallel 5} = (4)(4,8) = 19,2 \text{ V}$$

Appliquons maintenant la règle du diviseur de courant au réseau original (figure 6.9):

$$I_4 = \frac{R_5(I_T)}{R_5 + R_4} = \frac{12(4)}{12 + 8} = \frac{48}{20} = 2,4 \text{ A}$$

Pour déterminer  $I_2$ , considérons la figure 6.11:

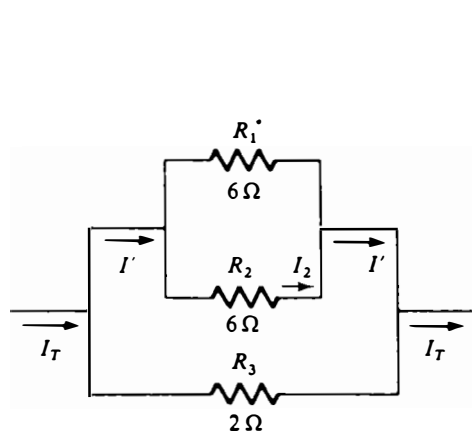
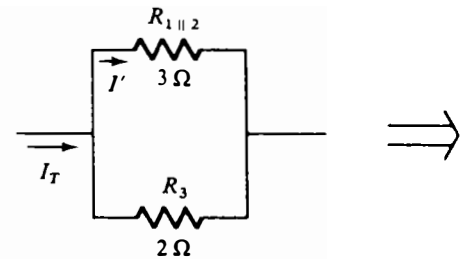


FIG. 6.11



$$I' = \frac{R_3(I_T)}{R_3 + R_{1 \parallel 2}} = \frac{2(4)}{2 + 3} = \frac{8}{5} = 1,6 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{I'}{2} = \frac{1,6}{2} = 0,8 \text{ A}$$

**EXEMPLE 6.6** Déterminer les tensions  $V_1$  et  $V_{ab}$  dans le réseau illustré à la figure 6.12.

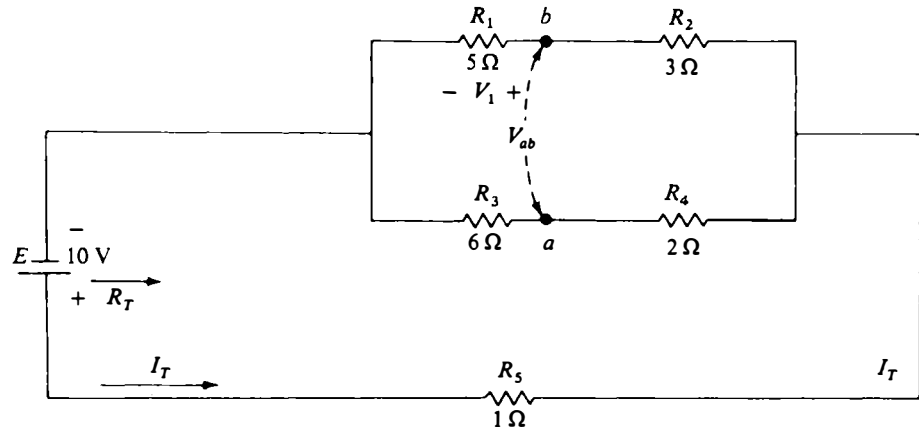


FIG. 6.12

*Solution:*

$$R_{1,2} = R_1 + R_2 = 5 + 3 = 8 \Omega$$

$$R_{3,4} = R_3 + R_4 = 6 + 2 = 8 \Omega$$

Redessinons le réseau de la façon indiquée à la figure 6.13; nous avons:

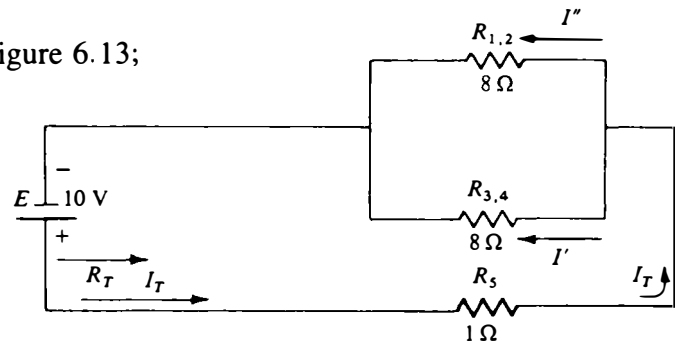


FIG. 6.13

$$R_T = R_5 + R_{3,4} \parallel R_{1,2} = 1 + \frac{8}{2} = 1 + 4 = 5 \Omega$$

où:

$$I_T = \frac{E}{R_T} = \frac{10}{5} = 2 \text{ A}$$

$$I' = I'' = \frac{I_T}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ A}$$

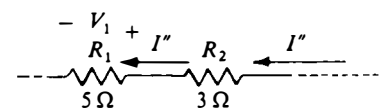


FIG. 6.14

Pour  $V_1$ , nous avons (figure 6.14):

$$V_1 = I'' \cdot R_1 = (1)(5) = 5 \text{ V}$$

Nous pouvons ensuite déterminer  $V_{ab}$  en appliquant la loi des tensions à la boucle indiquée à la figure 6.15:

$$+V_{ab} - I'(6) + V_1 = 0$$

ou:

$$V_{ab} = I'(6) - V_1$$

$$= (1)(6) - 5$$

$$V_{ab} = 1 \text{ V}$$

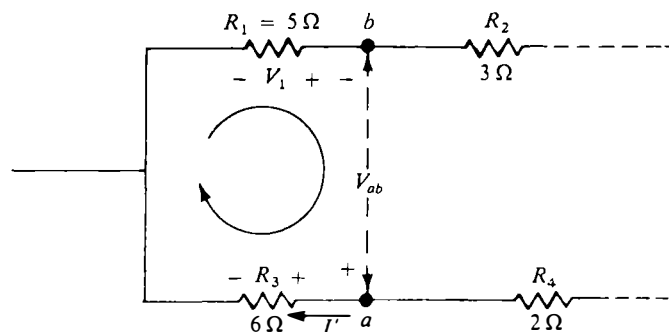


FIG. 6.15

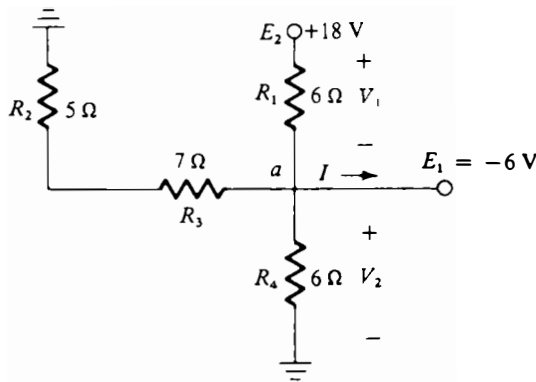


FIG. 6.16

**EXEMPLE 6.7:** Voir le réseau illustré à la figure 6.16. Déterminer les tensions  $V_1$  et  $V_2$  ainsi que le courant  $I$ .

*Solution:* Le circuit équivalent est représenté à la figure 6.17. À noter la mise à la masse commune et l'utilisation de sources de f.é.m. pour remplacer les tensions aux bornes du circuit.

De la figure 6.17, nous avons:

$$V_2 = -6 \text{ V}$$

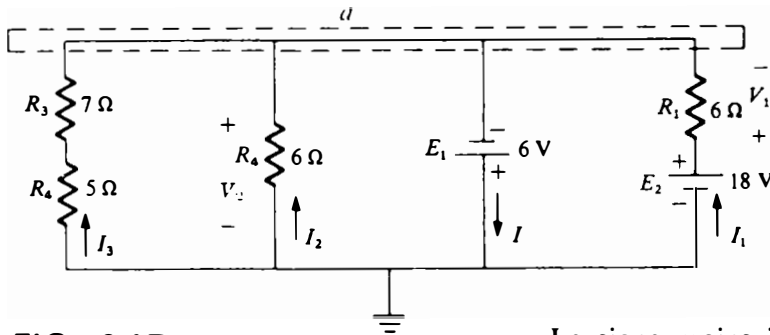


FIG. 6.17

Le signe moins indique que la polarité choisie pour  $V_2$  à la figure 6.16 est l'opposé de la polarité réelle. Appliquons la loi des tensions à la boucle droite du réseau illustré à la figure 6.17; nous obtenons:

$$+18 - V_1 + 6 = 0$$

$$V_1 = 6 + 18 = 24 \text{ V}$$

Par ailleurs, l'application de la loi des courants à la boucle  $a$  donne:

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

$$= \frac{V_1}{R_1} + \frac{E_1}{R_4} + \frac{E_1}{(R_2 + R_3)}$$

$$= \frac{24}{6} + \frac{6}{6} + \frac{6}{12}$$

$$= 4 + 1 + 0,5$$

$$I = 5,5 \text{ A}$$

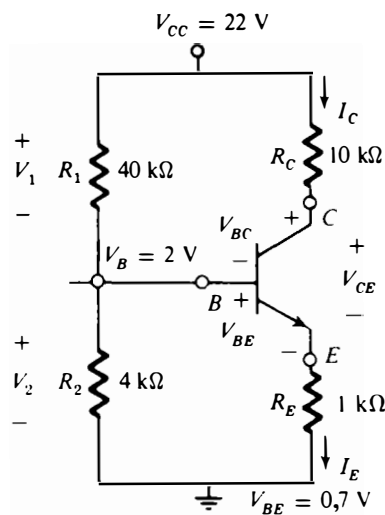


FIG. 6.18

**EXEMPLE 6.8** Voir le circuit à transistor illustré à la figure 6.18.

- Déterminer la tension  $V_E$  et le courant  $I_E$ .
- Calculer  $V_1$ .
- Déterminer  $V_{BC}$  à l'aide de l'approximation  $I_C = I_E$ .
- Calculer  $V_{CE}$  à partir des résultats obtenus.

*Solution:*

a. Nous avons (figure 6.18):

$$V_2 = V_B = 2 \text{ V}$$

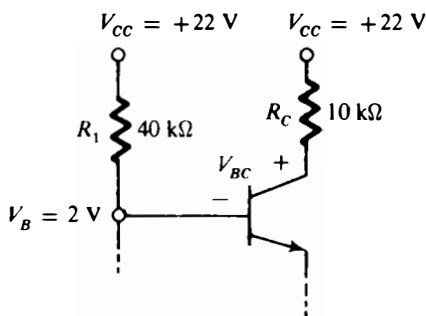


FIG. 6.19

La loi des tensions appliquées à la boucle est:

$$V_2 - V_{BE} - V_E = 0$$

ou:

$$V_E = V_2 - V_{BE} = 2 - 0.7 = 1,3 \text{ V}$$

et:

$$I_E = \frac{V_E}{R_E} = \frac{1.3}{1000} = 1,3 \text{ mA}$$

- b. Fractionnons la source de 22 V, comme l'illustre la figure 6.19, et redessignons la section d'intérêt comme à la figure 6.20. La loi de Kirchhoff donne:

$$V_{CC} - V_1 - V_B = 0$$

ou:

$$V_1 = V_{CC} - V_B = 22 - 2 = 20 \text{ V}$$

- c. Redessignons la partie qui nous intéresse, comme l'illustre la figure 6.21. La loi des tensions donne:

$$V_B + V_{BC} + V_C - V_{CC} = 0$$

ou:

$$V_{BC} = V_{CC} - V_C - V_B$$

Enfin, nous obtenons:

$$V_C = I_C R_C = (1,3 \text{ mA})(10 \text{ k}\Omega) = 13 \text{ V}$$

et:

$$V_{BC} = 22 - 13 - 2 = 7 \text{ V}$$

- d. La partie appropriée est représentée à la figure 6.22. La loi des tensions donne:

$$V_E + V_{CE} + V_C = V_{CC}$$

ou:

$$\begin{aligned} V_{CE} &= V_{CC} - V_C - V_E \\ &= 22 - 13 - 1,3 = 7,7 \text{ V} \end{aligned}$$

Nous constatons qu'il n'est pas nécessaire de connaître les caractéristiques de fonctionnement du transistor pour procéder à l'analyse du circuit (sauf le fait que  $I_C = I_E$ ).

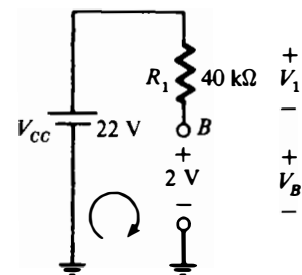


FIG. 6.20

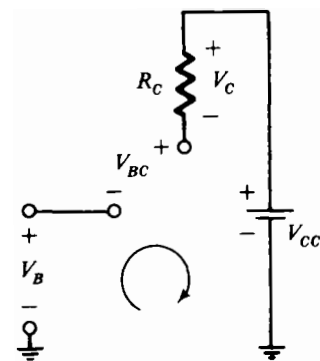


FIG. 6.21

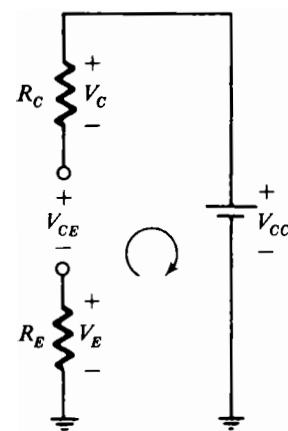


FIG. 6.22





**EXEMPLE 6.9** Déterminer les tensions et les courants indiqués sur le réseau illustré à la figure 6.23.

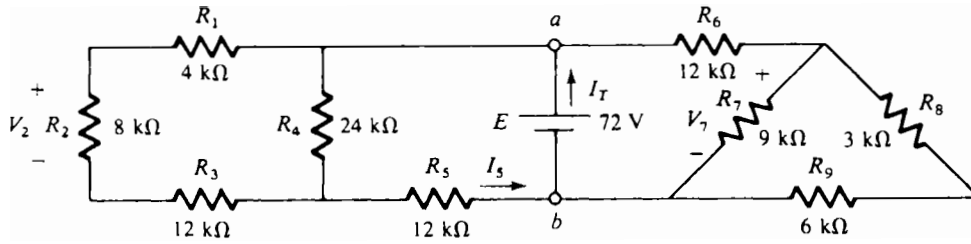


FIG. 6.23

*Solution:* Redessinons le réseau en groupant les éléments en série (figure 6.24); nous avons alors:

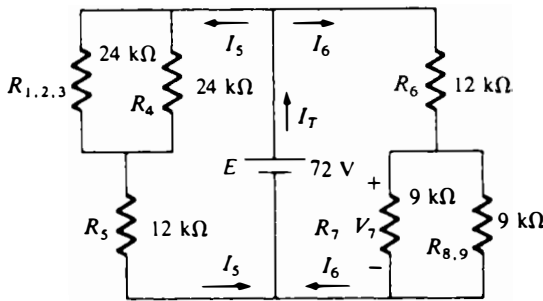


FIG. 6.24

$$I_5 = \frac{E}{R_{1,2,3 \parallel 4} + R_5} = \frac{72}{12 \text{ k}\Omega + 12 \text{ k}\Omega} = \frac{72}{24 \text{ k}\Omega} = 3 \text{ mA}$$

$$V_7 = \frac{(R_7 \parallel_{8,9})E}{R_7 \parallel_{8,9} + R_6} = \frac{4,5 \text{ k}\Omega(72)}{4,5 \text{ k}\Omega + 12 \text{ k}\Omega} = \frac{324}{16,5} = 19,6 \text{ V}$$

$$I_6 = \frac{V_7}{R_7 \parallel_{8,9}} = \frac{19,6}{4,5 \text{ k}\Omega} = 4,35 \text{ mA}$$

et:

$$I_T = I_5 + I_6 = 3 + 4,35 = 7,35 \text{ mA}$$

Puisque la différence de potentiel entre les points *a* et *b* (figure 6.23) est maintenue constante à *E*, les parties droite et gauche du réseau peuvent être séparées, comme l'illustre la figure 6.25.

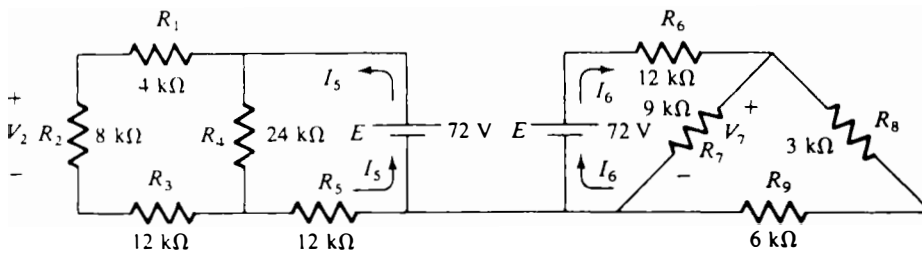


FIG. 6.25

Nous pouvons dès lors trouver les tensions et les courants demandés en analysant chacune des parties indépendamment, à l'exception de  $I_T$  qui ne sera déterminé qu'une fois connus les courants débités par la source dans chaque partie du réseau ( $I_T = I_5 + I_6$ ).

### 6.3 RÉSEAUX EN ÉCHELLE

La figure 6.26 représente un *réseau en échelle*, ainsi appelé pour des raisons évidentes. L'analyse d'un tel réseau peut se faire au moyen de deux méthodes.

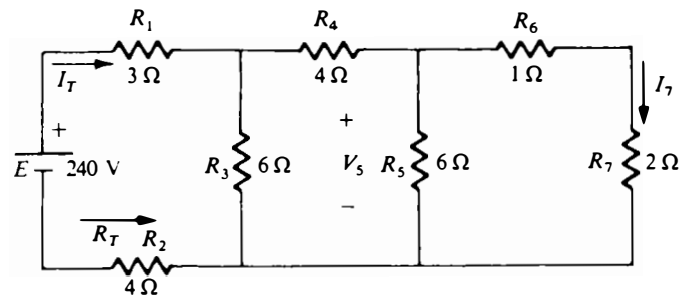


FIG. 6.26

**Première méthode**

On commence par calculer la résistance totale et consécutivement le courant débité par la source, puis on développe à rebours le réseau pour déterminer les inconnues demandées. Cette méthode est employée ci-dessous pour la détermination de  $V_5$  et  $I_7$ .

Simplifions d'abord le réseau en regroupant les éléments en série et en parallèle (figures 6.27 et 6.28), ce qui permet d'écrire:

$$R_T = 3 + 3 + 4 = 10 \Omega$$

$$I_T = \frac{E}{R_T} = \frac{240}{10} = 24 \text{ A}$$

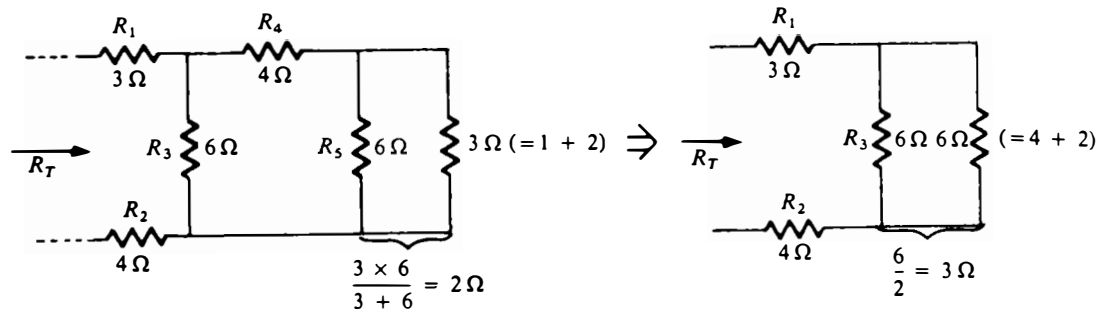


FIG. 6.27

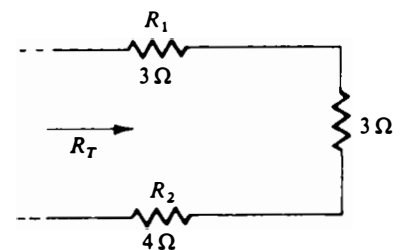


FIG. 6.28

Développons à rebours le réseau pour faire apparaître  $V_5$  et  $I_7$  (figure 6.29); nous avons alors:

$$I_4 = \frac{I_T}{2} = \frac{24}{2} = 12 \text{ A}$$

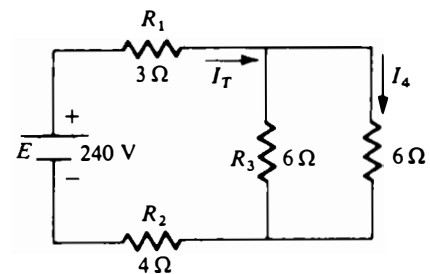


FIG. 6.29

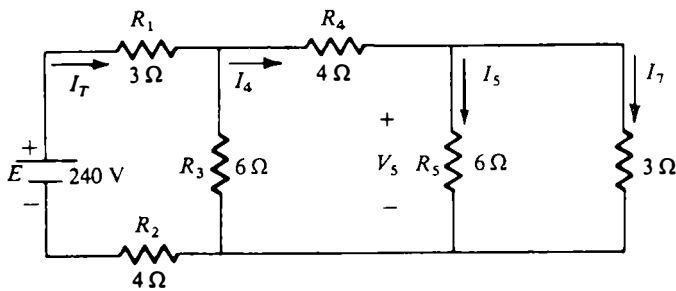


FIG. 6.30

et, finalement (figure 6.30):

$$I_5 = \frac{3I_4}{3 + 6} = \frac{1}{3}(12) = 4 \text{ A}$$

et:

$$V_5 = I_5 R_5 = 4 \times 6 = 24 \text{ V}$$

$$I_7 = I_4 - I_5 = 12 - 4 = 8 \text{ A}$$

### Deuxième méthode

Il s'agit d'exprimer tous les courants, y compris celui que l'on cherche, en fonction du courant qui parcourt la dernière branche du réseau en échelle. Ensuite, on remonte vers la source, courant par courant. Le courant cherché se détermine alors directement à partir de la tension de la source. Nous illustrons cette méthode en faisant appel au réseau précédent, redessiné à la figure 6.31.

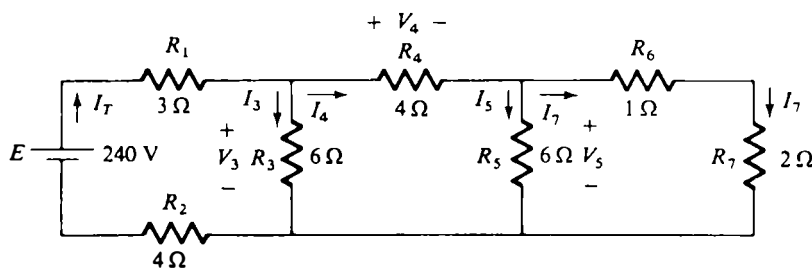


FIG. 6.31

Le courant qui parcourt la dernière branche est  $I_7$ :

$$I_7 = \frac{V_5}{R_6 + R_7} = \frac{V_5}{(1 + 2)} = \frac{V_5}{3}$$

ou:

$$V_5 = 3I_7$$

de sorte que:

$$I_5 = \frac{V_5}{R_5} = \frac{3I_7}{6} = 0,5I_7$$

et:

$$I_4 = I_5 + I_7 = 0,5I_7 + I_7 = 1,5I_7$$

$$V_4 = I_4 R_4 = (1,5I_7)4 = 6I_7$$



De plus:

$$V_3 = V_4 + V_5 = 6I_7 + 3I_7 = 9I_7$$

de sorte que:

$$I_3 = \frac{V_3}{R_3} = \frac{9I_7}{6} = 1,5I_7$$

et:

$$I_T = I_3 + I_4 = 1,5I_7 + 1,5I_7 = 3I_7$$

$$V_1 = I_1 R_1 = I_T R_1 = 3I_7$$

Enfin, nous obtenons:

$$\begin{aligned} E &= V_1 + V_3 + V_2 = 3I_7 + 9I_7 + 4I_7 \\ &= 7I_7 + 9I_7 = 7(3I_7) + 9I_7 \end{aligned}$$

$$E = 30I_7$$

et:

$$I_7 = \frac{E}{30} = \frac{240}{30} = 8 \text{ A}$$

## PROBLÈMES

### Section 6.2

1. Voir le réseau illustré à la figure 6.32.
  - a. L'énoncé  $I = I_3 = I_6$  est-il vrai? Expliquez.
  - b. Soit  $I = 5 \text{ A}$  et  $I_1 = 2 \text{ A}$ ; calculez  $I_2$ .
  - c. L'énoncé  $I_1 + I_2 = I_4 + I_5$  est-il vrai? Expliquez.
  - d. Soit  $V_1 = 6 \text{ V}$  et  $E = 10 \text{ V}$ ; calculez  $V_2$ .
  - e. Soit  $R_1 = 3 \Omega$ ,  $R_2 = 2 \Omega$ ,  $R_3 = 4 \Omega$ ; calculez  $R_7$ .
  - f. Pour les valeurs ohmiques ci-dessus et pour  $E = 10 \text{ V}$ , quelle est la valeur de  $I$  en ampères?
  - g. Dans les mêmes conditions, calculez la puissance fournie par la batterie  $E$  ainsi que la puissance dissipée dans les résistances  $R_1$  et  $R_2$ .

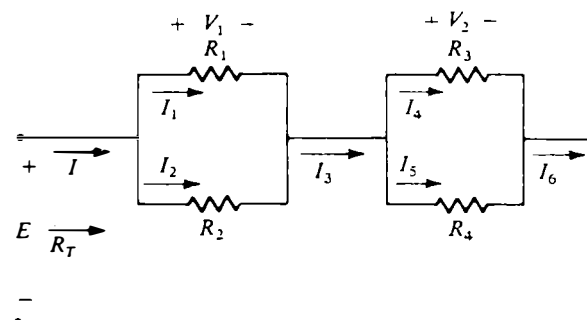


FIG. 6.32



2. Voir le réseau illustré à la figure 6.33.
  - a. Calculez  $R_T$ .
  - b. Déterminez  $I$  et  $I_1$ .
  - c. Calculez  $V_3$ .

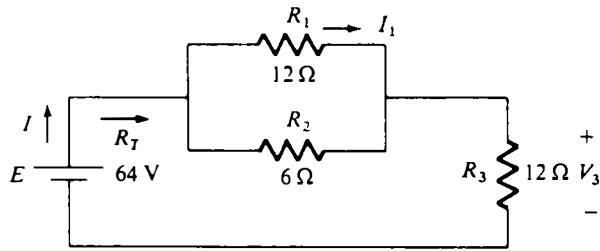


FIG. 6.33

3. Voir le réseau illustré à la figure 6.34.
  - a. Déterminez la chute de tension aux bornes de chaque résistance et la polarité de ces chutes.
  - b. Calculez  $I$  et  $I_1$ .
  - c. Calculez  $I_3$  et  $I_4$ .
  - d. Quelle est la puissance fournie à la résistance de  $5\ \Omega$ ?
  - e. Déterminez la tension  $V_{ab}$ .

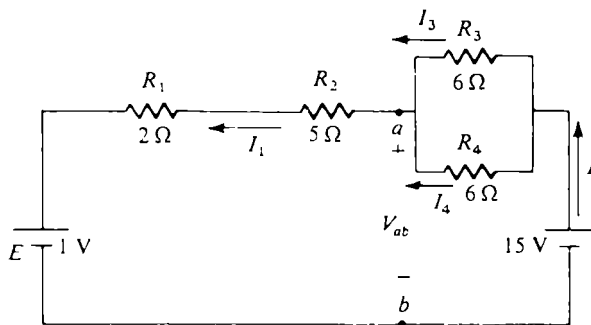


FIG. 6.34

4. Voir le réseau illustré à la figure 6.35.
  - a. Calculez  $I$ .
  - b. Déterminez  $V_4$ .
  - c. Déterminez  $V_{ab}$ .

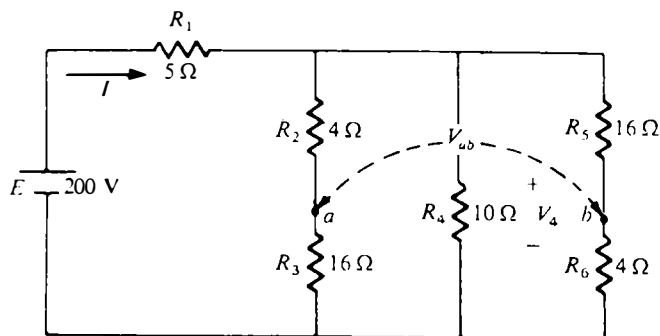


FIG. 6.35



5. Voir le réseau illustré à la figure 6.36.
  - a. Déterminez le courant  $I_1$ .
  - b. Calculez les courants  $I_2$  et  $I_3$ .
  - c. Déterminez les tensions  $V_A$  et  $V_B$ .

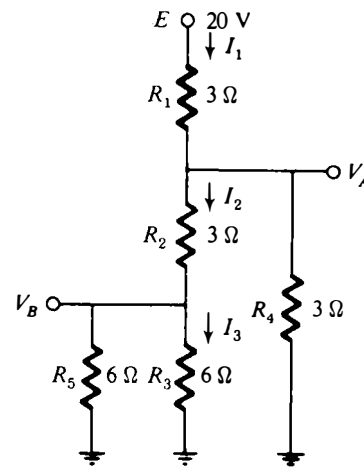


FIG. 6.36

6. Voir le réseau illustré à la figure 6.37.
  - a. Déterminez  $V_{ab}$ ,  $V_{bc}$  et  $V_{cd}$  au moyen de la règle du diviseur de tension.
  - b. Calculez  $I_3$  et  $I_6$ .
  - c. Déterminez la puissance fournie à chaque résistance de 12 kΩ.

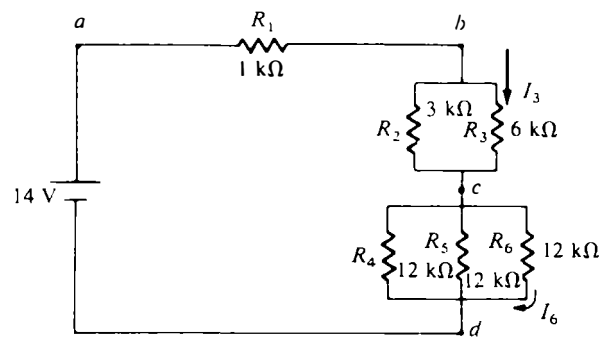


FIG. 6.37

7. Voir le réseau illustré à la figure 6.38.
  - a. Calculez  $I$  et  $I_6$ .
  - b. Déterminez  $V_1$  et  $V_5$ .
  - c. Calculez la puissance fournie à la résistance de 6 kΩ.

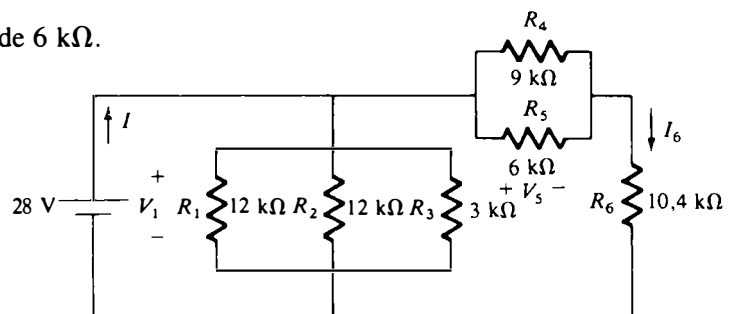


FIG. 6.38

8. Voir le réseau série-parallèle illustré à la figure 6.39.
  - a. Déterminez  $I$ .
  - b. Déterminez  $I_3$  et  $I_9$ .
  - c. Calculez  $I_8$ .
  - d. Calculez  $V_{ab}$ .

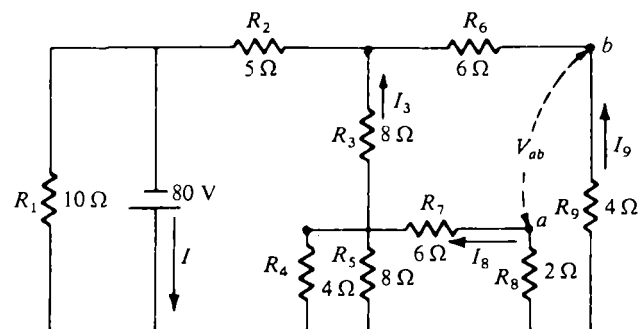


FIG. 6.39

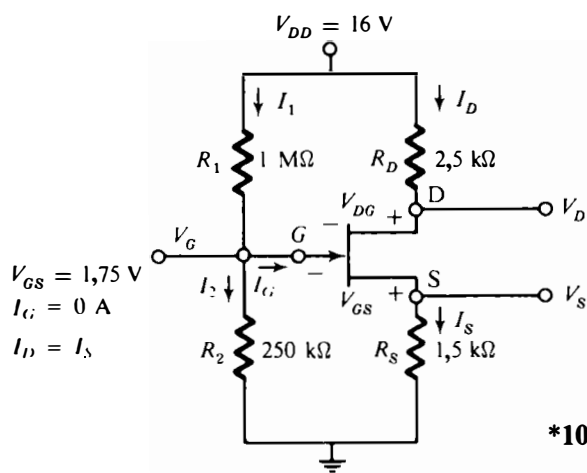


FIG. 6.40

\*9. Le réseau illustré à la figure 6.40 est le circuit habituel de polarisation du transistor à effet de champ, dispositif très important en électronique. (La polarisation est l'application de tensions continues au transistor pour que celui-ci fonctionne de la façon désirée.) Il n'est nullement nécessaire d'être familier avec le dispositif pour faire l'analyse suivante: il suffit de faire appel aux lois présentées dans le chapitre et de tirer profit des renseignements fournis à la figure.

- a. Calculez les tensions  $V_G$  et  $V_S$ .
- b. Déterminez  $V_{DG}$ .
- c. Déterminez  $V_{DS}$ .

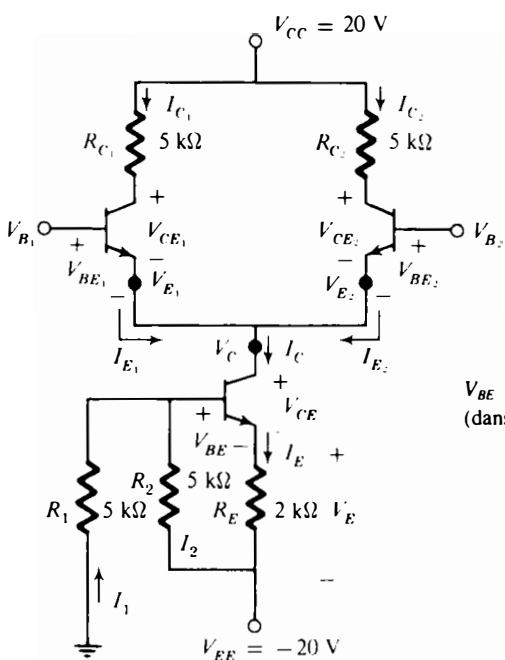


FIG. 6.41

\*10. L'amplificateur différentiel illustré à la figure 6.41 est un dispositif dont la sortie (en courant alternatif) est la différence des deux signaux d'entrée. À l'aide des notions étudiées dans ce chapitre et dans les chapitres précédents, déterminez:

- a.  $V_E$  (si  $I_1 = 2$  mA).
- b.  $I_2$  (sa grandeur et son sens).
- c.  $I_{E1}$  et  $I_{E2}$ , si  $I_C = I_E$  (approximation introduite à l'exemple 6.8) et si  $I_{E1} = I_{E2}$  (système équilibré).
- d.  $V_C$ ,  $V_{E1}$  et  $V_{E2}$ , si  $V_{CE} = 10,7$  V.
- e.  $V_{B1}$  et  $V_{B2}$  à partir des résultats obtenus.
- f.  $V_{CE1}$  et  $V_{CE2}$ , si  $I_{C1} = I_{E1}$  et si  $I_{C2} = I_{E2}$ .

11. Voir le réseau série-parallèle illustré à la figure 6.42.

- a. Déterminez  $I$ .
- b. Déterminez  $I_1$ ,  $I_3$  et  $I_8$ .
- c. Quelle est la puissance fournie à la résistance de  $21 \Omega$ ?

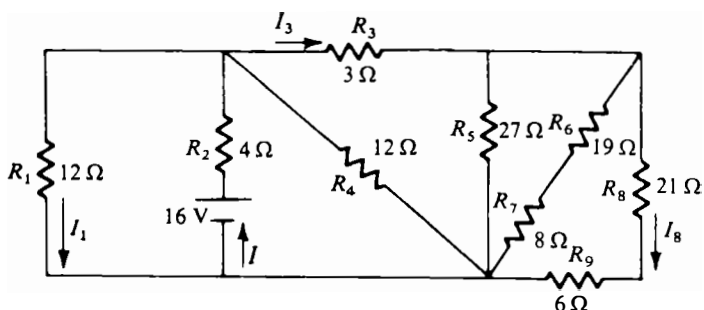


FIG. 6.42



12. Voir le réseau illustré à la figure 6.43.  
 a. Déterminez  $I$ .  
 b. Calculez  $V$ .

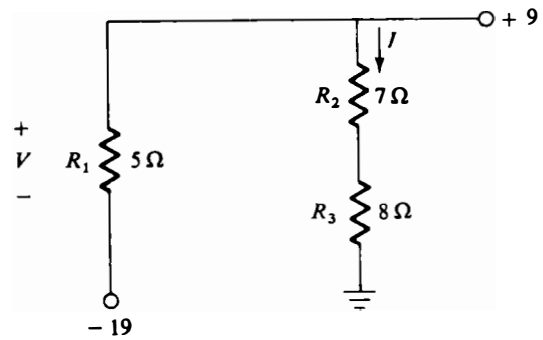


FIG. 6.43

13. Voir le réseau illustré à la figure 6.44.  
 a. Déterminez  $I_2$ ,  $I_6$  et  $I_8$ .  
 c. Calculez  $V_4$  et  $V_8$ .

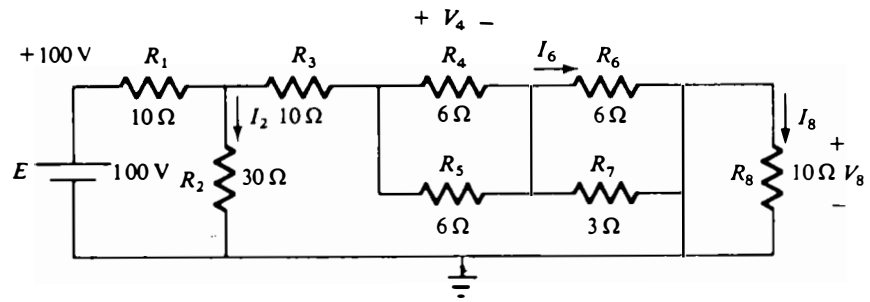


FIG. 6.44

- \*14. Voir le réseau illustré à la figure 6.45. Calculez  $R_3$ , si celle-ci est traversée par un courant de 2 A.

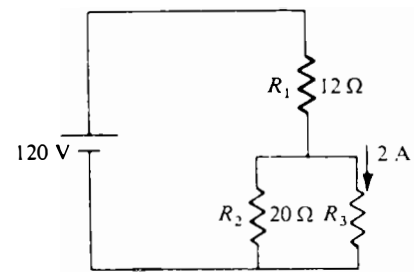


FIG. 6.45

Section 6.3

15. Voir le réseau en échelle illustré à la figure 6.46.  
 a. Calculez  $I$ .  
 b. Calculez  $I_7$ .  
 c. Déterminez  $V_3$ ,  $V_5$  et  $V_7$ .  
 d. Déterminez la puissance fournie à  $R_7$  et comparez-la à la puissance fournie par la source de 240 V.

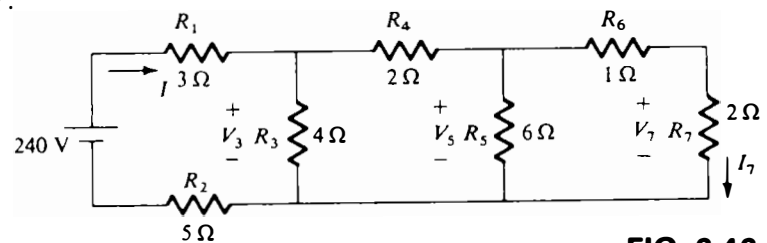


FIG. 6.46

16. Voir le réseau en échelle illustré à la figure 6.47.

- a. Déterminez  $R_T$ .  
 b. Calculez  $I$ .  
 c. Calculez  $I_8$ .

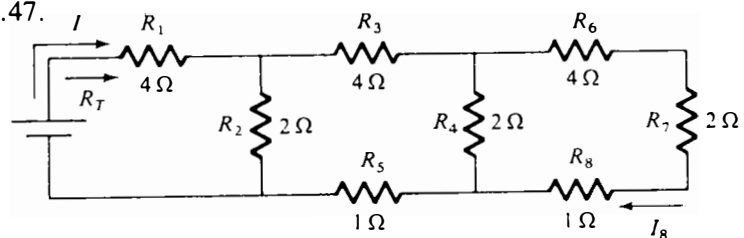


FIG. 6.47





\*17. Voir le réseau en échelle complexe illustré à la figure 6.48.

- Calculez  $I$ .
- Déterminez  $I_4$ .
- Calculez  $I_6$ .
- Calculez  $I_{10}$ .

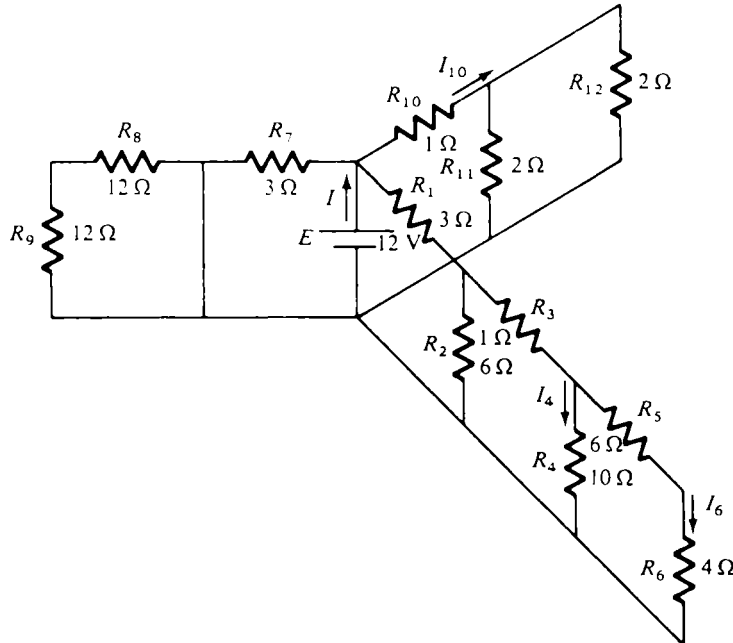


FIG. 6.48

## GLOSSAIRE

**Réseau en échelle** Réseau constitué d'un ensemble de circuits série-parallèle en cascade; il a l'apparence d'une échelle.

**Réseau série-parallèle** Réseau constitué d'une combinaison de circuits, dont les éléments sont montés en série, et de circuits dont les éléments sont montés en parallèle.

**Transistor** Dispositif semi-conducteur à trois bornes utilisé comme amplificateur et comme commutateur.

# MÉTHODES D'ANALYSE ET SUJETS CHOISIS (COURANT CONTINU)

## 7.1 INTRODUCTION

Les circuits étudiés aux chapitres 5 et 6 ne comptaient qu'une seule source, ou plusieurs sources montées en série. La marche à suivre décrite dans ces chapitres ne peut toutefois pas s'appliquer si le réseau compte plusieurs sources non montées en série. Dans ce cas, il se produit une certaine interaction entre les sources qui interdit l'emploi de la technique de simplification décrite au chapitre 6 pour déterminer les diverses grandeurs, notamment la résistance totale et le courant total.

Des méthodes d'analyse ont donc été mises au point pour permettre l'étude systématique de tout réseau, peu importe le nombre de sources et la façon dont elles sont montées. Ces méthodes peuvent également s'appliquer aux réseaux ne comptant qu'une seule source. Nous étudierons trois méthodes dans le présent chapitre: *l'analyse par branches*, *l'analyse par mailles* et *l'analyse par noeuds*. Chacune peut être utilisée pour un réseau donné. Mais aucune règle ne permet de déterminer laquelle est la « meilleure »; pour faire son choix, il s'agit simplement de peser les avantages relatifs de chacune, après avoir bien compris les caractéristiques du réseau à analyser. Notons que ces méthodes ne s'appliquent qu'aux réseaux *linéaires bilatéraux*. Le terme *linéaire* indique que les caractéristiques des éléments du réseau (les résistances par exemple) sont indépendantes de la tension aux bornes des éléments ou du courant qui les traverse. Le terme *bilatéral* signifie que ces caractéristiques sont indépendantes du sens du



courant ou de la tension. Avant de passer à l'étude de ces méthodes d'analyse, nous nous pencherons sur les sources de courant et sur l'emploi des déterminants. À la fin du chapitre, nous étudierons les réseaux en pont et les transfigurations  $\Delta$ -Y et Y- $\Delta$ .

Les théorèmes généraux employés dans l'analyse des réseaux à une ou à plusieurs sources sont présentés au chapitre 8.

## 7.2 SOURCES DE COURANT

La notion de source de courant a été introduite à la section 2.4. Nous allons maintenant en étudier les caractéristiques en détail, de façon à pouvoir déterminer correctement l'incidence de la présence d'une telle source dans un réseau.

On dit souvent de la source de courant qu'elle est le *dual* de la source de tension. Cette notion de *dualité* fait correspondre la tension d'une batterie au courant d'une source de courant, et le courant d'une batterie à la tension d'une source de courant. Ainsi, une batterie montée dans un réseau fournit une tension fixe et un courant variable, tandis que la source de courant débite un courant *fixe* et fournit une tension qui varie selon la nature du réseau.

L'intérêt croissant porté à la source de courant s'explique principalement par l'apparition de dispositifs à semi-conducteurs tels que le transistor. C'est ainsi qu'on apprend dans tout cours élémentaire d'électronique que le transistor est un dispositif commandé par courant. Dans le modèle physique (circuit équivalent) du transistor utilisé pour l'analyse des réseaux à transistors, il apparaît donc une source de courant, comme l'illustre la figure 7.1. Sur ces dessins, le symbole de la source

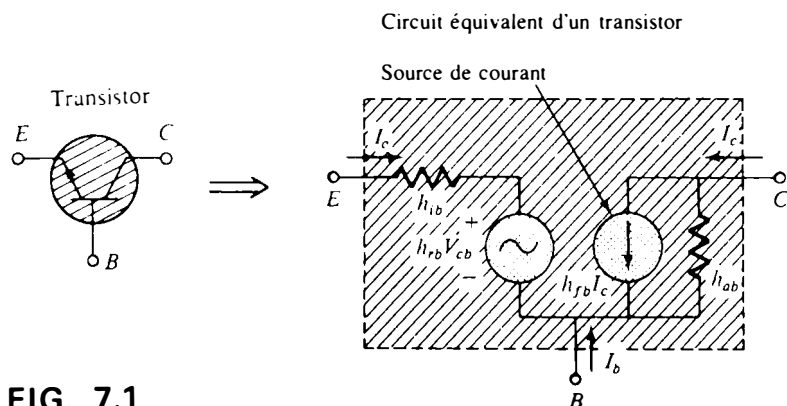


FIG. 7.1

de courant est constitué d'un cercle et d'une flèche qui indique le sens du courant débité.

Poussons la comparaison. Les caractéristiques de sortie d'une source de tension continue et d'une source de courant continu sont illustrées à la figure 7.2. On note que la tension de sortie de la source de tension est fixe et égale à  $E$  pour toutes



les valeurs du courant. Dans la région à droite de l'axe des tensions, le courant passe dans un sens donné dans la source, et dans la région à gauche il passe dans le sens opposé. En d'autres termes, le sens de passage du courant dans la source n'influe pas sur la grandeur de la tension de sortie. La caractéristique de la source de courant illustrée à la figure 7.2b indique que la source débite un courant fixe même si la tension à ses bornes varie ou change de polarité. Dans le cas de la source de tension, le sens du courant est déterminé par les caractéristiques des autres éléments du réseau. Dans les réseaux ne comptant qu'une seule source de tension, le courant passe dans le sens indiqué par la flèche située à droite du symbole de la batterie (figure 7.2a). Dans le cas de la source de courant, le réseau auquel est raccordée la source détermine la grandeur et la polarité de la tension présente aux bornes de la source. Dans les réseaux ne comptant qu'une seule source de courant, la polarité de la tension est celle indiquée juste à la droite de la source de courant (figure 7.2b).

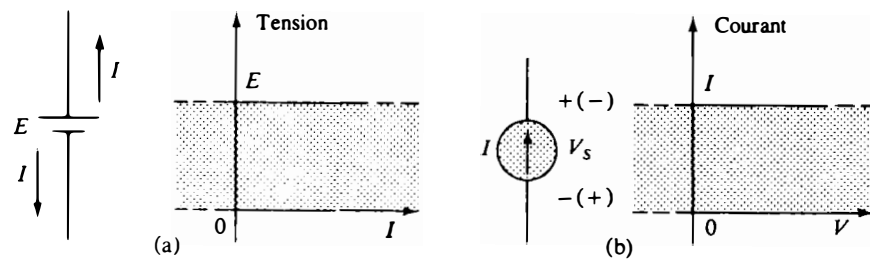


FIG. 7.2

Il est relativement facile de construire une source de courant, pour une variation de charge connue, au moyen d'une source de tension et d'une résistance série. La partie hachurée de la figure 7.3 représente une telle source. Comme le montre la figure, la source débite un courant fixe de 1 mA, pour autant que la charge se situe entre 0 Ω et 500 Ω. Le courant se détermine en effet par la relation approximative:

$$I_S = \frac{E}{R_S + R_C} \cong \frac{E}{R_S} = \frac{100}{100 \text{ k}\Omega} = 1 \text{ mA}$$

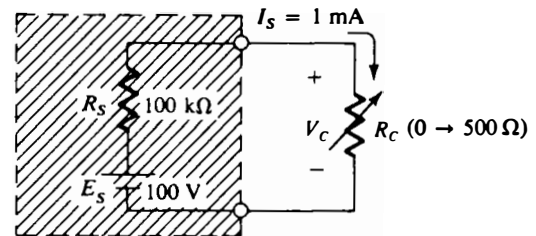


FIG. 7.3 Source de courant de 1 mA.

puisque  $R_S$  est beaucoup plus grande que toute valeur possible de  $R_C$ .

Le courant demeure donc fixe et égal à 1 mA, peu importe la variation de  $R_C$  entre 0 Ω et 500 Ω; la tension aux bornes de la charge est par ailleurs déterminée par la relation:

$$V_C = I_C R_C = I_S R_C = (1 \text{ mA})(R_C)$$

**EXEMPLE 7.1** Déterminer la tension  $V_S$  et le courant  $I_1$  dans le circuit illustré à la figure 7.4.

*Solution:* Le courant  $I_1 = I = 10 \text{ mA}$ , et:

$$V_S = V_1 = I_1 R_1 = (10 \text{ mA})(20 \text{ k}\Omega) = 200 \text{ V}$$

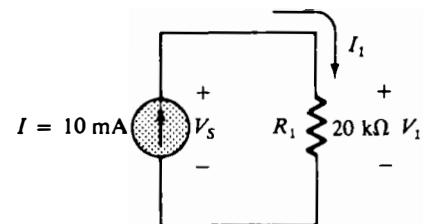


FIG. 7.4



**EXEMPLE 7.2** Calculer les tensions  $V_1$ ,  $V_2$  et  $V_S$  dans le circuit illustré à la figure 7.5.

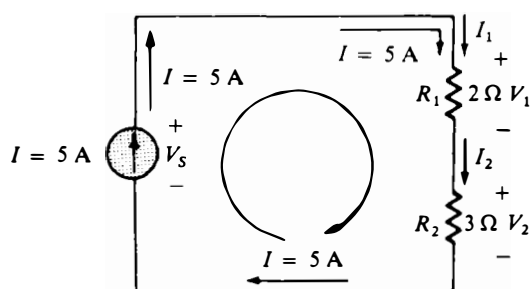


FIG. 7.5

*Solution:*

$$V_1 = I_1 R_1 = IR_1 = (5)(2) = \mathbf{10 \text{ V}}$$

$$V_2 = I_2 R_2 = IR_2 = (5)(3) = \mathbf{15 \text{ V}}$$

Appliquons la loi des tensions; nous obtenons:

$$\sum_{\odot} V = +V_S - V_1 - V_2 = 0$$

ou:

$$V_S = V_1 + V_2 = 10 + 15$$

$$V_S = \mathbf{25 \text{ V}}$$

À noter la polarité de  $V_S$  dans ce circuit à source unique.

**EXEMPLE 7.3** Voir le circuit série-parallèle illustré à la figure 7.6. Déterminer le courant  $I_2$ , ainsi que les tensions  $V_3$ ,  $V_1$  et  $V_S$ .

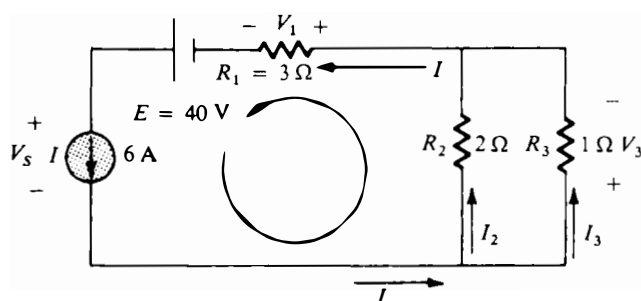


FIG. 7.6

*Solution:* La règle du diviseur de courant permet d'écrire:

$$I_2 = \frac{(1)I}{1 + 2} = \frac{1}{3}(6) = \mathbf{2 \text{ A}}$$

La loi d'Ohm donne:

$$V_3 = I_3 R_3 = I_2 R_2 = (2)(2) = \mathbf{4 \text{ V}}$$

$$V_1 = I_1 R_1 = (6)(3) = \mathbf{18 \text{ V}}$$

Appliquons la loi des tensions:

$$\sum_{\odot} V = -V_S - V_3 - V_1 + E = 0$$

ou:

$$V_S = -V_3 - V_1 + E = -4 - 18 + 40$$

$$V_S = \mathbf{18 \text{ V}}$$

Noter la polarité de  $V_S$  pour ce réseau comptant plusieurs sources.



### 7.3 TRANSPPOSITION DES SOURCES

Souvent il est nécessaire ou tout simplement commode de substituer une source de tension à une source de courant ou inversement une source de courant à une source de tension. Considérons la source de tension illustrée à la figure 7.7 avec sa résistance interne:

$$I_c = \frac{E}{R_S + R_C}$$

Multiplions le numérateur de cette équation par  $R_S/R_S$ ; nous obtenons:

$$I_c = \frac{(1)(E)}{R_S + R_C} = \frac{\left(\frac{R_S}{R_S}\right)(E)}{R_S + R_C} = \frac{R_S \left(\frac{E}{R_S}\right)}{R_S + R_C}$$

Puisque  $E/R_S$  est l'expression d'un courant  $I$ , l'équation ci-dessus est une application de la règle du diviseur de courant pour le réseau illustré à la figure 7.8.

En ce qui a trait à la résistance de charge  $R_C$  des figures 7.7 et 7.8, la nature de la source importe peu, pour autant que la tension à ses bornes et que le courant qui la traverse soient les mêmes pour chaque réseau. Par souci de clarté, nous dessinons les deux sources équivalentes côte à côte à la figure 7.9, avec les équations nécessaires à la transposition.

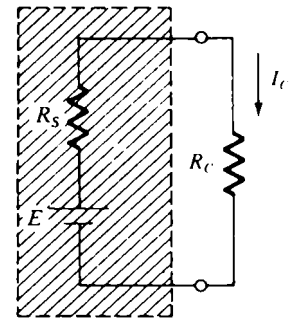


FIG. 7.7

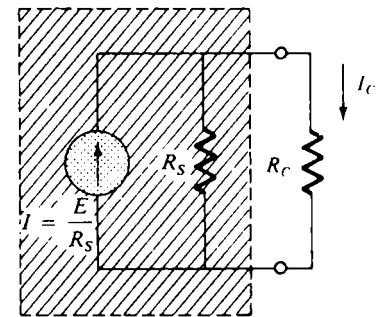


FIG. 7.8

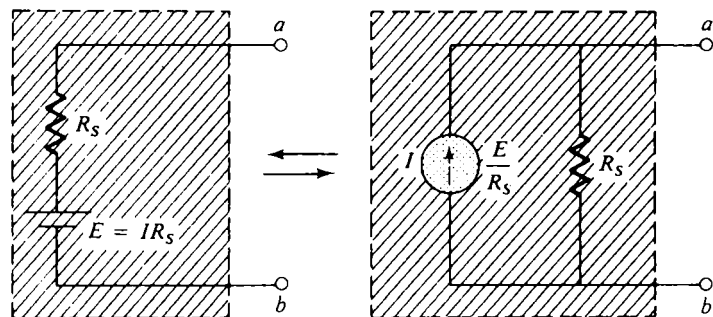


FIG. 7.9 Transposition des sources.

Notons que la valeur de la résistance  $R_S$  demeure invariable, et qu'elle est simplement mise en parallèle dans la source de courant alors qu'elle est en série dans la source de tension. Nous avons souligné avec amples détails au chapitre 5 que toute source de f.é.m. possède une certaine résistance interne série. *Dans la source de courant, cette résistance existe toujours, et elle est en parallèle.* Cependant, dans de nombreux cas, on peut faire l'approximation, sans introduire d'erreurs importantes, que la résistance interne de la source est nulle, en raison de l'importance relative de la valeur des éléments du réseau auquel la source est raccordée. Nous supprimerons donc dans les analyses qui suivent la résistance interne série des sources de tension et la résistance interne parallèle des sources de courant. Mais nous retiendrons que ces résistances internes doivent être considérées pour effectuer la transposition de sources.



**EXEMPLE 7.4** Transposer la source de tension illustrée à la figure 7.10 en une source de courant et calculer le courant passant dans la charge pour les deux sources.

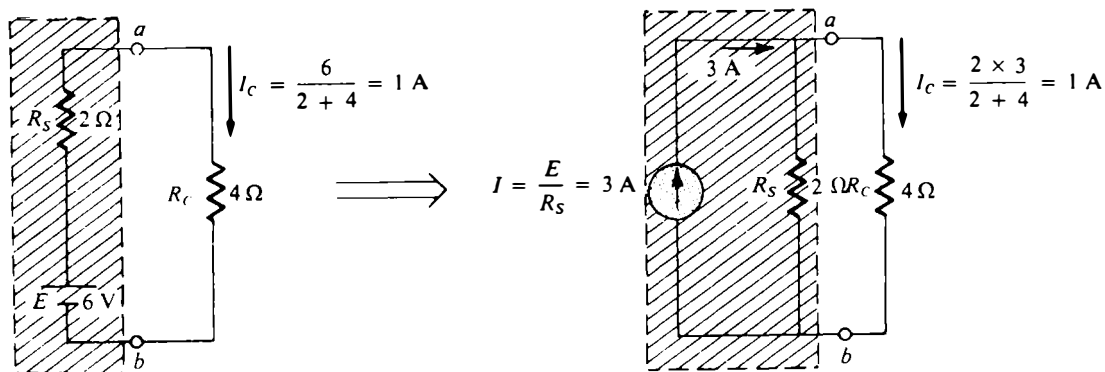


FIG. 7.10

*Solution:* Voir le côté droit de la figure 7.10.

**EXEMPLE 7.5** Transposer la source de courant illustrée à la figure 7.11 en une source de tension et déterminer le courant qui passe dans la charge pour les deux sources.

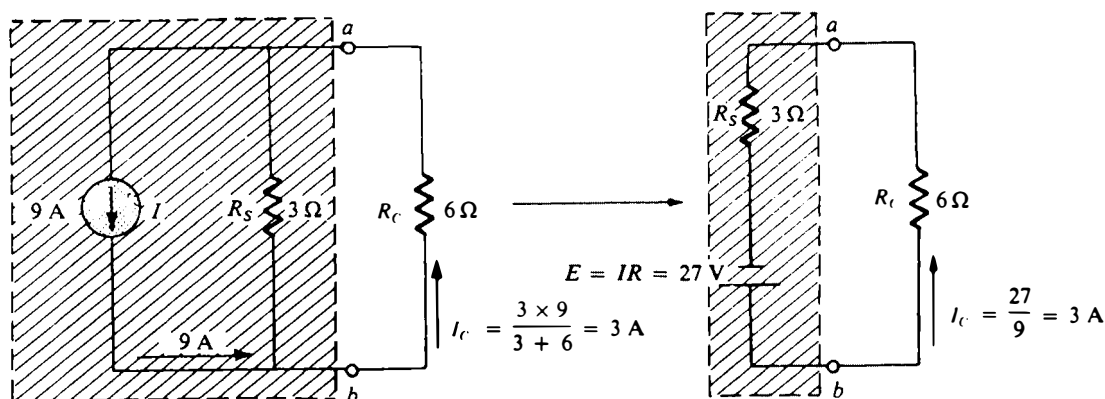


FIG. 7.11

*Solution:* Voir le côté droit de la figure 7.11.

## 7.4 SOURCES DE COURANT EN PARALLÈLE

Plusieurs sources de courant en parallèle peuvent être remplacées par une seule source débitant un courant dont l'intensité et le sens sont ceux du courant résultant des sources, obtenu par la somme algébrique des courants débités par les sources. La résistance interne parallèle de la source résultante se détermine au moyen des méthodes décrites à la section 5.5. Les exemples qui suivent illustrent la marche à suivre.

**EXEMPLE 7.6** Simplifier les circuits qui apparaissent sur la gauche aux figures 7.12 et 7.13 en remplaçant les sources de courant par une seule source de courant équivalente.

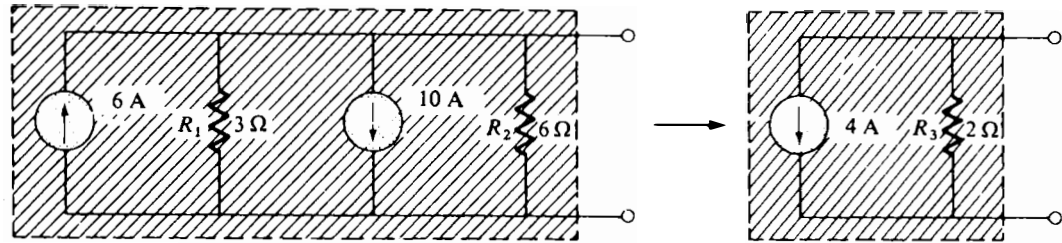


FIG. 7.12

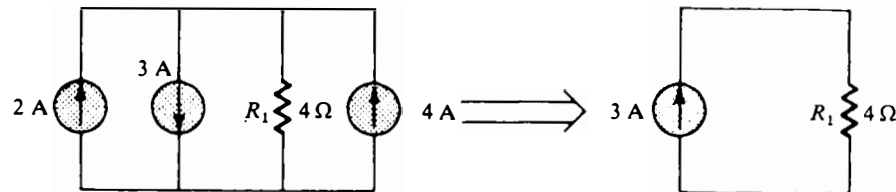


FIG. 7.13

Solution: Voir les côtés droits des figures.

### 7.5 SOURCES DE COURANT EN SÉRIE

Dans toute branche d'un réseau, il ne peut passer qu'un seul courant net. La figure 7.14 illustre deux sources de courant montées en série. L'application de la loi des courants au point *a* montre que le courant partant de ce point est d'intensité plus grande que le courant y arrivant, situation impossible. Par conséquent, on ne doit pas monter en série des sources de courant de valeurs nominales différentes, tout comme il ne faut pas monter en parallèle des sources de tension de valeurs nominales différentes.

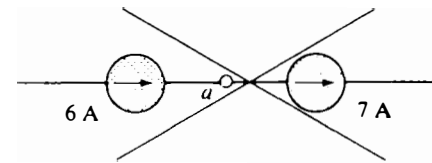


FIG. 7.14

### 7.6 DÉTERMINANTS

Dans les analyses qui suivent, il sera nécessaire de résoudre des systèmes de deux et même de trois équations. Considérons les équations suivantes:

Col. 1	Col. 2	Col. 3	
$a_1x$	$+ b_1y$	$= c_1$	(7.1a)
$a_2x$	$+ b_2y$	$= c_2$	(7.1b)

On peut certes déterminer la valeur de *x* dans la première équation et substituer son expression dans la deuxième; on obtient alors:

$$x = \frac{c_1 - b_1y}{a_1}$$

et:

$$a_2 \left( \frac{c_1 - b_1y}{a_1} \right) + b_2y = c_2$$

Cette dernière équation permet de déterminer la valeur de *y*, et par conséquent celle de *x* par substitution de la valeur de *y*





dans l'une ou l'autre des équations originales. Cette méthode de résolution est satisfaisante si le système ne compte que deux équations, mais elle devient fastidieuse et longue s'il compte trois équations ou plus.

La technique mathématique la plus souvent employée pour résoudre des systèmes de ce type est la *méthode des déterminants*. Cette méthode est bien définie et elle permet des économies considérables de temps et d'efforts tout en prévenant les erreurs fréquentes qu'entraîne la méthode par substitution présentée ci-dessus. Appliquons la méthode aux équations (7.1a) et (7.1b); dans ces équations,  $x$  et  $y$  sont les variables inconnues, les symboles  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $c_1$  et  $c_2$  étant des constantes. La première étape de la résolution du système d'équations par la méthode des déterminants consiste à exprimer  $x$  et  $y$  en fonction des constantes de la façon suivante:

$$x = \frac{\begin{array}{c|c} \text{Col. 1} & \text{Col. 2} \\ \hline c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{array}}{\begin{array}{c|c} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array}} \quad y = \frac{\begin{array}{c|c} \text{Col. 1} & \text{Col. 2} \\ \hline a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{array}}{\begin{array}{c|c} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array}} \quad (7.2)$$

Les numérateurs et les dénominateurs apparaissant dans ces expressions sont des *déterminants*, dont le calcul se fait par le développement ci-dessous.

### Dénominateur

$$\text{Déterminant} = \text{Dét} = \begin{array}{c|c} \text{Col. 1} & \text{Col. 2} \\ \hline a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array} = a_1 b_2 - a_2 b_1 \quad (7.3)$$

Le développement du déterminant consiste donc à multiplier l'élément supérieur de la diagonale principale par l'élément inférieur de la diagonale principale, et à soustraire ensuite de ce produit le produit des deux éléments de la diagonale secondaire. Notons que le déterminant de l'équation (7.3) est un déterminant *d'ordre deux*, ce qui signifie qu'il contient deux lignes et deux colonnes.

On aura sans doute constaté que les expressions de  $x$  et  $y$  dans l'équation (7.2) ont le même dénominateur, qui est le déterminant des coefficients de  $x$  et de  $y$  des équations (7.1a) et (7.1b). On aura en outre certainement remarqué que les coefficients de  $x$  ( $a_1$  et  $a_2$ ) forment la première colonne du déterminant, et que les coefficients de  $y$  ( $b_1$  et  $b_2$ ) constituent la deuxième colonne du déterminant.

### Numérateur

La constitution du numérateur de chaque expression dépend de la variable à déterminer. Le numérateur de l'expression de  $x$  est formé par la substitution, dans la première colonne, des



coefficients de  $x$  par les constantes constituant les membres droits des équations du système original; la deuxième colonne demeure inchangée. Le numérateur de l'expression de  $y$  est obtenu par la substitution, dans la deuxième colonne, des coefficients de  $y$  par les constantes; la première colonne demeure inchangée. Développons maintenant les expressions de  $x$  et  $y$ ; nous obtenons:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \quad (7.4a)$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \quad (7.4b)$$

**EXEMPLE 7.7** Calculer les déterminants ci-dessous.

a.  $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (2)(4) - (3)(2) = 8 - 6 = 2$

b.  $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = (4)(2) - (6)(-1) = 8 + 6 = 14$

c.  $\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = (0)(4) - (-2)(-2) = 0 - 4 = -4$

d.  $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = (0)(10) - (3)(0) = 0$

**EXEMPLE 7.8** Résoudre les systèmes d'équations ci-dessous.

a. 
$$\begin{array}{r} 2x + y = 3 \\ 3x + 4y = 2 \end{array}$$

b. 
$$\begin{array}{r} -x + 2y = 3 \\ 3x - 2y = -2 \end{array}$$

c. 
$$\begin{array}{r} x = 3 - 4y \\ 20y = -1 + 3x \end{array}$$

*Solution:*

a. 
$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{(3)(4) - (2)(1)}{(2)(4) - (3)(1)} = \frac{12 - 2}{8 - 3} = \frac{10}{5} = 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{5} = \frac{(2)(2) - (3)(3)}{5} = \frac{4 - 9}{5} = \frac{-5}{5} = -1$$

*Vérification:* 
$$2x + y = (2)(2) + (-1) = 4 - 1 = 3$$

$$3x + 4y = (3)(2) + (4)(-1) = 6 - 4 = 2$$



$$\begin{aligned}
 \text{b. } x &= \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -2 \\ -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{(3)(-2) - (-2)(2)}{(-1)(-2) - (3)(2)} \\
 &= \frac{-6 + 4}{2 - 6} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} \\
 y &= \frac{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{(-1)(-2) - (3)(3)}{-4} \\
 &= \frac{2 - 9}{-4} = \frac{-7}{-4} = \frac{7}{4}
 \end{aligned}$$

c. L'équation (c) peut aussi s'écrire:

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{r} x + 4y = 3 \\ -3x + 20y = -1 \end{array} \\
 x &= \frac{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 20 \\ 1 & 4 \\ -3 & 20 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 20 \end{vmatrix}} = \frac{(3)(20) - (-1)(4)}{(1)(20) - (-3)(4)} \\
 &= \frac{60 + 4}{20 + 12} = \frac{64}{32} = 2 \\
 y &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}}{32} = \frac{(1)(-1) - (-3)(3)}{32} \\
 &= \frac{-1 + 9}{32} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

La méthode des déterminants ne permet pas de résoudre seulement les systèmes à deux équations; elle peut être appliquée à un système comptant un nombre quelconque d'équations linéaires. Pour nos besoins, il suffira toutefois de retenir un procédé mnémotechnique permettant de calculer les déterminants d'ordre trois (trois équations linéaires). L'annexe A présente une étude élaborée de ces déterminants.

Considérons le système à trois équations suivant:

$$\begin{array}{r}
 \text{Col. 1} \quad \text{Col. 2} \quad \text{Col. 3} \quad \text{Col. 4} \\
 \hline
 a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\
 a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\
 a_3x + b_3y + c_3z = d_3
 \end{array}$$

dans lequel  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont des variables et  $a_{1,2,3}$ ,  $b_{1,2,3}$ ,  $c_{1,2,3}$  et  $d_{1,2,3}$ , des constantes.

Pour trouver le déterminant apparaissant au numérateur des expressions de  $x$ , de  $y$  et de  $z$ , on peut procéder comme dans le cas d'un système à deux équations, c'est-à-dire, dans le cas de  $x$ , qu'on remplace les éléments de la colonne 1 par les



constantes constituant les membres droits des équations. Évidemment, le déterminant apparaissant au dénominateur est commun à toutes les variables.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{D}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{D}$$

Le procédé mnémotechnique permettant de calculer un déterminant d'ordre trois consiste simplement à répéter la première et la seconde colonne à droite de la troisième, puis à faire la somme des produits d'éléments en diagonale:

$$\text{Dét} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4(-) & 5(-) & 6(-) \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ 1(+) & 2(+) & 3(+) \end{matrix}$$

On affecte du signe plus (+) les produits obtenus parallèlement à la diagonale principale:

$$+a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3$$

Les trois autres produits sont affectés du signe moins (-):

$$-a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1$$

La somme de ces produits est donc:

$$\boxed{+(a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3) - (a_3b_2c_1 + b_3c_2a_1 + c_3a_2b_1)} \quad (7.5)$$

**Attention:** Ce développement n'est valable que pour des déterminants de troisième ordre. Le développement de déterminants d'ordre supérieur est différent.

**EXEMPLE 7.9** Calculer le déterminant ci-dessous.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-) & (-) & (-) \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ (+) & (+) & (+) \end{matrix}$$

*Solution:*

$$\begin{aligned} & [(1)(1)(2) + (2)(0)(0) + (3)(-2)(4)] \\ & - [(0)(1)(3) + (4)(0)(1) + (2)(-2)(2)] \\ & = (2 + 0 - 24) - (0 + 0 - 8) = (-22) - (-8) \\ & = -22 + 8 = -14 \end{aligned}$$



**EXEMPLE 7.10** Résoudre le système à trois équations ci-dessous.

$$\begin{aligned} 1x + 0y - 2z &= -1 \\ 0x + 3y + 1z &= +2 \\ 1x + 2y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

*Solution:*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{[(-1)(3)(3) + (0)(1)(0) + (-2)(2)(2)]}{[(1)(3)(3) + (0)(1)(1) + (-2)(0)(2)]} \\ &= \frac{[-9 + 0 - 8] - [0 - 2 + 0]}{[9 + 0 + 0] - [-6 + 2 + 0]} \\ &= \frac{-17 + 2}{9 + 4} = -\frac{15}{13} \end{aligned}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{13}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{[(1)(2)(3) + (-1)(1)(1) + (-2)(0)(0)]}{13} \\ &= \frac{[6 - 1 + 0] - [-4 + 0 + 0]}{13} \\ &= \frac{5 + 4}{13} = \frac{9}{13} \end{aligned}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{13}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{[(1)(3)(0) + (0)(2)(1) + (-1)(0)(2)]}{13} \\ &= \frac{[0 + 0 + 0] - [-3 + 4 + 0]}{13} \\ &= \frac{0 - 1}{13} = -\frac{1}{13} \end{aligned}$$



Autre solution:

$$\begin{aligned}0x + 3y + 1z &= +2 \\z &= 2 - 3y \\&= 2 - 3\left(\frac{9}{13}\right) \\&= \frac{26}{13} - \frac{27}{13} \\&= -\frac{1}{13}\end{aligned}$$

Vérification:

$$\left. \begin{array}{l} 1x + 0y - 2z \\ = -1 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} -\frac{15}{13} + 0 + \frac{2}{13} = -1 \\ 0 + \frac{27}{13} + \frac{-1}{13} = +2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} -\frac{13}{13} = -1 \checkmark \\ \frac{26}{13} = +2 \checkmark \end{array} \right.$$
$$\left. \begin{array}{l} 0x + 3y + 1z \\ = +2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} -\frac{15}{13} + \frac{18}{13} + \frac{-3}{13} = 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} -\frac{18}{13} + \frac{18}{13} = 0 \checkmark \end{array} \right.$$

## 7.7 ANALYSE PAR BRANCHES

Nous étudions maintenant la première des trois principales méthodes permettant d'analyser les réseaux comptant plusieurs sources. Cette méthode peut s'appliquer à l'analyse de tout réseau linéaire bilatéral à courant continu. Pour nous convaincre de l'importance de ces trois méthodes, tentons de déterminer les inconnues du réseau illustré à la figure 7.15 à l'aide de la technique présentée au chapitre 6, en notant au préalable que ce réseau compte deux sources de tension indépendantes. Voyons maintenant en quoi consiste l'analyse par branches. Mais auparavant, comprenons bien que cette méthode d'analyse nous permettra de déterminer les *branches* du réseau. Une fois ces courants connus, toutes les autres grandeurs, dont la puissance et la tension, pourront être déterminées. Notre méthode d'analyse compte quatre étapes.

1. Attribuer un courant distinct de sens *arbitraire* à chacune des branches du réseau.
2. Indiquer les polarités des chutes de tension aux bornes de chaque résistance à *partir du sens arbitraire donné aux courants*.
3. Appliquer la loi des tensions à *chaque* trajet fermé et la loi des courants aux noeuds irréductibles (noeuds constituant le plus petit ensemble et par lesquels passent *tous* les courants des branches du réseau).
4. Résoudre le système d'équations linéaires résultant par la méthode des déterminants.

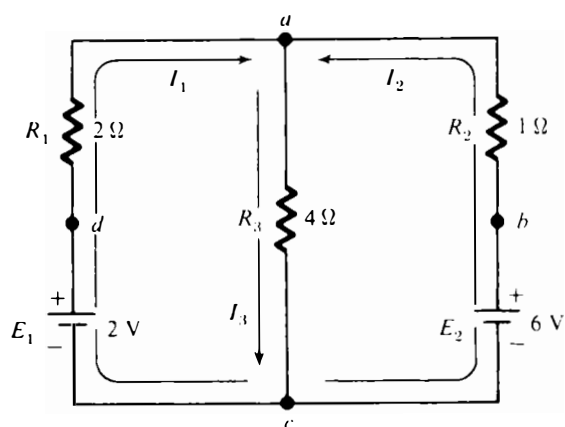


FIG. 7.15

**EXEMPLE 7.11** Appliquer la méthode d'analyse par branches au réseau illustré à la figure 7.15.

*Solution:*

*Étape 1:* Le réseau compte trois branches distinctes ( $cda$ ,  $cba$  et  $ca$ ); on choisit donc trois courants arbitraires ( $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$ ), un pour chaque branche (figure 7.15).

*Étape 2:* On indique les polarités des chutes de tension aux bornes de chaque résistance, à partir du sens des courants arbitraires (figure 7.16).

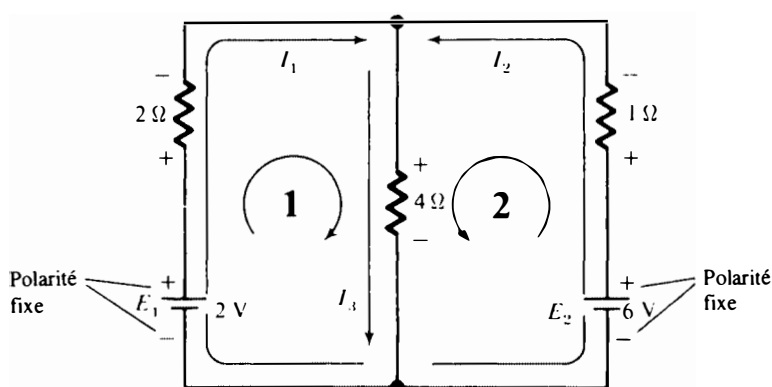


FIG. 7.16

*Étape 3:* On applique la loi des tensions à chaque trajet fermé (1 et 2) du réseau:

$$\text{boucle 1: } \sum \circ V = \begin{array}{c} \text{Élévation de potentiel} \\ \downarrow \\ +2 \\ \text{Potentiel} \\ \text{de la batterie} \end{array} - \begin{array}{c} \text{Chute de potentiel} \\ \downarrow \\ 2I_1 \\ \text{Chute de tension} \\ \text{aux bornes de la} \\ \text{résistance de } 2\Omega \end{array} - \begin{array}{c} \text{Chute de potentiel} \\ \downarrow \\ 4I_3 \\ \text{Chute de tension} \\ \text{aux bornes de la} \\ \text{résistance de } 4\Omega \end{array} = 0$$

$$\text{boucle 2: } \sum \circ V = +6 - 1I_2 - 4I_3 = 0$$

On applique également la loi des courants au noeud  $a$ , ce qui donne:

$$I_1 + I_2 = I_3$$



Étape 4: On obtient ainsi un système à trois équations linéaires et à trois inconnues:

$$2 - 2I_1 - 4I_3 = 0 \quad \text{Ce qui devient: } -2I_1 + 0 - 4I_3 = -2$$

$$6 - I_2 - 4I_3 = 0 \quad 0 - I_2 - 4I_3 = -6$$

$$I_1 + I_2 = I_3 \quad I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

Par la méthode des déterminants, on obtient:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 0 & -4 \\ -6 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = -1 \text{ A}$$

Le signe négatif indique que le sens réel du courant est à l'opposé de celui qui avait été fixé arbitrairement.

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -2 & -4 \\ 0 & -6 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{D} = 2 \text{ A}$$

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -6 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{D} = 1 \text{ A}$$

Plutôt que d'utiliser des déterminants d'ordre trois, on aurait pu réduire les trois équations à deux équations, en substituant dans la première et la deuxième l'expression de  $I_3$  obtenue à partir de la troisième:

$$\left. \begin{array}{l} 2 - 2I_1 - 4\overbrace{(I_1 + I_2)}^{I_3} = 0 \\ 6 - I_2 - 4\overbrace{(I_1 + I_2)}^{I_3} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 - 2I_1 - 4I_1 - 4I_2 = 0 \\ 6 - I_2 - 4I_1 - 4I_2 = 0 \end{array}$$

ou:

$$\begin{array}{l} -6I_1 - 4I_2 = -2 \\ -4I_1 - 5I_2 = -6 \end{array}$$

Par multiplication des deux membres des équations par  $-1$ , on a:

$$\begin{array}{l} 6I_1 + 4I_2 = +2 \\ 4I_1 + 5I_2 = +6 \end{array}$$

et:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{10 - 24}{30 - 16} = \frac{-14}{14} = -1 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}}{14} = \frac{36 - 8}{14} = \frac{28}{14} = 2 \text{ A}$$

$$\begin{array}{l} I_3 = I_1 + I_2 \\ I_3 = -1 + 2 \\ I_3 = 1 \text{ A} \end{array}$$



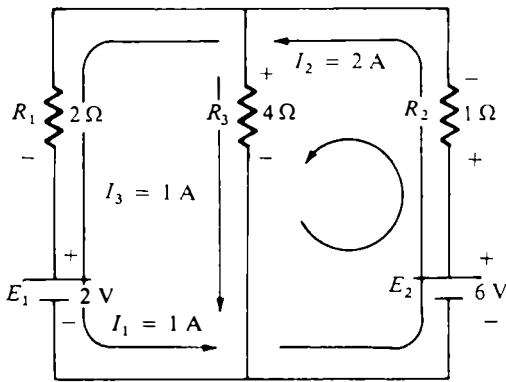


FIG. 7.17

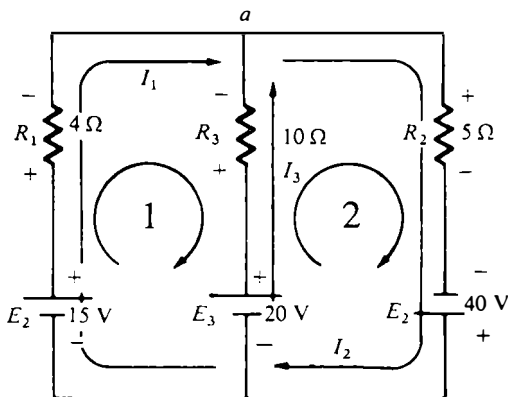


FIG. 7.18

Revenons maintenant au réseau original (figure 7.17) et appliquons la loi des tensions au trajet fermé indiqué:

$$\sum \circ V = 6 - 1I_2 - 4I_3 = 0$$

ou:

$$6 = 1I_2 + 4I_3 = (1)(2) + (4)(1)$$

$$6 = 6$$

**EXEMPLE 7.12** Appliquer la méthode d'analyse par branches au réseau illustré à la figure 7.18.

*Solution:* La loi des tensions et la loi des noeuds donnent:

$$\text{boucle 1: } +15 - 4I_1 + 10I_3 - 20 = 0$$

$$\text{boucle 2: } +20 - 10I_3 - 5I_2 + 40 = 0$$

$$\text{noeud } a: \quad I_1 + I_3 = I_2$$

Par substitution de la troisième équation dans les deux autres:

$$\begin{cases} 15 - 4I_1 + 10I_3 - 20 = 0 \\ 20 - 10I_3 - 5(I_1 + I_3) + 40 = 0 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{C'est l'expression du courant } I_2 \text{ qu'on} \\ \text{substitue puisque ce courant n'apparaît} \\ \text{qu'une fois dans les deux équations} \end{array} \right.$$

ou:

$$-4I_1 + 10I_3 = 5$$

$$-5I_1 - 15I_3 = -60$$

Multiplions les deux membres de l'équation inférieure par  $-1$ ; nous avons:

$$-4I_1 + 10I_3 = 5$$

$$5I_1 + 15I_3 = 60$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 60 & 15 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -4 & 10 \\ 5 & 15 \end{vmatrix}} = \frac{75 - 600}{-60 - 50} = \frac{-525}{-110} = 4,773 \text{ A}$$

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 5 & 60 \end{vmatrix}}{-110} = \frac{-240 - 25}{-110} = \frac{-265}{-110} = 2,409 \text{ A}$$

$$I_2 = I_1 + I_3 = 4,773 + 2,409$$

$$I_2 = 7,182 \text{ A}$$

## 7.8 ANALYSE PAR MAILLES (APPROCHE GÉNÉRALE)

La deuxième principale méthode d'analyse est l'*analyse par mailles*. Le terme *maille* vient de l'analogie entre les boucles fermées d'un réseau électrique et les mailles d'un filet. Bien qu'elle soit un peu plus compliquée que l'analyse par branches, cette méthode fait appel à de nombreux principes présentés dans le cadre de la première. C'est d'ailleurs, des deux, celle qu'on emploie le plus fréquemment aujourd'hui. L'analyse par branches est en effet introduite à titre de préparation



à l'analyse par mailles, car les courants des branches sont physiquement plus « évocateurs » que les courants des mailles. Essentiellement, l'analyse par mailles supprime la nécessité de substituer les résultats dérivés de la loi des courants dans les équations découlant de la loi des tensions. De fait, cette substitution se fait implicitement lorsqu'on écrit les équations. La technique de l'analyse par mailles est décrite ci-dessous.

1. Attribuer un courant distinct de sens horaire à chacune des boucles du réseau. Il n'est pas absolument nécessaire de choisir le sens horaire pour chaque courant de boucle. De fait, on peut choisir un sens arbitraire pour chaque courant de boucle sans fausser l'analyse pour autant que les étapes à venir soient bien suivies. On gagne toutefois du temps et on prévient beaucoup d'erreurs en adoptant systématiquement le sens horaire, car ce choix conduit à une approche programmée (section 7.9).

Il s'agit donc d'attribuer un courant de boucle à chaque « fenêtre » du réseau, comme nous le verrons dans les exemples de cette section. Par « fenêtre », nous entendons simplement toute surface fermée. Ces fenêtres correspondent à des boucles indépendantes. On prendra donc garde d'attribuer des courants à des boucles qui ne sont pas indépendantes, c'est-à-dire qui sont constituées d'autres boucles. Le point essentiel à retenir, c'est que les boucles auxquelles on attribue des courants doivent être *indépendantes*. Ainsi dans un réseau plan (dont les branches ne chevauchent pas), le nombre de courants de boucle doit être égal au nombre de fenêtres, peu importe comment ces courants sont choisis. Parfois, un réseau ne semble pas être plan. Lorsqu'on le redessine, on constate qu'il l'est. Cela pourrait être le cas d'un ou deux problèmes posés à la fin du chapitre.

Avant de passer à l'étape suivante, assurons-nous d'avoir bien compris la notion de courant de boucle. Dans le réseau illustré à la figure 7.19, le courant de boucle  $I_1$  est le courant qui traverse la résistance de  $2\ \Omega$  et la batterie de  $2\ \text{V}$ . Le courant qui traverse la résistance de  $4\ \Omega$  n'est pas le courant de boucle  $I_1$ , car cette résistance est également traversée par le courant  $I_2$ . Les courants  $I_1$  et  $I_2$  étant de sens contraires, le courant  $I_{4\Omega}$  est égal à  $I_1 - I_2$ . Autrement dit, un courant de boucle n'est un courant de branche que s'il est le seul courant de boucle à parcourir une branche.

2. Pour chaque boucle, indiquer les polarités des chutes de tension aux bornes des résistances à partir du sens attribué au courant de boucle.
3. Pour chaque boucle, appliquer la loi des tensions.
  - a. Si une résistance est traversée par plusieurs courants, le courant net la traversant est égal au courant de la

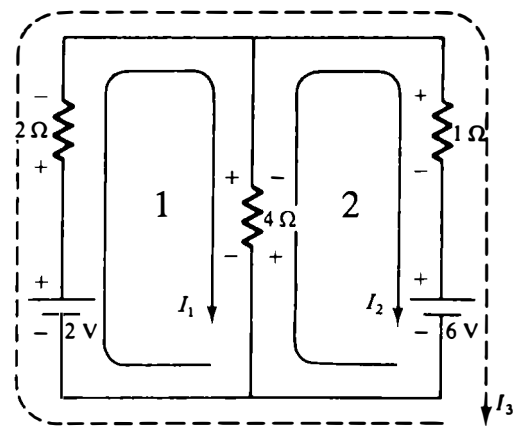


FIG. 7.19



boucle à laquelle est appliquée la loi des tensions, auquel on ajoute les courants des autres boucles traversant la résistance dans le même sens et auquel on soustrait les courants des autres boucles la traversant dans le sens opposé.

- b. La polarité d'une source de tension ne dépend pas des courants de boucle qui la traversent.
4. Résoudre le système d'équations linéaires résultant par la méthode des déterminants.

**EXEMPLE 7.13** Appliquer l'analyse par mailles au réseau étudié à l'exemple 7.11 de la section précédente (figure 7.19).

*Solution:*

*Étape 1:* Il y a deux courants de boucle ( $I_1$  et  $I_2$ ) qu'on suppose de sens horaire. Il existe une troisième boucle à laquelle on aurait pu attribuer le courant  $I_3$ , mais cette boucle n'est pas indépendante puisqu'elle est constituée des deux premières boucles.

*Étape 2:* Pour chaque boucle, on indique la polarité de la chute de tension aux bornes des résistances, à partir du sens du courant de boucle. À noter dans ce cas particulier que la polarité des deux chutes de tension aux bornes de la résistance de  $4 \Omega$  n'est pas la même pour chaque courant de boucle.

*Étape 3:* On applique la loi des tensions à chaque boucle:

$$\begin{array}{l}
 \text{Chute de tension} \\
 \text{aux bornes de la} \\
 \text{résistance de } 4 \Omega \\
 \text{boucle 1: } +2 - 2I_1 - \overbrace{4(I_1 - I_2)} = 0 \\
 \text{Courant net qui} \\
 \text{traverse la} \\
 \text{résistance de } 4 \Omega \\
 \text{boucle 2: } -6 - 1I_2 - \overbrace{4(I_2 - I_1)} = 0 \\
 \text{Courant net qui} \\
 \text{traverse la} \\
 \text{résistance de } 4 \Omega
 \end{array}$$

Les courants sont soustraits puisqu'ils sont de sens opposés

*Étape 4:* On réécrit les équations de la façon standard:

$$\text{boucle 1: } +2 - 2I_1 - 4I_1 + 4I_2 = 0$$

$$\text{boucle 2: } -6 - 1I_2 - 4I_2 + 4I_1 = 0$$

et:

$$\text{boucle 1: } +2 - 6I_1 + 4I_2 = 0$$

$$\text{boucle 2: } -6 - 5I_2 + 4I_1 = 0$$

ou:

$$\text{boucle 1: } -6I_1 + 4I_2 = -2$$

$$\text{boucle 2: } +4I_1 - 5I_2 = +6$$

La méthode des déterminants donne alors comme résultat:

$$I_1 = -1 \text{ A} \quad \text{et} \quad I_2 = -2 \text{ A}$$



Les signes moins (-) indiquent que les courants de boucle sont de sens opposés à ceux que nous avons supposés.

Le courant qui traverse la source de 2 V et la résistance de 2 Ω est donc de 1 A et il passe dans le sens opposé à celui qu'indique la flèche, tandis que le courant qui traverse la source de 6 V et la résistance de 1 Ω est de 2 A et de sens opposé à celui qu'indique la flèche. Le courant net qui traverse la résistance de 4 Ω est:

$$I_1 - I_2 \quad (\text{boucle 1 du réseau original})$$

ou:

$$-1 - (-2) = -1 + 2 = 1 \text{ A} \quad (\text{dans le sens de } I_1)$$

À noter qu'on aurait pu appliquer la méthode en choisissant la boucle extérieure ( $I_3$ ) et l'une des boucles intérieures (soit  $I_1$  soit  $I_2$ ). Mais cette approche conduit souvent à des erreurs, les équations de boucle étant habituellement difficiles à établir. La méthode la meilleure consiste à attribuer un courant de boucle à chacune des fenêtres du réseau.

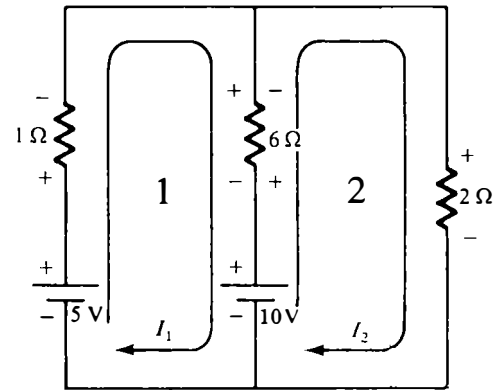


FIG. 7.20

**EXEMPLE 7.14** Calculer le courant qui passe dans chaque branche du réseau illustré à la figure 7.20.

*Solution:*

*Étapes 1 et 2:* Le sens des courants et les polarités des chutes de tension sont déjà indiqués sur le circuit. À noter que la polarité de la chute de tension aux bornes de la résistance de 6 Ω est différente pour chaque courant de boucle.

*Étape 3:* La loi des tensions est appliquée à chaque boucle:

Chute de potentiel  
↓

boucle 1:  $5 - 1I_1 - 6(I_1 - I_2) - 10 = 0$

*I<sub>2</sub> et I<sub>1</sub> traversent la résistance de 6 Ω dans des sens opposés*

boucle 2:  $10 - 6(I_2 - I_1) - 2I_2 = 0$

On écrit alors les équations:

$$\left. \begin{aligned} 5 - I_1 - 6I_1 + 6I_2 - 10 &= 0 \\ 10 - 6I_2 + 6I_1 - 2I_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} -7I_1 + 6I_2 &= 5 \\ +6I_1 - 8I_2 &= -10 \end{aligned}$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -10 & -8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -7 & 6 \\ 6 & -8 \end{vmatrix}} = \frac{-40 + 60}{56 - 36} = \frac{20}{20} = 1 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} -7 & 5 \\ 6 & -10 \end{vmatrix}}{20} = \frac{70 - 30}{20} = \frac{40}{20} = 2 \text{ A}$$

Les courants  $I_1$  et  $I_2$  étant positifs et traversant la résistance de 6 Ω et la source de 10 V dans des sens opposés, le courant



net de cette branche est égal à la différence des deux et son sens est celui du plus grand:

$$I_2 > I_1 \quad (2 > 1)$$

Par conséquent, un courant de 1 A ( $2 - 1$ ) passe dans cette branche dans le sens de  $I_2$ .

Les branches d'un circuit ne sont pas nécessairement perpendiculaires. L'exemple qui suit a trait à un réseau triangulaire, ainsi réalisé pour diverses contraintes. La méthode d'analyse ne change cependant pas.

**EXEMPLE 7.15** Déterminer les courants des branches du réseau illustré à la figure 7.21.

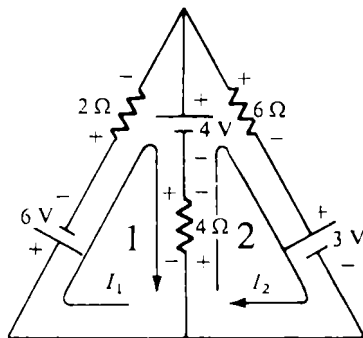


FIG. 7.21

*Solution:*

*Étapes 1 et 2:* Les courants de boucle et les polarités des chutes de tension sont indiqués sur le circuit.

*Étape 3:* La loi des tensions donne pour chaque boucle:

$$\text{boucle 1: } -6 - 2I_1 - 4 - 4(I_1 - I_2) = 0$$

$$\text{boucle 2: } -4(I_2 - I_1) + 4 - 6I_2 - 3 = 0$$

ce qui se réécrit:

$$\left. \begin{aligned} -10 - 4I_1 - 2I_1 + 4I_2 &= 0 \\ +1 + 4I_1 - 4I_2 - 6I_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} -6I_1 + 4I_2 &= +10 \\ +4I_1 - 10I_2 &= -1 \end{aligned}$$

En multipliant les membres de l'équation supérieure par  $-1$ , on a:

$$6I_1 - 4I_2 = -10$$

$$4I_1 - 10I_2 = -1$$

et:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} -10 & -4 \\ -1 & -10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 4 & -10 \end{vmatrix}} = \frac{100 - 4}{-60 + 16} = \frac{96}{-44} = -2,182 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -10 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}{-44} = \frac{-6 + 40}{-44} = \frac{34}{-44} = -0,773 \text{ A}$$

Le courant net qui traverse la résistance de  $4 \Omega$  et la source de 4 V est:

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 &= -2,182 - (-0,773) \\ &= -2,182 + 0,773 \\ &= -1,409 \text{ A} \end{aligned}$$

et son sens est opposé au courant  $I_1$  de la boucle 1.

Il arrive parfois que les réseaux que nous désirons étudier au moyen de l'analyse par mailles contiennent des sources de courant. La première étape consiste alors à transposer toutes



les sources de courant en sources de tension, comme cela est fait pour le réseau illustré à la figure 7.22.

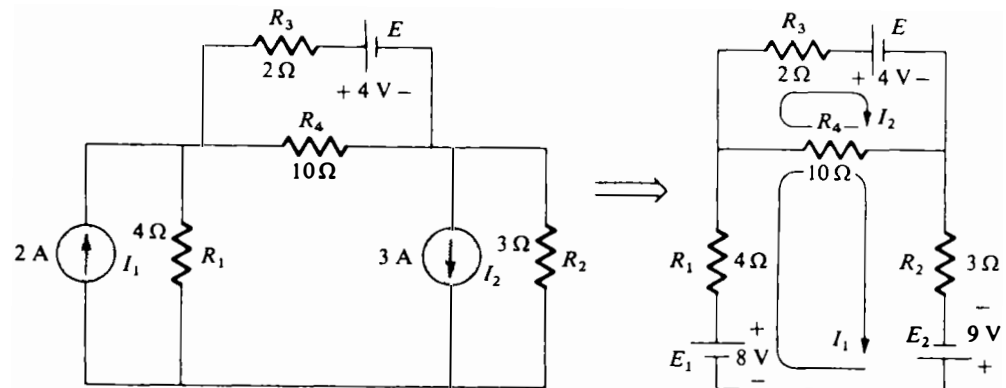


FIG. 7.22

Si aucune résistance n'est en parallèle avec la source de courant, comme dans le réseau illustré à la figure 7.23, il n'est alors pas nécessaire de déterminer  $I_1$ , puisque ce courant est tout simplement le courant débité par la source.

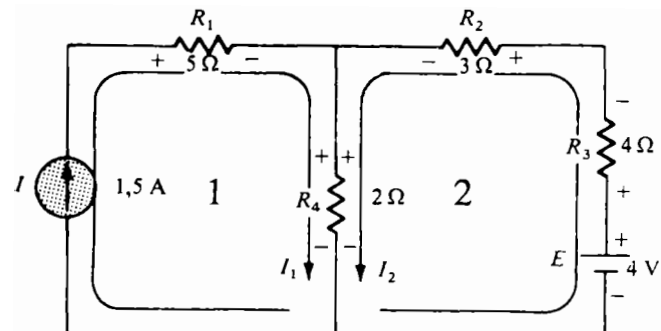


FIG. 7.23

La loi des tensions appliquée à la boucle 2 donne:

$$+4 - 4I_2 - 3I_2 - 2(I_1 + I_2) = 0$$

Pour la boucle 1,  $I_1 = 1,5$  A. On peut alors trouver  $I_2$  en substituant cette valeur dans l'équation précédente:

$$+4 - 4I_2 - 3I_2 - 2(1,5 + I_2) = 0$$

ce qui peut s'écrire:

$$-7I_2 - 2I_2 + 4 - 3 = 0$$

ou:

$$-9I_2 = -1$$

$$I_2 = 0,111 \text{ A}$$



## 7.9 ANALYSE PAR MAILLES (APPROCHE PROGRAMMÉE)

Voilà donc bien établies les bases de l'analyse par mailles. Nous étudierons maintenant une technique qui permet d'écrire les équations des mailles rapidement et sans trop grands risques d'erreurs. Reprenons le réseau de l'exemple 7.14 (figure 7.20), dont les courants de boucle sont indiqués à la figure 7.24 (à noter que chaque courant est de sens horaire).

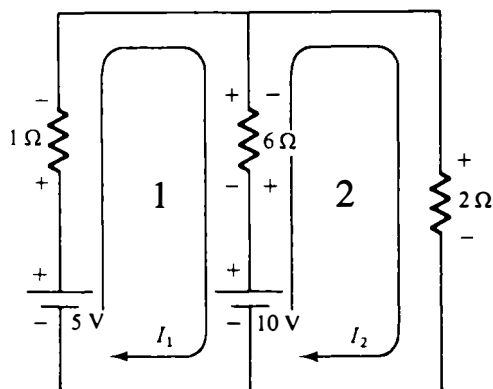


FIG. 7.24

Les équations sont:

$$\begin{aligned} -7I_1 + 6I_2 &= 5 \\ 6I_1 - 8I_2 &= -10 \end{aligned}$$

qu'on peut écrire:

$$\begin{aligned} 7I_1 - 6I_2 &= -5 \\ 8I_2 - 6I_1 &= 10 \end{aligned}$$

ou encore:

Col. 1	Col. 2	Col. 3
$(1 + 6)I_1 -$	$6I_2 =$	$(5 - 10)$
$(2 + 6)I_2 -$	$6I_1 =$	$10$

Dans chacune des équations ci-dessus, le terme de la colonne 1 est le produit du courant de boucle et de la somme des résistances traversées par ce courant. Le terme de la colonne 2 est le produit de la résistance commune aux deux courants de boucle et du courant de l'autre boucle. À noter que le terme de cette colonne est affecté du signe moins. Enfin, le terme de la colonne 3 est la somme *algébrique* des sources de tension que traverse le courant de boucle. La source de tension est affectée du signe positif si le courant de boucle passe de sa borne négative à sa borne positive, et du signe négatif s'il la traverse dans le sens opposé. Soulignons toutefois que cette technique n'est valable que si le sens attribué au courant de chaque fenêtre est celui des aiguilles d'une montre.

À partir des éléments ci-dessus, élaborons maintenant l'*approche programmée* de l'analyse par mailles.

1. Attribuer un courant de boucle à chaque boucle indépendante (comme il a été fait à la section précédente), et donner à ces courants le sens *horaire*.
2. Le nombre d'équations nécessaires est égal au nombre de boucles indépendantes choisies. Le premier terme (colonne 1) de chaque équation s'obtient ainsi: on fait la somme des résistances traversées par le courant de la boucle et on multiplie cette somme par le courant.



3. Les autres termes (termes mixtes) du membre gauche de l'équation sont toujours affectés du signe négatif. Le nombre des termes mixtes peut être supérieur à un si le courant de la boucle considérée partage plusieurs éléments avec d'autres courants de boucle. Nous étudierons d'ailleurs ce cas dans un exemple. Chaque terme mixte est le produit de la résistance commune et du courant de l'autre boucle qui passe dans cette résistance.
4. Le terme du membre droit de l'équation est la somme algébrique des sources de tension que traverse le courant de la boucle considérée. Les sources que traverse le courant de la borne négative à la borne positive sont affectées du signe positif, celles que traverse le courant en sens contraire sont affectées du signe négatif.
5. Résoudre le système d'équations par la méthode des déterminants.

Voyons maintenant quelques exemples.

**EXEMPLE 7.16** Écrire les équations de maille du réseau illustré à la figure 7.25 et déterminer le courant qui passe dans la résistance de  $7 \Omega$ .

*Solution:*

*Étape 1:* On attribue à chaque boucle un courant de sens horaire, comme l'illustre la figure 7.25.

*Étapes 2 à 4:*

$$\begin{aligned} I_1: (8 + 6 + 2)I_1 - (2)I_2 &= 4 \\ I_2: (7 + 2)I_2 - (2)I_1 &= -9 \end{aligned}$$

ou:

$$\begin{aligned} 16I_1 - 2I_2 &= 4 \\ 9I_2 - 2I_1 &= -9 \end{aligned}$$

après mise en ordre des termes:

$$\begin{aligned} 16I_1 - 2I_2 &= 4 \\ -2I_1 + 9I_2 &= -9 \end{aligned}$$

on obtient:

$$I_2 = I_{7\Omega} = \frac{\begin{vmatrix} 16 & 4 \\ -2 & -9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 16 & -2 \\ -2 & 9 \end{vmatrix}} = \frac{-144 + 8}{144 - 4} = \frac{-136}{140} = -0,971 \text{ A}$$

**EXEMPLE 7.17** Écrire les équations de maille du réseau illustré à la figure 7.26.

*Solution:*

*Étape 1:* On attribue un courant de boucle de sens horaire à chaque fenêtre du réseau:

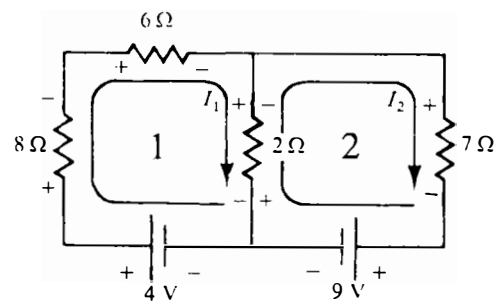


FIG. 7.25

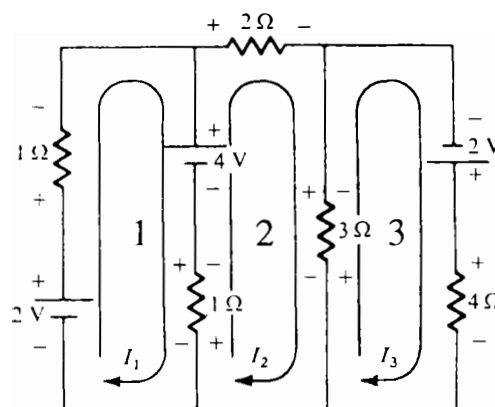


FIG. 7.26





$I_1$  ne partage pas d'élément avec  $I_3$ .

$$\begin{array}{r} \downarrow \\ I_1: \quad (1 + 1)I_1 - (1)I_2 + 0 = 2 - 4 \\ I_2: \quad (1 + 2 + 3)I_2 - (1)I_1 - (3)I_3 = 4 \\ I_3: \quad (3 + 4)I_3 - (3)I_2 + 0 = 2 \\ \uparrow \\ I_3 \text{ ne partage pas d'élément avec } I_1. \end{array}$$

Après simplification on a:

$$\begin{array}{r} 2I_1 - I_2 + 0 = -2 \\ 6I_2 - I_1 - 3I_3 = 4 \\ 7I_3 - 3I_2 + 0 = 2 \end{array}$$

et après mise en ordre des termes:

$$\begin{array}{r} c \quad b \quad a \\ 2I_1 - I_2 + 0 = -2 \\ b \quad -I_1 + 6I_2 - 3I_3 = 4 \\ a \quad 0 - 3I_2 + 7I_3 = 2 \end{array}$$

À noter que les coefficients des termes respectifs des diagonales  $a$  et  $b$  sont les mêmes. Cette *symétrie* autour de la diagonale  $c$  se vérifie toujours lorsque les équations sont écrites au moyen de l'approche programmée. Il s'agit donc d'un moyen simple permettant de vérifier l'absence de toute erreur. C'est ainsi qu'on retrouve cette symétrie dans les équations de l'exemple 7.16.

Considérons maintenant un réseau ne comptant qu'une seule source de f.é.m., pour bien voir les avantages de l'analyse par mailles même dans les cas simples.

**EXEMPLE 7.18** Déterminer le courant traversant la résistance de  $10 \Omega$  dans le réseau illustré à la figure 7.27.

*Solution:*

$$\begin{array}{r} I_1: \quad (8 + 3)I_1 - (8)I_3 - (3)I_2 = 15 \\ I_2: \quad (3 + 5 + 2)I_2 - (3)I_1 - (5)I_3 = 0 \\ I_3: \quad (8 + 10 + 5)I_3 - (8)I_1 - (5)I_2 = 0 \\ \quad \quad 11I_1 - 8I_3 - 3I_2 = 15 \\ \quad \quad 10I_2 - 3I_1 - 5I_3 = 0 \\ \quad \quad \underline{23I_3 - 8I_1 - 5I_2 = 0} \end{array}$$

ou:

$$\begin{array}{r} 11I_1 - 3I_2 - 8I_3 = 15 \\ -3I_1 + 10I_2 - 5I_3 = 0 \\ \underline{-8I_1 - 5I_2 + 23I_3 = 0} \end{array}$$

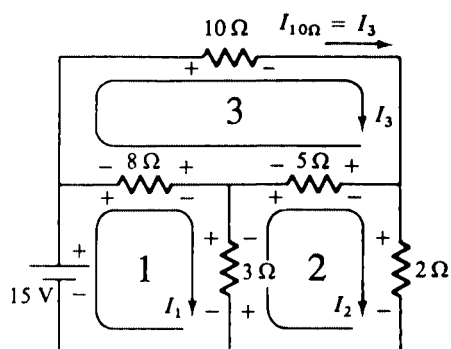


FIG. 7.27



et:

$$I_3 = I_{10\Omega} = \frac{\begin{vmatrix} 11 & -3 & 15 \\ -3 & 10 & 0 \\ -8 & -5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 11 & -3 & -8 \\ -3 & 10 & -5 \\ -8 & -5 & 23 \end{vmatrix}} = 1,220 \text{ A}$$

L'enchaînement presque mécanique des étapes rend cette méthode extrêmement appropriée aux techniques informatiques. Ce type de problème constitue donc un excellent exercice de programmation.

## 7.10 ANALYSE PAR NOEUDS (APPROCHE GÉNÉRALE)

Dans l'analyse par mailles, les équations générales du réseau sont donc obtenues par l'application de la loi des tensions à chaque boucle du réseau. Nous emploierons maintenant la loi des courants pour élaborer une nouvelle méthode d'analyse, appelée *analyse par noeuds*.

Un *noeud* est une jonction de deux ou plusieurs branches du réseau. Si dans le réseau un des noeuds est au potentiel de référence (c'est-à-dire au potentiel nul ou mis à la masse), les autres noeuds auront un potentiel fixe relativement à ce noeud de référence. Dans un réseau de  $N$  noeuds, il y a donc  $N - 1$  noeuds possédant un potentiel fixe relativement au potentiel du noeud de référence. Les équations traduisant les relations entre ces tensions nodales peuvent s'écrire à l'aide de l'application de la loi des courants à chacun des  $N - 1$  noeuds. Une fois les équations établies, il suffit, pour déterminer chacune des tensions nodales, d'appliquer la méthode des déterminants, comme il a été fait dans l'analyse par mailles.

Pour simplifier les équations du réseau, on a avantage à transposer toutes les sources de tension en sources de courant avant que ne soit appliquée la loi des courants. Les étapes de l'analyse par noeuds sont donc les suivantes:

1. Transposer toutes les sources de tension en sources de courant.
2. Déterminer le nombre de noeuds du réseau.
3. Choisir un noeud de référence et attribuer une tension arbitraire ( $V_1$ ,  $V_2$ , etc.) à chacun des autres noeuds.
4. Appliquer la loi des courants à chacun des noeuds, exception faite du noeud de référence.
5. Résoudre le système d'équations résultant.

**EXEMPLE 7.19** Faire l'analyse par noeuds du réseau illustré à la figure 7.28.

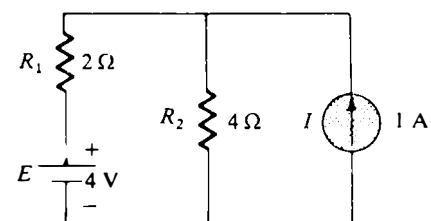


FIG. 7.28

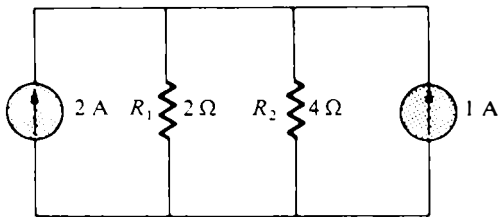


FIG. 7.29

*Solution:*

*Étape 1:* Transposer les sources de tension en sources de courant (figure 7.29).

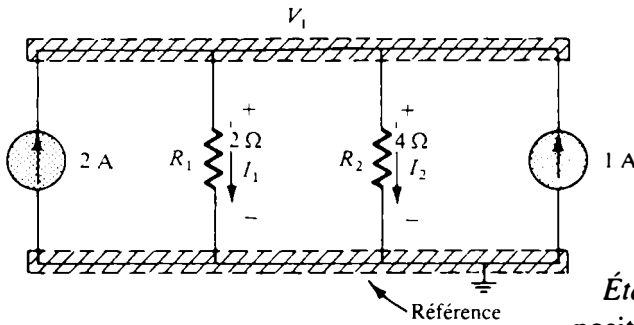


FIG. 7.30

*Étapes 2 et 3:* Voir la figure 7.30.

*Étape 4:* (Établissement de l'équation nodale à  $V_1$ ):  $V_1$  est positive relativement au potentiel du noeud de référence. Par conséquent les résistances  $R_1$  et  $R_2$  sont traversées, dans le sens indiqué par les flèches, par des courants:

$$I_1 = \frac{V_1}{2} \quad \text{et} \quad I_2 = \frac{V_1}{4}$$

La loi des courants donne:

$$\underbrace{2 + 1}_{\text{Arrivant}} - \underbrace{\left(\frac{V_1}{2} + \frac{V_1}{4}\right)}_{\text{Partant}} = 0$$

*Étape 5:*

$$V_1 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = 3 \quad \text{or} \quad V_1 \left( \frac{3}{4} \right) = 3$$

$$V_1 = \frac{12}{3} = 4 \text{ V}$$

La différence de potentiel aux bornes de chaque source de courant et de chacune des résistances est donc de 4 V, de sorte que:

$$I_1 = \frac{V_1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{V_1}{4} = \frac{4}{4} = 1 \text{ A}$$

**EXEMPLE 7.20** Déterminer les tensions nodales du réseau illustré à la figure 7.31.

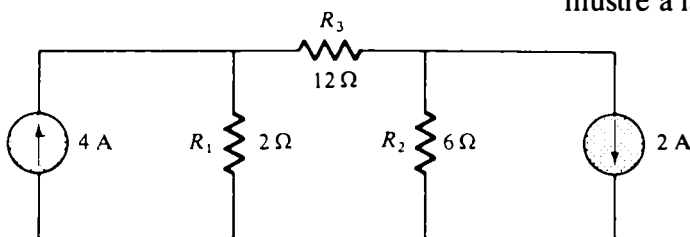


FIG. 7.31



Solution:

Étapes 1 à 3: Voir la figure 7.32.

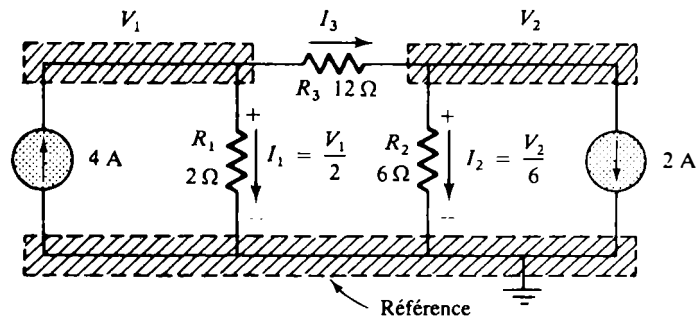


FIG. 7.32

Avant de passer à l'étape 4, notons le fait que le courant  $I_3$  est déterminé par la chute de potentiel aux bornes de la résistance de  $12 \Omega$ . Nous pouvons supposer que la plus grande des tensions est soit  $V_1$  soit  $V_2$  de sorte qu'il nous soit possible d'attribuer un sens au courant  $I_3$ , mais la même supposition doit servir à l'établissement des équations à chaque noeud. Il se pourra évidemment que le sens supposé du courant ne soit pas son sens réel, mais les valeurs de  $V_1$  et de  $V_2$  déterminées par le système d'équations résultant seront correctes.

Étape 4: Supposons  $V_1 > V_2$ ;  $I_3$  passe alors dans le sens indiqué à travers la résistance de  $12 \Omega$ . Les équations nodales résultantes sont:

noeud 1:  $4 - I_1 - I_3 = 0$

noeud 2:  $I_3 - I_2 - 2 = 0$

Substituons aux courants leurs expressions en termes de  $V_1$  et de  $V_2$ :

noeud 1:  $4 - \frac{V_1}{2} - \frac{(V_1 - V_2)}{12} = 0$

noeud 2:  $\frac{(V_1 - V_2)}{12} - \frac{V_2}{6} - 2 = 0$

$$\begin{cases} V_1 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \right) - V_2 \left( \frac{1}{12} \right) = +4 \\ V_2 \left( \frac{1}{12} + \frac{1}{6} \right) - V_1 \left( \frac{1}{12} \right) = -2 \end{cases} \quad (7.6)$$

Après simplification, on a:

$$\left. \begin{cases} \frac{7}{12} V_1 - \frac{1}{12} V_2 = +4 \\ -\frac{1}{12} V_1 + \frac{3}{12} V_2 = -2 \end{cases} \right\} \begin{cases} 7V_1 - V_2 = 48 \\ -1V_1 + 3V_2 = -24 \end{cases}$$

et:

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} 48 & -1 \\ -24 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{120}{20} = +6 \text{ V}$$



$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 48 \\ -1 & -24 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-120}{20} = -6 \text{ V}$$

Puisque  $V_1$  est plus grande que  $V_2$ , le sens supposé de  $I_3$  était son sens réel. Les intensités des courants sont données par les équations:

$$I_3 = \frac{V_1 - V_2}{12} = \frac{6 - (-6)}{12} = \frac{12}{12} = 1 \text{ A}$$

$$I_1 = \frac{V_1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{V_2}{6} = \frac{-6}{6} = -1 \text{ A}$$

Le signe négatif indique que le sens réel du courant est l'opposé du sens supposé.

## 7.11 ANALYSE PAR NOEUDS (APPROCHE PROGRAMMÉE)

Un examen attentif des équations (7.6) à l'exemple 7.20 démontre que, dans l'équation résultant de l'application de la loi des courants à un noeud donné, la tension associée à ce noeud est multipliée par la somme des conductances des branches aboutissant à ce noeud. On constate d'autre part que chacune des autres tensions nodales apparaissant dans cette équation est multipliée par la conductance de la branche reliant le noeud considéré au noeud auquel est associée cette tension, le produit étant affecté du signe moins. Enfin, les valeurs des courants débités par les sources apparaissent dans les membres droits des équations nodales, la valeur d'un courant étant affectée du signe plus si le courant arrive au noeud considéré, et du signe moins si le courant en part.

Ces conclusions sont valables pour un réseau quelconque, peu importe son nombre de noeuds. Elles nous permettent donc d'écrire rapidement les équations nodales du réseau sous une forme qui permet l'emploi de la méthode des déterminants. On aura d'ailleurs sans doute noté le parallélisme entre les étapes de l'analyse par noeuds et celles de l'analyse par mailles qui a été expliquée à la section 7.9.

1. Choisir un noeud de référence et attribuer une tension arbitraire aux  $N - 1$  autres noeuds du réseau.
2. Le nombre d'équations nécessaires à l'analyse du réseau est égal à  $N - 1$ . Le premier terme de chaque équation est obtenu par le produit de la tension associée au noeud considéré par la somme des conductances des branches aboutissant à ce noeud.
3. Les termes mixtes de chaque équation sont toujours affectés du signe moins. L'équation compte plusieurs termes



mixtes si le nombre de branches aboutissant au noeud considéré est supérieur à deux. Nous étudierons ce cas dans un exemple. Chaque terme mixte est obtenu par le produit de la tension associée à un noeud par la conductance de la branche reliant ce noeud au noeud considéré.

4. Le membre droit de chaque équation est la somme algébrique des valeurs des courants débités par les sources des branches aboutissant au noeud considéré. Cette valeur est affectée du signe plus si le courant arrive au noeud considéré, et du signe moins si le courant en part.
5. Résoudre le système d'équations résultant.

Considérons maintenant quelques exemples.

**EXEMPLE 7.21** Écrire les équations nodales du réseau illustré à la figure 7.33.

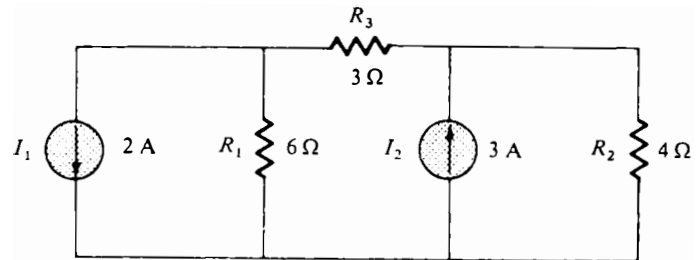


FIG. 7.33

*Solution:*

Étape 1: Les tensions arbitraires attribuées aux noeuds sont illustrées à la figure 7.34.

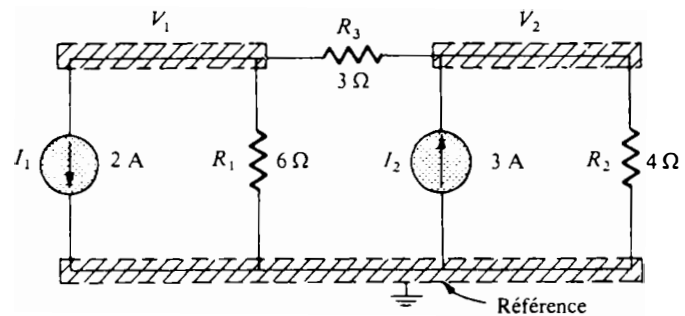


FIG. 7.34

Étapes 2 à 4:

$$V_1: \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \right) V_1 - \left( \frac{1}{3} \right) V_2 = -2$$

Somme des conductances des branches aboutissant au noeud 1
Conductance de la branche reliant les deux noeuds

← Courant qui part du noeud 1

$$V_2: \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right) V_2 - \left( \frac{1}{3} \right) V_1 = +3$$

Somme des conductances des branches aboutissant au noeud 2
Conductance de la branche reliant les deux noeuds

← Courant arrivant au noeud 2



et:

$$\frac{1}{2} V_1 - \frac{1}{3} V_2 = -2$$

$$-\frac{1}{3} V_1 + \frac{7}{12} V_2 = 3$$

**EXEMPLE 7.22** Déterminer la tension aux bornes de la résistance de  $3 \Omega$  du réseau illustré à la figure 7.35 au moyen de l'analyse par noeuds.

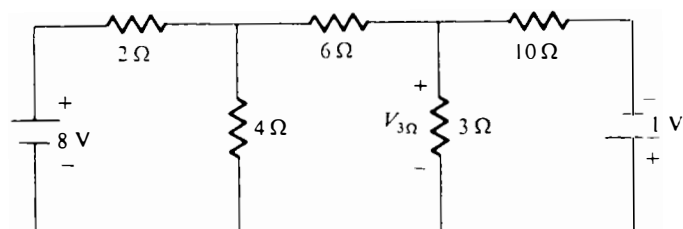


FIG. 7.35

*Solution:* On transpose les sources de tension en sources de courant et on choisit les tensions nodales (figure 7.36); on a:

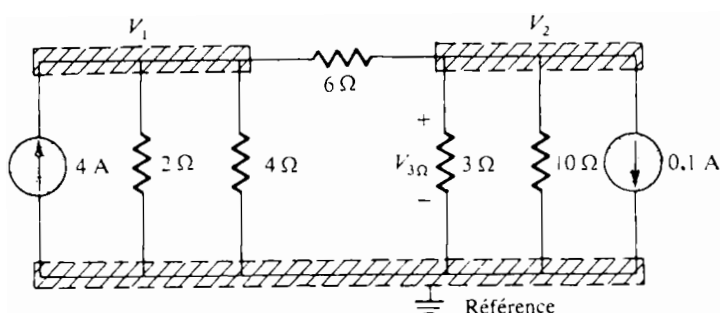


FIG. 7.36

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \right) V_1 - \left( \frac{1}{6} \right) V_2 &= +4 \\ \left( \frac{1}{10} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right) V_2 - \left( \frac{1}{6} \right) V_1 &= -0,1 \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{11}{12} V_1 - \frac{1}{6} V_2 = 4$$

$$-\frac{1}{6} V_1 + \frac{3}{5} V_2 = -0,1$$

ce qui équivaut à:

$$\left. \begin{aligned} \frac{11}{12} V_1 - \frac{2}{12} V_2 &= 4 \\ -\frac{5}{30} V_1 + \frac{18}{30} V_2 &= -0,1 \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} 11V_1 - 2V_2 &= +48 \\ -5V_1 + 18V_2 &= -3 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} 11V_1 - 2V_2 &= +48 \\ -5V_1 + 18V_2 &= -3 \end{aligned}$$

$$V_2 = V_{3\Omega} = \frac{\begin{vmatrix} 11 & 48 \\ -5 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 11 & -2 \\ -5 & 18 \end{vmatrix}} = \frac{-33 + 240}{198 - 10} = \frac{207}{188} = \mathbf{1,101 \text{ V}}$$



À l'instar de l'analyse par mailles, l'analyse par noeuds est un outil extrêmement utile pour l'étude de réseaux ne comptant qu'une seule source.

**EXEMPLE 7.23** Au moyen de l'analyse par noeuds, déterminer la tension aux bornes de la résistance de 4 Ω du réseau illustré à la figure 7.37.

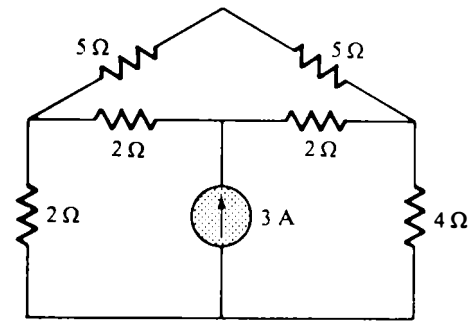


FIG. 7.37

*Solution:* La tension de référence et les quatre autres tensions arbitraires sont indiquées à la figure 7.38. Quelques instants de réflexion suffisent à constater que pour toute différence de potentiel entre  $V_1$  et  $V_3$ , le courant qui traverse la résistance de 5 Ω est partout le même, de même que la tension aux bornes de cette résistance. Par conséquent  $V_4$  est simplement une tension intermédiaire entre  $V_1$  et  $V_3$ , et elle sera déterminée dès que ces deux tensions seront connues. On ne supposera donc pas qu'il s'agisse d'une tension nodale; le réseau peut alors se simplifier (figure 7.39). Comprenons bien toutefois qu'il est possible d'inclure  $V_4$  dans l'analyse par noeuds du réseau, bien que le nombre d'équations nodales serait alors de quatre plutôt que de trois.

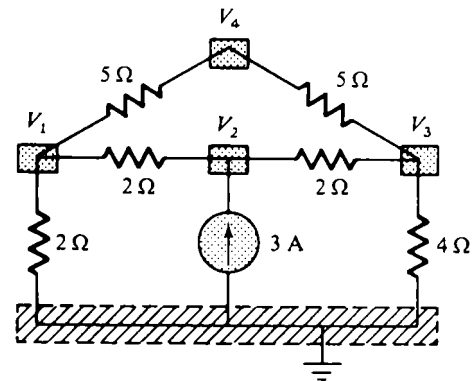


FIG. 7.38

$$\begin{aligned}
 V_1: & \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{10}\right) V_1 - \left(\frac{1}{2}\right) V_2 - \left(\frac{1}{10}\right) V_3 = 0 \\
 V_2: & \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) V_2 - \left(\frac{1}{2}\right) V_1 - \left(\frac{1}{2}\right) V_3 = 3 \\
 V_3: & \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) V_3 - \left(\frac{1}{2}\right) V_2 - \left(\frac{1}{10}\right) V_1 = 0
 \end{aligned}$$

Après simplification on a:

$$\begin{aligned}
 1,1V_1 - 0,5V_2 - 0,1V_3 &= 0 \\
 V_2 - 0,5V_1 - 0,5V_3 &= 3 \\
 \underline{0,85V_3 - 0,5V_2 - 0,1V_1} &= 0
 \end{aligned}$$

et après mise en ordre des termes:

$$\begin{aligned}
 \text{---c---} & \quad \text{---b---} & \quad \text{---a---} \\
 1,1V_1 - 0,5V_2 - 0,1V_3 &= 0 \\
 \text{---b---} & & \\
 -0,5V_1 + 1V_2 - 0,5V_3 &= 3 \\
 \text{---a---} & & \\
 \underline{-0,1V_1 - 0,5V_2 + 0,85V_3} &= 0
 \end{aligned}$$

À noter dans ces équations la symétrie autour de la diagonale principale, symétrie observée aussi dans les équations de l'analyse par mailles. Les équations établies dans les exemples

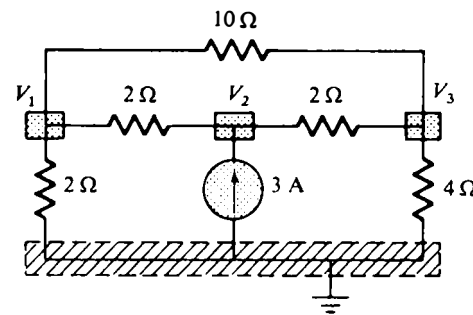


FIG. 7.39





7.21 et 7.22 présentait également cette caractéristique qui peut donc servir de moyen de vérification.

$$V_3 = V_{4\Omega} = \frac{\begin{vmatrix} 1,1 & -0,5 & 0 \\ -0,5 & +1 & 3 \\ -0,1 & -0,5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1,1 & -0,5 & -0,1 \\ -0,5 & +1 & -0,5 \\ -0,1 & -0,5 & +0,85 \end{vmatrix}} = 4,645 \text{ V}$$

Voyons un dernier exemple, celui d'un réseau en échelle ne comptant qu'une seule source.

**EXEMPLE 7.24** Écrire les équations nodales du réseau illustré à la figure 7.40 et déterminer la tension aux bornes de la résistance de  $2 \Omega$ .

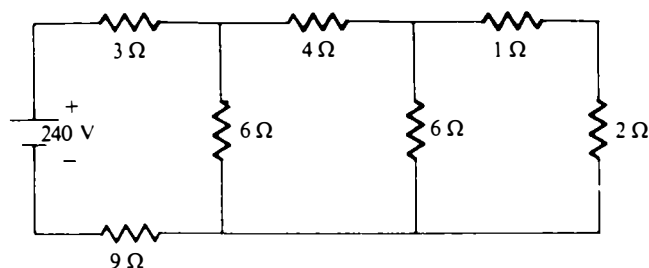


FIG. 7.40

*Solution:* Les tensions nodales sont indiquées à la figure 7.41.

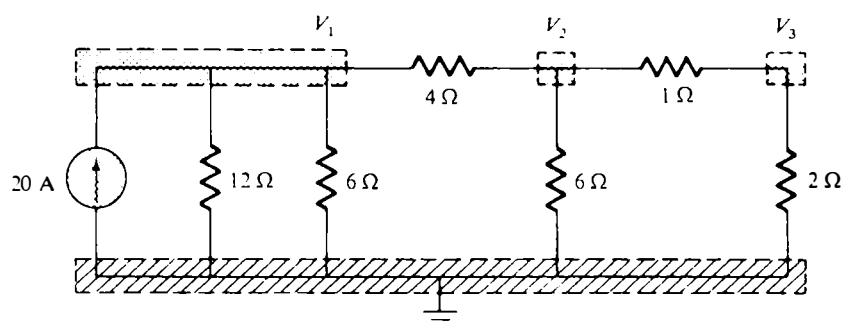


FIG. 7.41

$$V_1: \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right) V_1 - \left(\frac{1}{4}\right) V_2 + 0 = 20$$

$$V_2: \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{1}\right) V_2 - \left(\frac{1}{4}\right) V_1 - \left(\frac{1}{1}\right) V_3 = 0$$

$$V_3: \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right) V_3 - \left(\frac{1}{1}\right) V_2 + 0 = 0$$

et:

$$0,5 V_1 - 0,25 V_2 + 0 = 20$$

$$-0,25 V_1 + \frac{17}{12} V_2 - 1 V_3 = 0$$

$$0 - 1 V_2 + 1,5 V_3 = 0$$



À titre de vérification, on s'assure de la symétrie autour de la diagonale principale. La méthode des déterminants donne le résultat:

$$V_3 = V_{2\Omega} = 10,667 \text{ V}$$

Un autre exemple d'intérêt général est le réseau en pont, que nous étudierons à la section 7.12.

Dans diverses situations, il peut sembler impossible de faire l'analyse par noeuds d'un réseau. Mais souvent le problème peut être résolu par l'élimination ou l'introduction de certains composants. Ainsi dans le réseau illustré à la figure 7.42a, la source de tension ne peut pas être transposée en une source de courant puisqu'aucune résistance n'est en série avec elle.

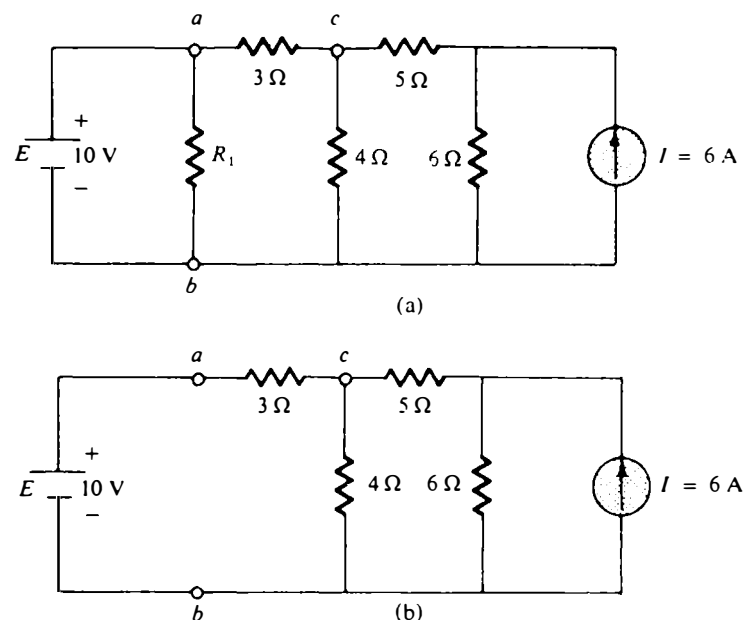


FIG. 7.42

On note par contre que la tension  $V_{ab}$  aux bornes de la résistance  $R_1$  est toujours égale à la tension de la source ( $E = 10 \text{ V}$ ), peu importe la valeur ohmique de cette résistance. Cette dernière n'influe donc pas sur les tensions  $V_{ab}$ ,  $V_{ac}$  ou sur toute autre tension du réseau. Les seules grandeurs intéressantes en analyse par noeuds étant les tensions, la résistance  $R_1$  peut donc être supprimée. On n'en tiendra compte qu'une fois l'analyse terminée, s'il est nécessaire de déterminer le courant qui la traverse ou le courant qui traverse la batterie. Mais une fois la résistance  $R_1$  supprimée du réseau, la batterie est en série avec une résistance (figure 7.42b); il est alors possible d'appliquer l'analyse par noeuds au réseau, après transposition de la source de tension en une source de courant.

## 7.12 RÉSEAUX EN PONT

Le réseau en pont connaît une multitude d'applications. Dans les chapitres qui suivent, nous verrons qu'il est employé cou-



ramment dans les appareils de mesure en courant continu ou alternatif. On l'étudie très tôt dans un cours d'électronique, car il est employé dans les circuits redresseurs qui transforment un signal variable en un signal continu (redressement du courant alternatif en courant continu). Le réseau en pont est également employé dans de nombreux autres domaines mais comme ceux-ci nécessitent une certaine connaissance des réseaux à courant alternatif, ils ne seront étudiés que plus tard. Le réseau en pont peut se présenter sous l'une des trois formes illustrées à la figure 7.43. Le réseau illustré à la figure 7.43c est également

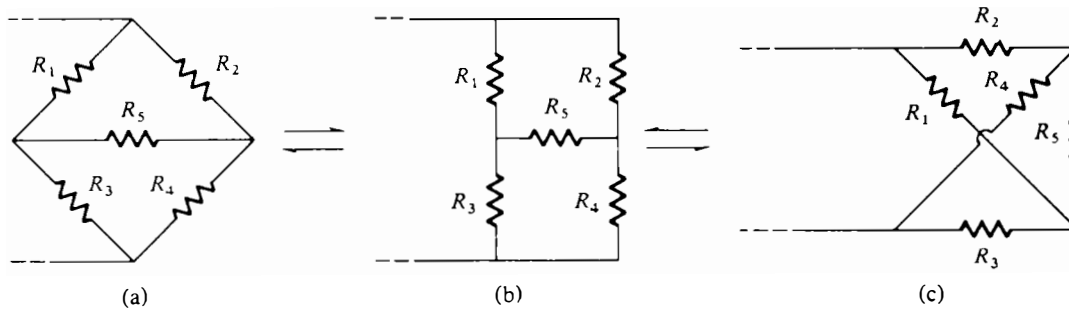


FIG. 7.43 Réseau en pont.

appelé réseau maillé symétrique si  $R_2 = R_3$  et si  $R_1 = R_4$ . La figure 7.43c est un exemple de réseau plan qui semble ne pas en être un. Étudions maintenant le réseau illustré à la figure 7.44 en ayant recours à l'analyse par mailles et à l'analyse par noeuds.

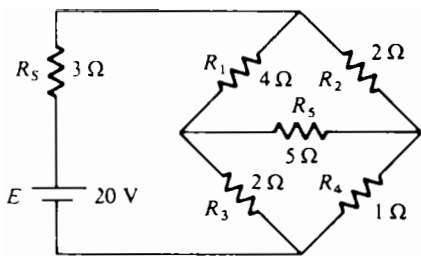


FIG. 7.44

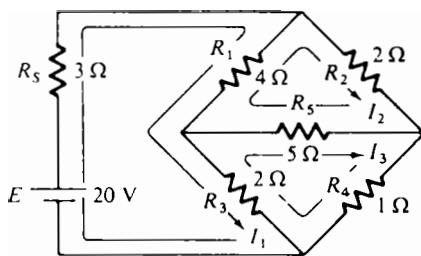


FIG. 7.45

L'analyse par mailles (figure 7.45) donne:

$$\begin{aligned} (3 + 4 + 2)I_1 - (4)I_2 - (2)I_3 &= 20 \\ (4 + 5 + 2)I_2 - (4)I_1 - (5)I_3 &= 0 \\ (2 + 5 + 1)I_3 - (2)I_1 - (5)I_2 &= 0 \end{aligned}$$

et:

$$\begin{aligned} 9I_1 - 4I_2 - 2I_3 &= 20 \\ -4I_1 + 11I_2 - 5I_3 &= 0 \\ -2I_1 - 5I_2 + 8I_3 &= 0 \end{aligned}$$

avec comme résultat:

$$\begin{aligned} I_1 &= 4 \text{ A} \\ I_2 &= 2\frac{2}{3} \text{ A} \\ I_3 &= 2\frac{2}{3} \text{ A} \end{aligned}$$

Le courant net qui traverse la résistance de 5 Ω est:

$$I_{5\Omega} = I_2 - I_3 = 2\frac{2}{3} - 2\frac{2}{3} = 0 \text{ A}$$



L'analyse par noeuds (figure 7.46) donne:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) V_1 - \left(\frac{1}{4}\right) V_2 - \left(\frac{1}{2}\right) V_3 &= \frac{20}{3} \\ \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) V_2 - \left(\frac{1}{4}\right) V_1 - \left(\frac{1}{5}\right) V_3 &= 0 \\ \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1}\right) V_3 - \left(\frac{1}{2}\right) V_1 - \left(\frac{1}{5}\right) V_2 &= 0 \end{aligned}$$

et:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) V_1 - \left(\frac{1}{4}\right) V_2 - \left(\frac{1}{2}\right) V_3 &= \frac{20}{3} \\ -\left(\frac{1}{4}\right) V_1 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) V_2 - \left(\frac{1}{5}\right) V_3 &= 0 \\ -\left(\frac{1}{2}\right) V_1 - \left(\frac{1}{5}\right) V_2 + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1}\right) V_3 &= 0 \end{aligned}$$

À noter la symétrie de la solution. Les résultats sont:

$$\begin{aligned} V_1 &= 8 \text{ V} \\ V_2 &= 2\frac{2}{3} \text{ V} \\ V_3 &= 2\frac{2}{3} \text{ V} \end{aligned}$$

et la tension aux bornes de la résistance de 5 Ω est:

$$V_{5\Omega} = V_2 - V_3 = 2\frac{2}{3} - 2\frac{2}{3} = 0 \text{ V}$$

Comme  $V_{5\Omega} = 0 \text{ V}$ , on peut remplacer cette branche du pont par un court-circuit sans que cela n'influe sur le reste du réseau, car  $V = IR = I \times 0 = 0 \text{ V}$ . Cette substitution est faite à la figure 7.47, la tension aux bornes de  $R_4$  étant à déterminer. Le réseau est redessiné à la figure 7.48; on a:

$$\begin{aligned} V_{1\Omega} &= \frac{(2 \parallel 1)20}{(2 \parallel 1) + (4 \parallel 2) + 3} \quad (\text{règle du diviseur de tension}) \\ &= \frac{\frac{2}{3}(20)}{\frac{2}{3} + \frac{8}{6} + 3} = \frac{\frac{2}{3}(20)}{\frac{2}{3} + \frac{4}{3} + \frac{9}{3}} \\ &= \frac{2(20)}{2 + 4 + 9} = \frac{40}{15} = 2\frac{2}{3} \text{ V} \end{aligned}$$

résultat identique à celui ci-dessus.

L'analyse par mailles a permis de trouver que  $I_{5\Omega} = 0 \text{ A}$ , ce qui fait que cette branche est l'équivalent d'un circuit ouvert, comme l'illustre la figure 7.49, car:

$$I = V/R = \frac{0}{\infty} = 0 \text{ A}$$

La tension aux bornes de la résistance  $R_4$  reste à déterminer et à comparer au résultat ci-dessus.

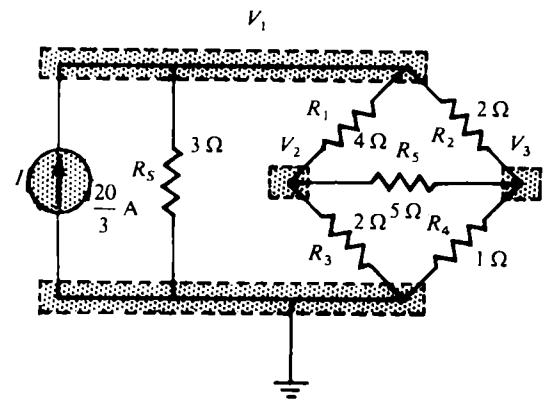


FIG. 7.46

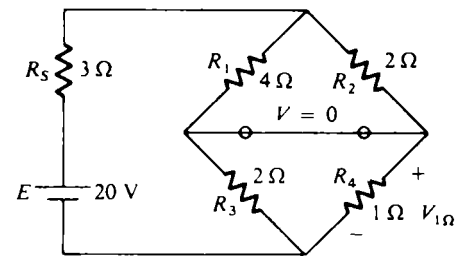


FIG. 7.47

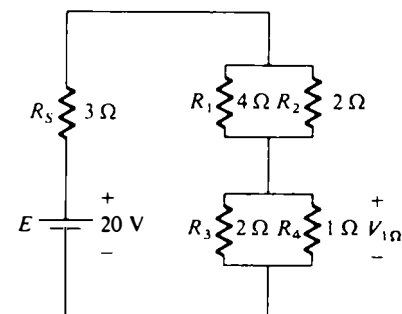


FIG. 7.48



Après combinaison des éléments en série, on obtient le réseau illustré à la figure 7.49b; on a alors:

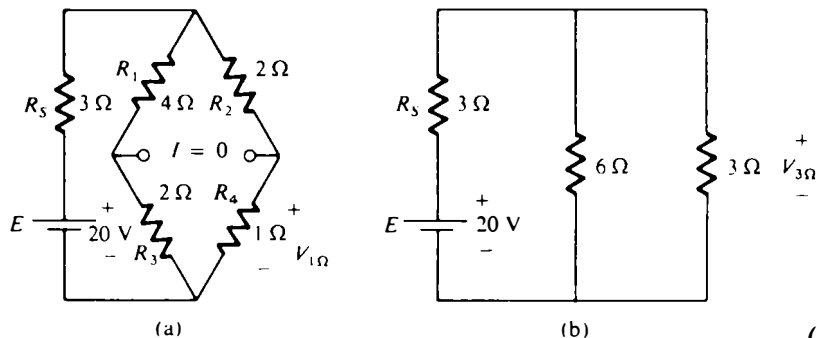


FIG. 7.49

$$V_{3\Omega} = \frac{(6 \parallel 3)(20)}{6 \parallel 3 + 3} = \frac{2(20)}{2 + 3} = 8 \text{ V}$$

et:

$$V_{1\Omega} = \frac{1(8)}{1 + 2} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3} \text{ V comme ci-dessus}$$

La condition  $V_{5\Omega} = 0 \text{ V}$  ou  $I_{5\Omega} = 0 \text{ A}$  n'est réalisée que si les valeurs des résistances du réseau sont dans un rapport bien précis. Tentons de déterminer ce rapport à partir du réseau illustré à la figure 7.50, où il est indiqué que  $I = 0 \text{ A}$  et que  $V = 0 \text{ V}$ . Soulignons que la valeur de la résistance  $R_5$  du réseau illustré à la figure 7.49 n'influe pas sur la réalisation de la condition énoncée ci-dessus.

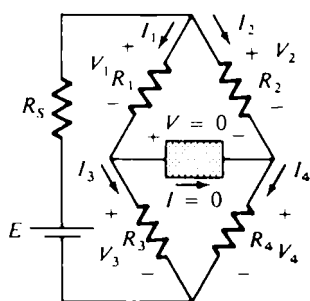


FIG. 7.50

Le réseau en pont est dit à l'équilibre lorsque la condition  $I = 0 \text{ A}$  ou  $V = 0 \text{ V}$  est réalisée. Cette condition d'équilibre est un principe de fonctionnement des appareils de mesure en courant continu, comme nous le verrons au chapitre 12.

Si  $I = 0 \text{ A}$ , alors  $I_1 = I_3$  et  $I_2 = I_4$ ; si par ailleurs  $V = 0 \text{ V}$  (court-circuit entre  $a$  et  $b$ ), on a:

$$V_1 = V_2 \quad \text{et} \quad V_3 = V_4$$

et, par conséquent:

$$I_1 R_1 = I_2 R_2 \quad \text{et} \quad I_3 R_3 = I_4 R_4$$

La substitution  $I_3 = I_1$  et  $I_4 = I_2$  (de ci-dessus) dans l'équation  $I_3 R_3 = I_4 R_4$  donne:

$$I_1 R_3 = I_2 R_4$$

L'équation  $I_1 R_1 = I_2 R_2$  donne comme expression de  $I_2$ :

$$I_2 = \frac{I_1 R_1}{R_2}$$

et, par substitution de cette expression dans l'équation ci-dessus, on a:

$$I_1 R_3 = \left( \frac{I_1 R_1}{R_2} \right) R_4$$

de sorte que:

$$\boxed{\frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4}} \tag{7.7}$$



Cette conclusion signifie que si le rapport entre  $R_1$  et  $R_3$  est égal à celui entre  $R_2$  et  $R_4$ , le pont est à l'équilibre; alors  $I = 0$  A ou  $V = 0$  V. Une technique de mémorisation de cette conclusion est illustrée à la figure 7.51.

Dans l'exemple ci-dessus,  $R_1 = 4 \Omega$ ,  $R_2 = 2 \Omega$ ,  $R_3 = 2 \Omega$ ,  $R_4 = 1 \Omega$  et:

$$\frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4} \Rightarrow \frac{4}{2} = \frac{2}{1}$$

Nous avons insisté sur la condition d'équilibre du pont. Si le pont n'est pas à l'équilibre, il y aura évidemment une chute de potentiel aux bornes de la branche servant normalement à réaliser l'équilibre et celle-ci sera parcourue par un courant. Mais les méthodes étudiées jusqu'à maintenant (analyses par mailles et par noeuds) permettent de déterminer toute chute de potentiel ou tout courant, que le pont soit à l'équilibre ou non.

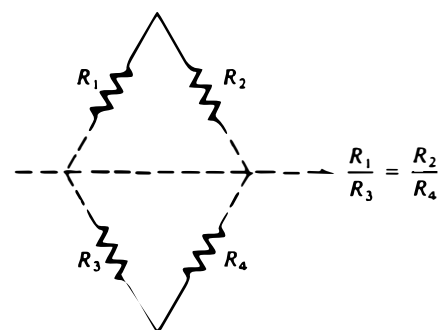


FIG. 7.51

### 7.13 TRANSFIGURATIONS Y-Δ ET Δ-Y

Souvent les réseaux sont constitués de résistances qui ne sont ni en série ni en parallèle. Dans ces conditions, il peut être nécessaire de transfigurer un circuit en un autre de façon à pouvoir déterminer des inconnues, si les analyses par mailles ou par noeuds ne peuvent s'appliquer. Deux circuits particuliers présentent fréquemment ces difficultés: il s'agit des montages en étoile (Y) et en triangle ( $\Delta$ ) illustrés à la figure 7.52a. Ces montages portent aussi les noms de circuit en té (T) et de circuit en pi ( $\pi$ ), respectivement (figure 7.52b).

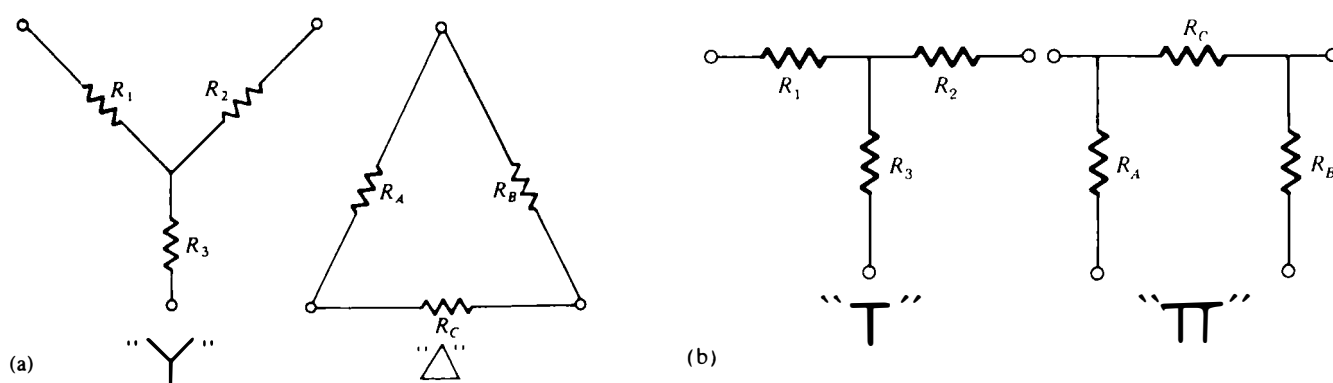


FIG. 7.52

Nous présentons dans la présente section une technique permettant de transfigurer un montage  $\Delta$  en un montage Y, et vice versa. Ce type de transfiguration donne habituellement comme résultat un réseau auquel peuvent s'appliquer les techniques décrites au chapitre 6. Autrement dit, si sur le réseau

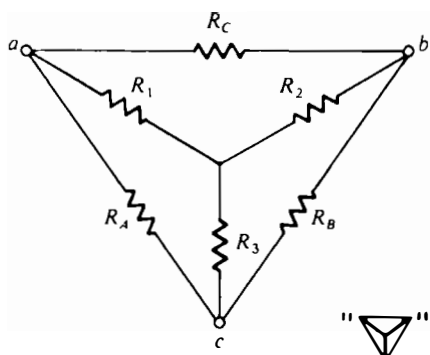


FIG. 7.53

illustré à la figure 7.52, dont nous garderons fixes les bornes  $a$ ,  $b$  et  $c$ , nous désirons obtenir un montage en étoile (Y) *au lieu* d'un montage en triangle ( $\Delta$ ), tout ce qu'il est nécessaire de faire c'est d'appliquer directement les équations que nous allons établir. Nous avons mis les mots *au lieu* en italique, afin de bien souligner qu'un seul des deux montages doit apparaître à la fois entre les bornes indiquées.

Notre but est donc d'établir une relation quelconque entre les résistances  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$ , d'une part, et  $R_A$ ,  $R_B$  et  $R_C$ , d'autre part (voir la figure 7.53). Comme point de départ, on peut supposer que la résistance totale entre deux bornes quelconques sera la même dans l'un ou l'autre des circuits, puisque ces derniers sont équivalents. Prenons donc les bornes  $a$  et  $c$  dans les montages  $\Delta$ -Y illustrés à la figure 7.54.

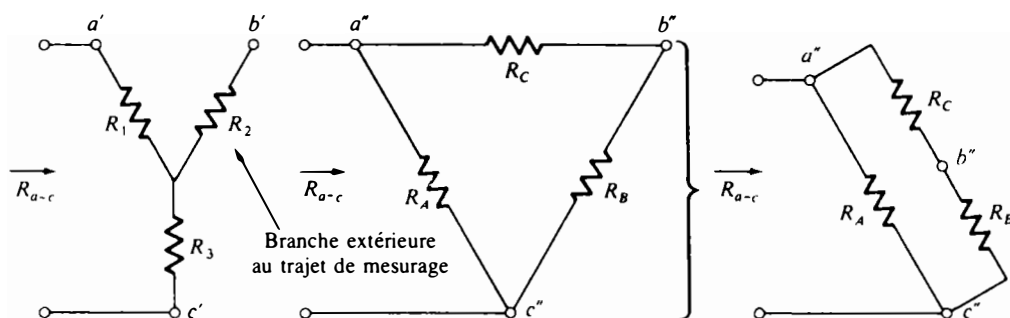


FIG. 7.54

Supposons d'abord que nous désirons transfigurer le montage  $\Delta$  ( $R_A$ ,  $R_B$  et  $R_C$ ) en un montage Y ( $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$ ). Il nous faut donc une relation permettant d'exprimer les résistances  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$  en termes des résistances  $R_A$ ,  $R_B$  et  $R_C$ . La résistance entre les bornes  $a$  et  $c$  dans les deux montages étant la même, on peut écrire:

$$R_{a-c} = R_{a'-c'} = R_{a''-c''}$$

de sorte que:

$$R_1 + R_3 = \frac{R_A(R_B + R_C)}{R_A + (R_B + R_C)} \quad (7.8a)$$

En adoptant la même approche pour les bornes  $a$  et  $b$ , d'une part, et pour les bornes  $b$  et  $c$ , d'autre part, on obtient:

$$R_{a-b} = R_1 + R_2 = \frac{R_C(R_A + R_B)}{R_C + (R_A + R_B)} \quad (7.8b)$$

$$R_{b-c} = R_2 + R_3 = \frac{R_B(R_A + R_C)}{R_B + (R_A + R_C)} \quad (7.8c)$$

La soustraction de l'équation (7.8a) de l'équation (7.8b) donne:

$$(R_1 + R_2) - (R_1 + R_3) = \left( \frac{R_C R_A + R_C R_B}{R_A + R_B + R_C} \right) - \left( \frac{R_A R_B + R_A R_C}{R_A + R_B + R_C} \right)$$



de sorte que:

$$R_2 - R_3 = \frac{R_B R_C - R_A R_B}{R_A + R_B + R_C} \quad (7.8d)$$

La soustraction de l'équation (7.8d) de l'équation (7.8c) donne:

$$(R_2 + R_3) - (R_2 - R_3) = \left( \frac{R_B R_A + R_B R_C}{R_A + R_B + R_C} \right) - \left( \frac{R_B R_C - R_A R_B}{R_A + R_B + R_C} \right)$$

de sorte que:

$$2R_3 = \frac{2R_A R_B}{R_A + R_B + R_C}$$

ce qui permet d'écrire l'expression suivante pour  $R_3$ , en termes de  $R_A$ ,  $R_B$  et  $R_C$ :

$$R_3 = \frac{R_A R_B}{R_A + R_B + R_C} \quad (7.9a)$$

En suivant la même méthode pour  $R_1$  et pour  $R_2$ , on obtient:

$$R_1 = \frac{R_A R_C}{R_A + R_B + R_C} \quad (7.9b)$$

$$R_2 = \frac{R_B R_C}{R_A + R_B + R_C} \quad (7.9c)$$

**À noter que la résistance d'une branche du montage Y est égale au produit des résistances des deux branches les plus rapprochées du montage Δ, divisé par la somme des résistances du montage Δ.**

Pour établir les relations nécessaires à la transfiguration d'un montage Y en un montage Δ, on divise d'abord l'équation (7.9a) par l'équation (7.9b):

$$\frac{R_3}{R_1} = \frac{(R_A R_B)/(R_A + R_B + R_C)}{(R_A R_C)/(R_A + R_B + R_C)} = \frac{R_B}{R_C}$$

ou:

$$R_B = \frac{R_C R_3}{R_1}$$

On divise ensuite l'équation (7.9a) par l'équation (7.9c):

$$\frac{R_3}{R_2} = \frac{(R_A R_B)/(R_A + R_B + R_C)}{(R_B R_C)/(R_A + R_B + R_C)} = \frac{R_A}{R_C}$$

ou:

$$R_A = \frac{R_3 R_C}{R_2}$$





La substitution des expressions de  $R_A$  et de  $R_B$  dans l'équation (7.9c) donne:

$$R_2 = \frac{(R_C R_3 / R_1) R_C}{(R_3 R_C / R_2) + (R_C R_3 / R_1) + R_C}$$

$$= \frac{(R_3 / R_1) R_C}{(R_3 / R_2) + (R_3 / R_1) + 1}$$

En multipliant le dénominateur de cette expression par  $R_1 R_2 / R_1 R_2$ , on a:

$$R_2 = \frac{(R_3 R_C / R_1)}{(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3) / (R_1 R_2)}$$

$$= \frac{R_2 R_3 R_C}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

et:

$$R_C = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_3} \quad (7.10a)$$

En suivant la même méthode pour  $R_B$  et pour  $R_A$ , on a:

$$R_B = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_1} \quad (7.10b)$$

et:

$$R_A = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_2} \quad (7.10c)$$

À noter que la valeur de la résistance d'une branche du montage  $\Delta$  est égale à la somme de tous les produits possibles des résistances prises deux à deux du montage  $Y$ , divisée par la résistance de la branche la plus éloignée du montage  $Y$ .

Voyons maintenant ce qui se produit si toutes les valeurs des résistances d'un montage  $\Delta$  et  $Y$  sont les mêmes. Si  $R_A = R_B = R_C$ , l'équation (7.9a) devient en termes de  $R_A$ :

$$R_3 = \frac{R_A R_B}{R_A + R_B + R_C} = \frac{R_A R_A}{R_A + R_A + R_A} = \frac{R_A^2}{3R_A} = \frac{R_A}{3}$$

et, à l'aide de la même méthode:

$$R_1 = \frac{R_A}{3} \quad R_2 = \frac{R_A}{3}$$

En règle générale, on a donc:

$$R_Y = \frac{R_\Delta}{3} \quad (7.11a)$$

ou:

$$R_\Delta = 3R_Y \quad (7.11b)$$



ce qui indique que pour un montage Y constitué de trois résistances de même valeur, la valeur de chaque résistance du montage Δ est égale au triple de la valeur ohmique des résistances du montage Y. Si seulement deux résistances d'un montage Y ou Δ sont les mêmes, les montages Δ ou Y transfigurés comptent aussi deux résistances de même valeur. L'établissement des équations de transfiguration est laissé à titre d'exercice.

Les montages Y et Δ apparaissent fréquemment sous la forme illustrée à la figure 7.55. Ils sont alors respectivement appelés circuit en té (T) et circuit en pi (π). Les équations de transfiguration pour ces deux montages sont exactement les mêmes que celles que nous avons établies pour les montages Y et Δ.

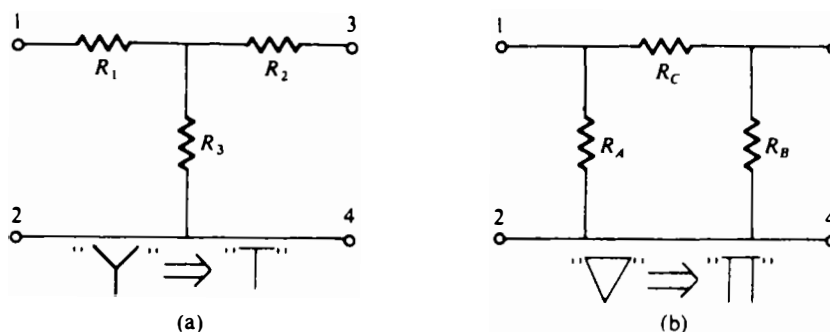


FIG. 7.55

**EXEMPLE 7.25** Transfigurer le montage en triangle illustré à la figure 7.56 en un montage en étoile.

Solution:

$$R_1 = \frac{R_A R_C}{R_A + R_B + R_C} = \frac{(20)(10)}{20 + 30 + 10} = \frac{200}{60} = 3\frac{1}{3} \Omega$$

$$R_2 = \frac{R_B R_C}{R_A + R_B + R_C} = \frac{(30)(10)}{60} = \frac{300}{60} = 5 \Omega$$

$$R_3 = \frac{R_A R_B}{R_A + R_B + R_C} = \frac{(20)(30)}{60} = \frac{600}{60} = 10 \Omega$$

Le réseau équivalent est illustré à la figure 7.57.

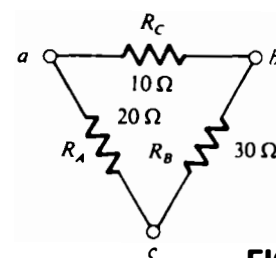


FIG. 7.56

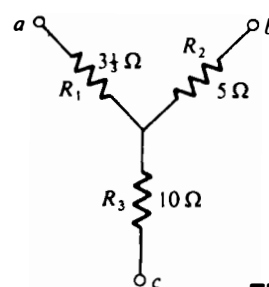


FIG. 7.57

**EXEMPLE 7.26** Transfigurer le montage en étoile illustré à la figure 7.58 en un montage en triangle.

Solution:

$$\begin{aligned} R_A &= \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_2} \\ &= \frac{(60)(60) + (60)(60) + (60)(60)}{60} \\ &= \frac{3600 + 3600 + 3600}{60} = \frac{10\ 800}{60} \end{aligned}$$

$$R_A = 180 \Omega$$

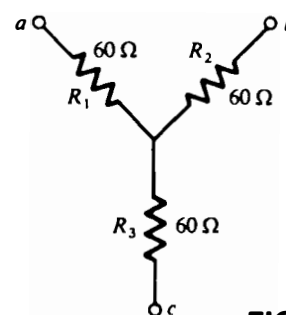


FIG. 7.58

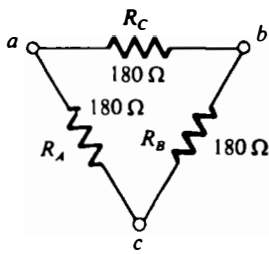


FIG. 7.59

Les trois résistances du montage en étoile sont toutefois égales, ce qui permet d'utiliser l'équation (7.11) et d'écrire:

$$R_A = 3R_Y = 3(60) = 180 \Omega$$

et:

$$R_B = R_C = 180 \Omega$$

Le réseau équivalent est illustré à la figure 7.59.

**EXEMPLE 7.27** Calculer la résistance totale du réseau illustré à la figure 7.60, dans lequel  $R_A = 3 \Omega$ ,  $R_B = 3 \Omega$  et  $R_C = 6 \Omega$ .

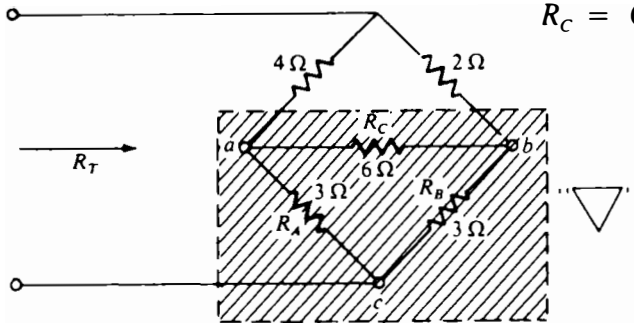


FIG. 7.60

*Solution:*

Deux résistances du montage Δ sont égales; par conséquent, le montage Y compte aussi deux résistances de même valeur.

$$R_1 = \frac{R_A R_C}{R_A + R_B + R_C} = \frac{(3)(6)}{3 + 3 + 6} = \frac{18}{12} = 1,5 \Omega$$

$$R_2 = \frac{R_B R_C}{R_A + R_B + R_C} = \frac{(3)(6)}{12} = \frac{18}{12} = 1,5 \Omega$$

$$R_3 = \frac{R_A R_B}{R_A + R_B + R_C} = \frac{(3)(3)}{12} = \frac{9}{12} = 0,75 \Omega$$

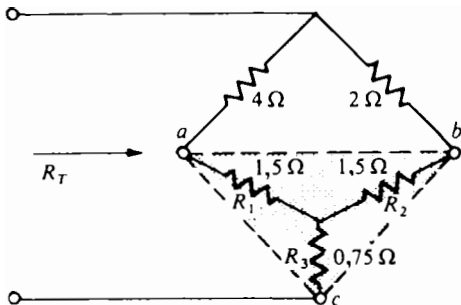


FIG. 7.61

Dans le montage en étoile résultant (figure 7.61), on peut écrire:

$$R_T = 0,75 + \frac{(4 + 1,5)(2 + 1,5)}{(4 + 1,5) + (2 + 1,5)}$$

$$= 0,75 + \frac{(5,5)(3,5)}{5,5 + 3,5}$$

$$= 0,75 + 2,14$$

$$R_T = 2,89 \Omega$$

**EXEMPLE 7.28** Calculer la résistance totale du réseau illustré à la figure 7.62.

*Solution:* Puisque toutes les résistances du montage en étoile ou du montage en triangle sont les mêmes, on peut utiliser les équations (7.11a) et (7.11b) pour passer d'un montage à l'autre.

a. *Transfiguration du montage en triangle en un montage en étoile.* Le point *d*' du montage en étoile sera le même que le point *d* du montage en triangle, les deux montages étant à

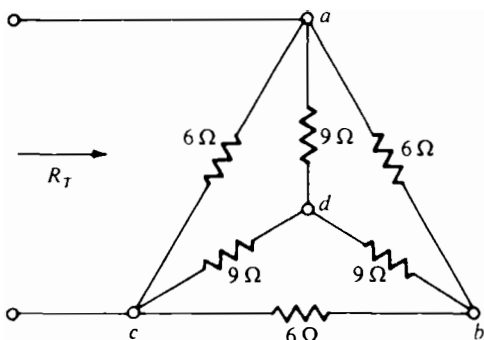


FIG. 7.62



l'équilibre: autrement dit, cela est vrai parce que dans chaque montage toutes les branches ont la même valeur ohmique:

$$R_Y = \frac{R_\Delta}{3} = \frac{6}{3} = 2 \Omega \quad (\text{Figure 7.63})$$

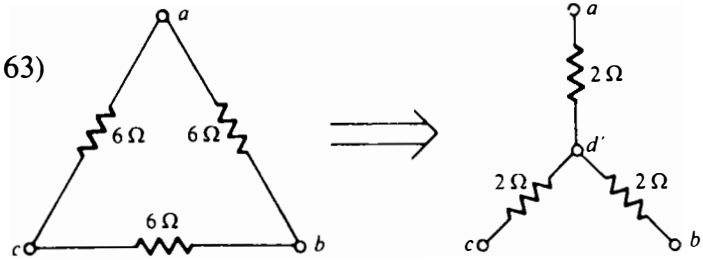


FIG. 7.63

Le circuit original est redessiné à la figure 7.64. On a:

$$R_T = 2 \left[ \frac{(2)(9)}{2 + 9} \right] = 2(1,64) = 3,2727 \Omega$$

b. Transfiguration du montage en étoile en un montage en triangle.

$$R_\Delta = 3R_Y$$

$$R_\Delta = (3)(9) = 27 \Omega \quad (\text{Figure 7.65})$$

$$R'_T = \frac{(6)(27)}{6 + 27} = \frac{162}{33} = 4,9091 \Omega$$

$$R_T = \frac{R'_T(R'_T + R'_T)}{R'_T + (R'_T + R'_T)} = \frac{R'_T 2R'_T}{3R'_T} = \frac{2R'_T}{3} = \frac{2(4,9091)}{3}$$

et  $R_T = 3,2727 \Omega$ , ce qui est en accord avec le résultat déjà obtenu.

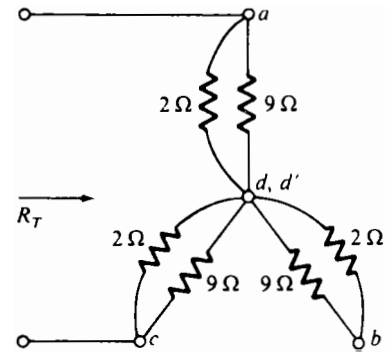


FIG. 7.64

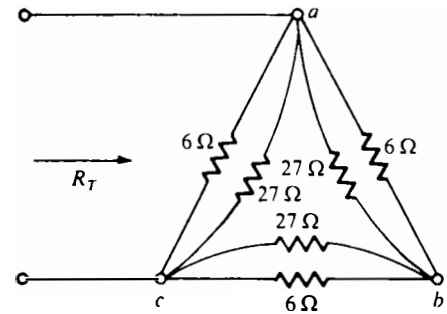


FIG. 7.65

## PROBLÈMES

### Section 7.2

- Déterminez la tension  $V_{ab}$  (et sa polarité) dans le réseau illustré à la figure 7.66.

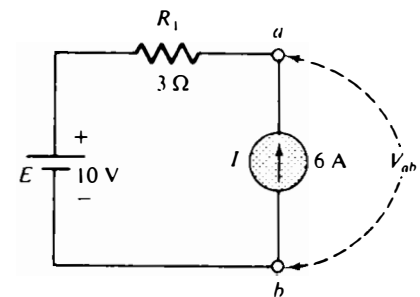


FIG. 7.66

- Voir le réseau illustré à la figure 7.67.

- Déterminez les tensions  $V_S$  et  $V_4$ .
- Déterminez le courant  $I_2$ .

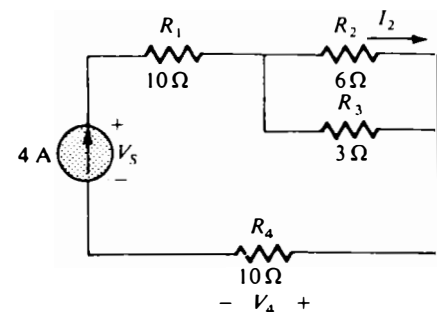


FIG. 7.67

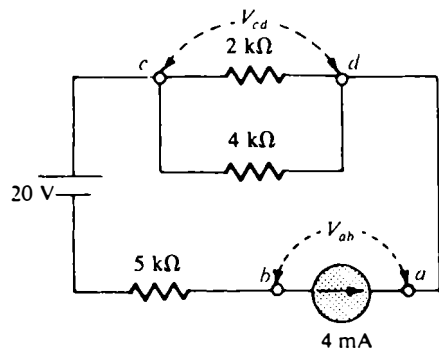


FIG. 7.68

\*3. Voir le réseau illustré à la figure 7.68.

- a. Déterminez la tension  $V_{ab}$  et la polarité des points  $a$  et  $b$ .
- b. Déterminez la tension  $V_{cd}$  et la polarité des points  $c$  et  $d$ .

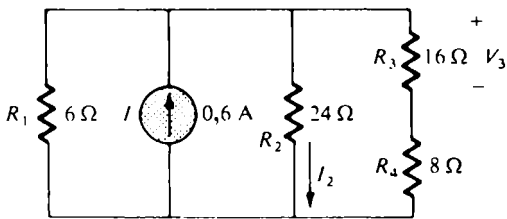
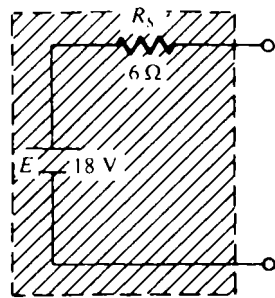


FIG. 7.69

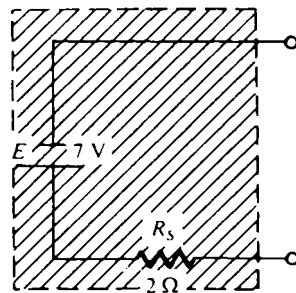
4. Déterminez la tension  $V_3$  et le courant  $I_2$  dans le réseau illustré à la figure 7.69.

Section 7.3

5. Transposez les sources de tension illustrées à la figure 7.70 en des sources de courant.



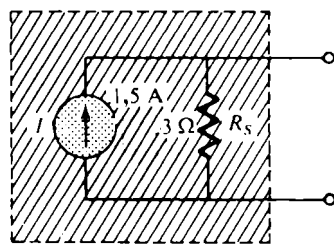
(a)



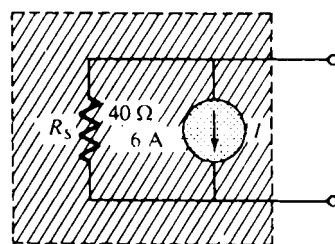
(b)

FIG. 7.70

6. Transposez les sources de courant illustrées à la figure 7.71 en des sources de tension.



(a)



(b)

FIG. 7.71

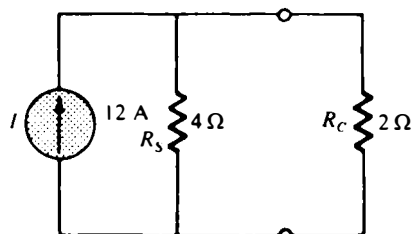


FIG. 7.72

Voir le réseau illustré à la figure 7.72.

- a. Déterminez le courant qui traverse la résistance de  $2 \Omega$ .
- b. Transposez en une source de tension le montage parallèle de la source de courant et de la résistance de  $4 \Omega$ , puis déterminez à nouveau le courant qui passe dans la résistance de  $2 \Omega$ . Comparez les résultats.



8. Voir le réseau illustré à la figure 7.73.
  - a. Transposez en une source de tension le montage parallèle de la source de courant et de la résistance de  $6\ \Omega$ .
  - b. Déterminez l'intensité et le sens du courant  $I$ .
  - c. Déterminez la tension  $V_{ab}$  et la polarité des points  $a$  et  $b$ .

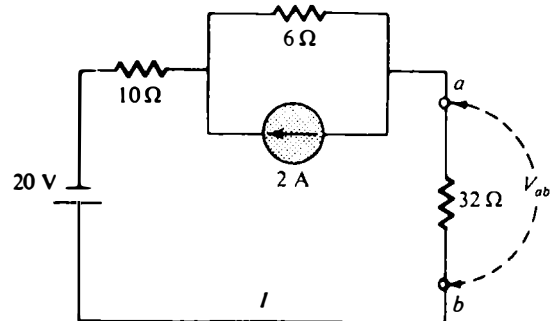


FIG. 7.73

Section 7.4

9. Déterminez la tension  $V_2$  et le courant  $I_1$  dans le réseau illustré à la figure 7.74.

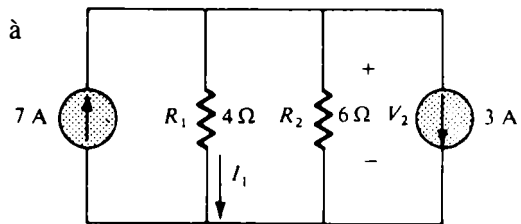


FIG. 7.74

10. a. Transposez en des sources de courant les sources de tens illustrées à la figure 7.75.
- b. Déterminez l'intensité et le sens du courant  $I$ .
- c. Déterminez la tension  $V_{ab}$  et la polarité des points  $a$  et  $b$ .

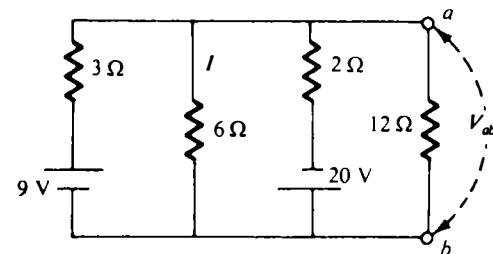


FIG. 7.75

- \*11. Voir le réseau illustré à la figure 7.76.
  - a. Déterminez les courants  $I_2$  et  $I_5$ .
  - b. Déterminez la tension  $V_1$ .
  - c. Calculez la puissance fournie à  $R_2$ .

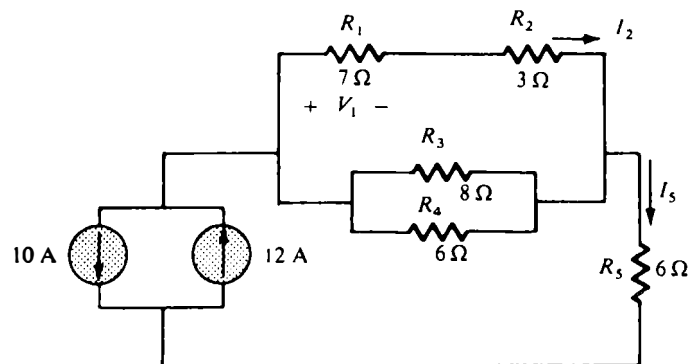


FIG. 7.76



Section 7.6

12. Calculez les déterminants ci-dessous.

a.  $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

b.  $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}$

c.  $\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}$

d.  $\begin{vmatrix} 6 & -9 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}$

13. Calculez les déterminants ci-dessous.

a.  $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

b.  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 9 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

14. Par la méthode des déterminants, résolvez les systèmes d'équations ci-dessous.

a.  $\begin{cases} 4x + 2y = 8 \\ 1x + 3y = 6 \end{cases}$

b.  $\begin{cases} 3x - 6y = 1 \\ 4x - 6y = 2 \end{cases}$

c.  $\begin{cases} 3x + 7y = 0 \\ 5y - 4 = 15x \end{cases}$

d.  $\begin{cases} 5x + 6y - 2z = -8 \\ 5 + y - 6x = -4x \end{cases}$

\*15. Par la méthode des déterminants, résolvez les systèmes d'équations ci-dessous.

a.  $\begin{cases} 2x + 1y + 0z = 6 \\ 0 + 4y + 3z = 12 \\ 8x + 0 + 8z = 18 \end{cases}$

b.  $\begin{cases} 1x + 0y + 2z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 0 \\ -2x + 0y - 6z = 3 \end{cases}$

Section 7.7

16. a. À l'aide de l'analyse par branches, déterminez, dans chacun des réseaux illustrés à la figure 7.77, le courant qui passe dans chacune des résistances.  
 b. Dans chacun des réseaux, déterminez la tension  $V_{ab}$  et la polarité des points  $a$  et  $b$ .

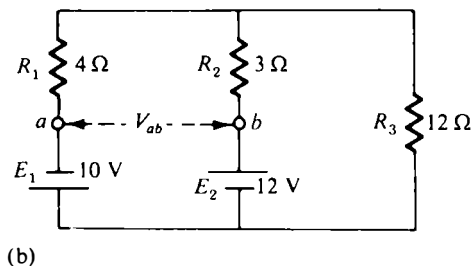
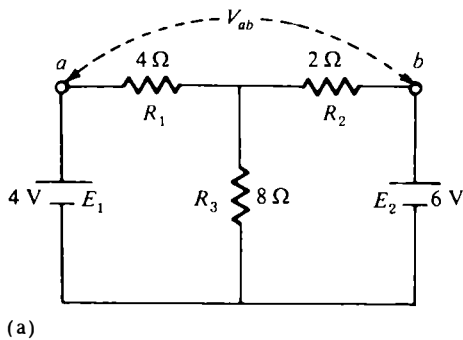


FIG. 7.77

17. Refaites le problème 16 dans le cas des réseaux illustrés à la figure 7.78.

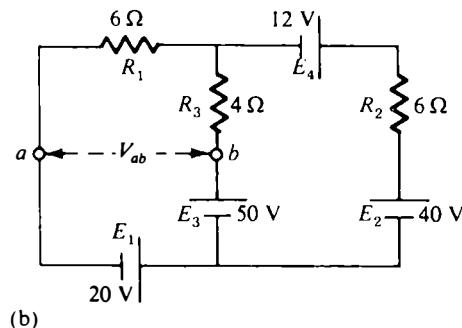
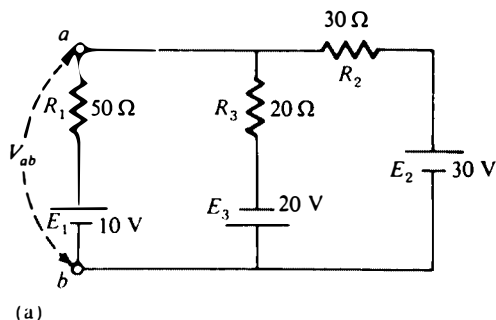


FIG. 7.78



\*18. Refaites le problème 16 dans le cas des réseaux illustrés à la figure 7.79.

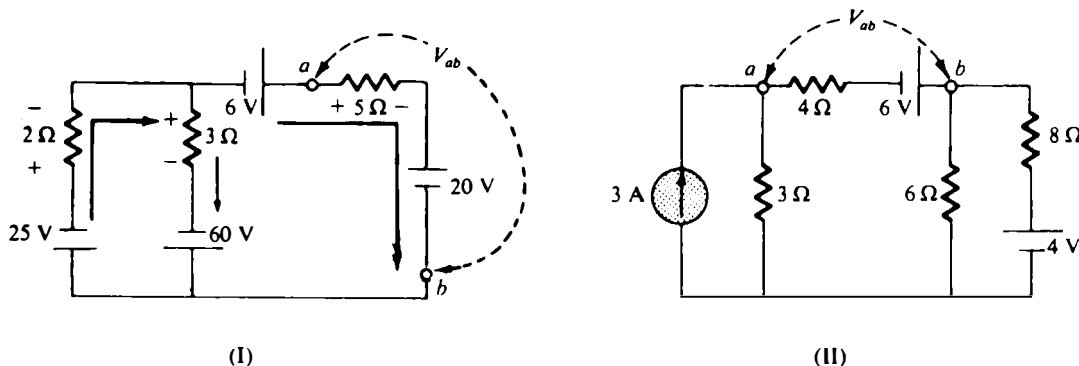


FIG. 7.79

Section 7.8

- 19. Résolvez le problème 16 au moyen de l'analyse par mailles.
- 20. Résolvez le problème 17 au moyen de l'analyse par mailles.
- \*21. Résolvez le problème 18 au moyen de l'analyse par mailles.
- \*22. Au moyen de l'analyse par mailles, déterminez, pour chaque réseau illustré à la figure 7.80, le courant qui passe dans la résistance de 5 Ω.

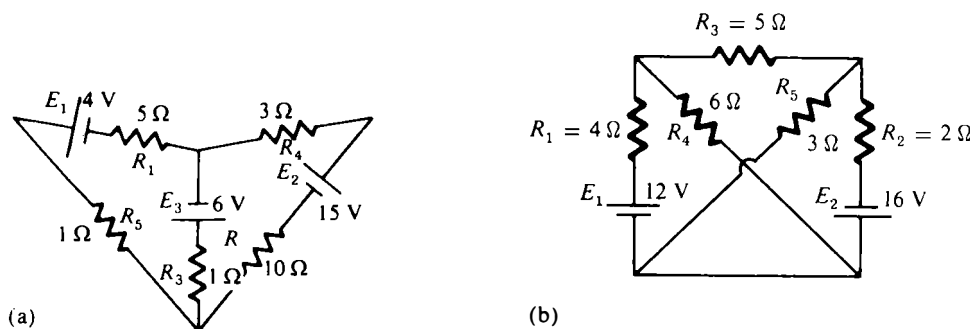


FIG. 7.80

- \*23. a. Écrivez les équations de maille pour chacun des réseaux illustrés à la figure 7.81.
- b. Par la méthode des déterminants, résolvez les systèmes d'équations obtenus.

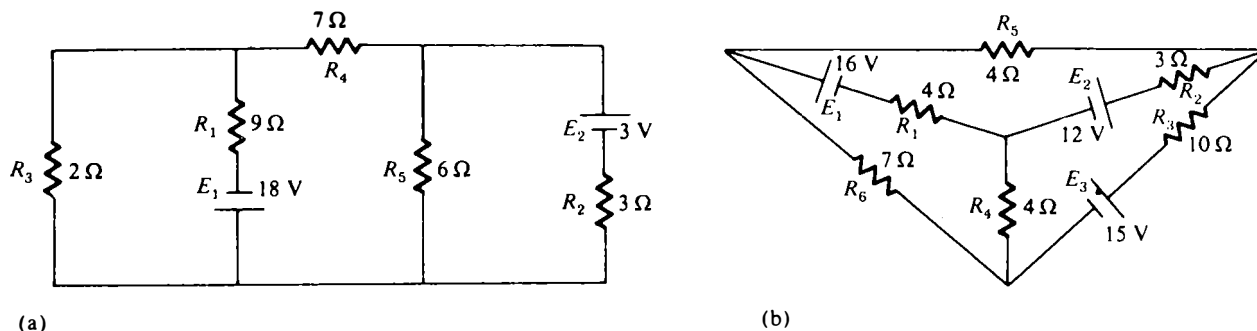


FIG. 7.81





\*24. Refaites le problème 23 dans le cas des réseaux illustrés à la figure 7.82.

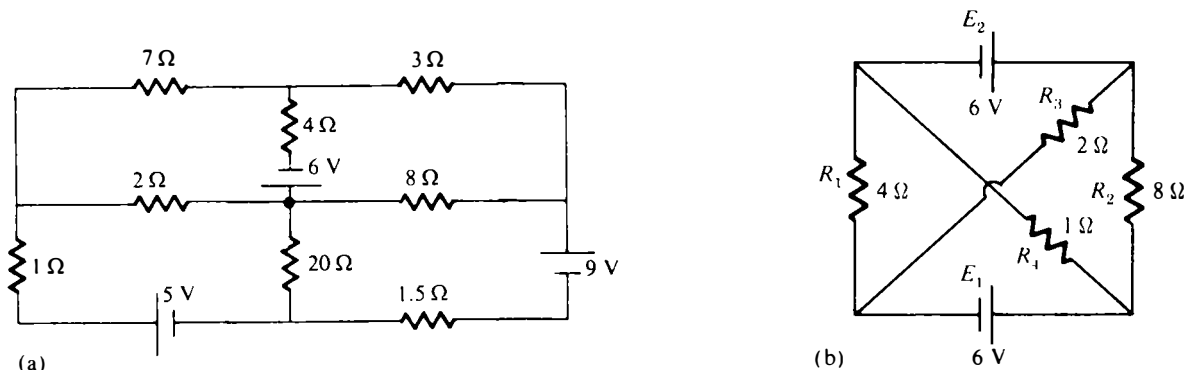


FIG. 7.82

Section 7.9

- 25. a. En suivant l'approche programmée, écrivez les équations de maille pour les réseaux illustrés à la figure 7.77.
- b. Y a-t-il symétrie?
- c. Par la méthode des déterminants, résolvez les systèmes d'équations obtenus.
- 26. Refaites le problème 25 dans le cas des réseaux illustrés à la figure 7.78.
- \*27. Refaites le problème 25 dans le cas des réseaux illustrés à la figure 7.79.
- \*28. Refaites le problème 25 dans le cas des réseaux illustrés à la figure 7.80.
- \*29. Refaites le problème 25 dans le cas des réseaux illustrés à la figure 7.81.
- \*30. Refaites le problème 25 dans le cas des réseaux illustrés à la figure 7.82.

Section 7.11

- 31. a. En suivant l'approche programmée, écrivez les équations nodales pour les réseaux illustrés à la figure 7.83.
- b. Y a-t-il symétrie?
- c. Par la méthode des déterminants, résolvez les systèmes d'équations obtenus.

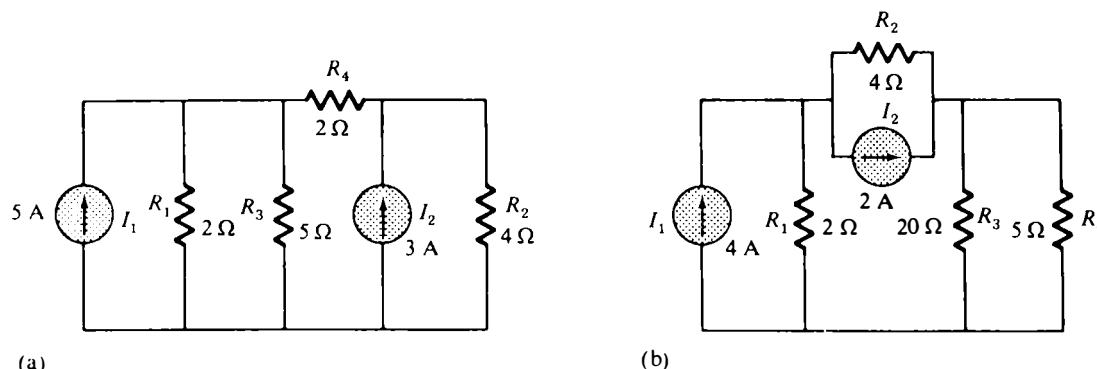
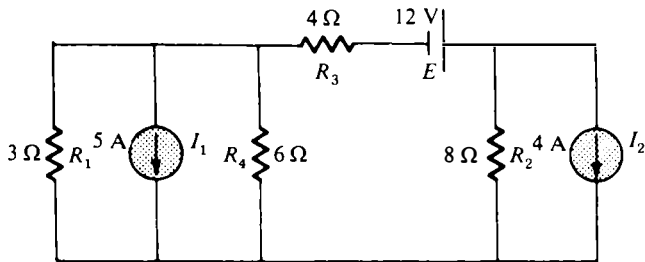


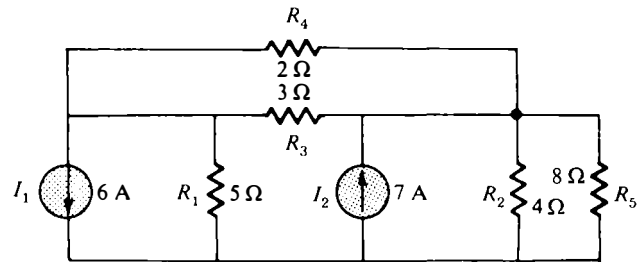
FIG. 7.83



\*32. Refaites le problème 31 dans le cas des réseaux illustrés à la figure 7.84.



(a)

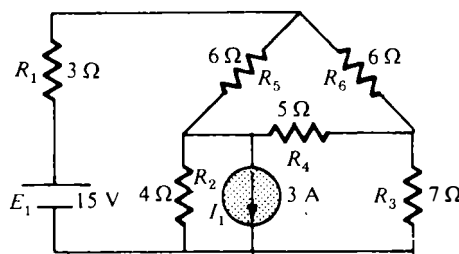


(b)

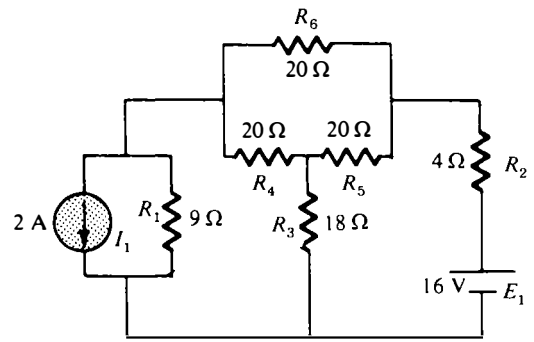
FIG. 7.84

33. Refaites le problème 31 dans le cas des réseaux illustrés à la figure 7.81.

- \*34. Voir les réseaux illustrés à la figure 7.85.
- En suivant l'approche programmée, écrivez les équations nodales.
  - Résolvez le système d'équations obtenu.



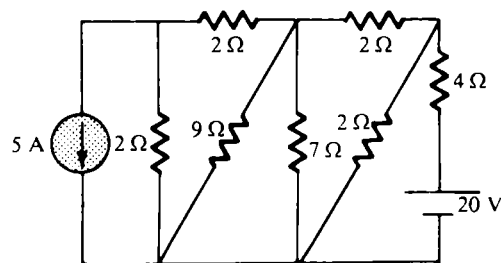
(a)



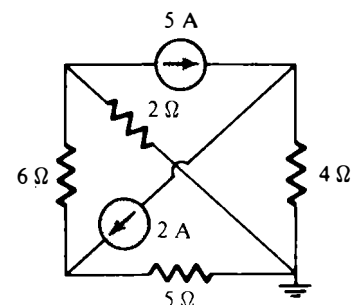
(b)

FIG. 7.85

\*35. Refaites le problème 34 dans le cas des réseaux illustrés à la figure 7.86.



(a)



(b)

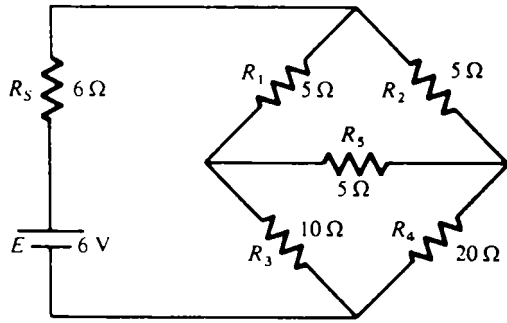


FIG. 7.87

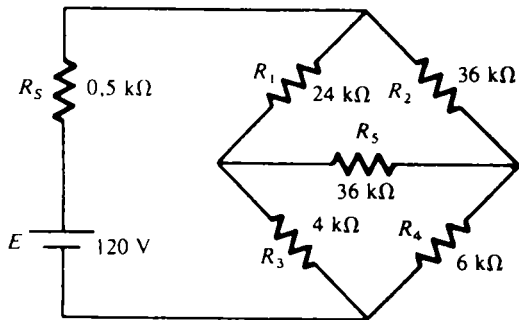


FIG. 7.88

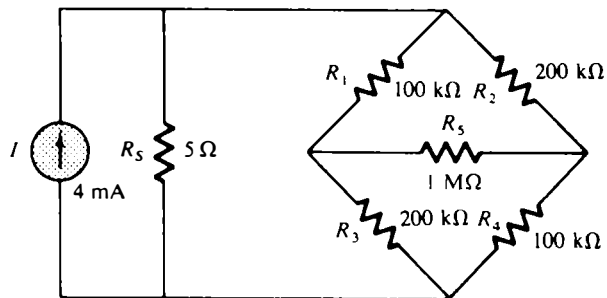


FIG. 7.89

Section 7.12

\*36. Voir le réseau en pont illustré à la figure 7.87.

- a. En suivant l'approche programmée, écrivez les équations de maille.
- b. Déterminez le courant qui traverse  $R_5$ .
- c. Le pont est-il à l'équilibre?
- d. L'équation (7.7) est-elle vérifiée?

\*37. Voir le réseau illustré à la figure 7.87.

- a. En suivant l'approche programmée, écrivez les équations nodales.
- b. Déterminez la tension aux bornes de  $R_5$ .
- c. Le pont est-il à l'équilibre?
- d. L'équation (7.7) est-elle vérifiée?

38. Refaites le problème 36 dans le cas du réseau illustré à la figure 7.88.

\*39. Refaites le problème 37 dans le cas du réseau illustré à la figure 7.88.

40. Écrivez les équations de maille et nodales pour le pont illustré à la figure 7.89. Suivez l'approche programmée.

\*41. a. Refaites le problème 40 dans le cas du réseau illustré à la figure 7.90.

- b. Déterminez le courant qui traverse la source de chacun des réseaux.

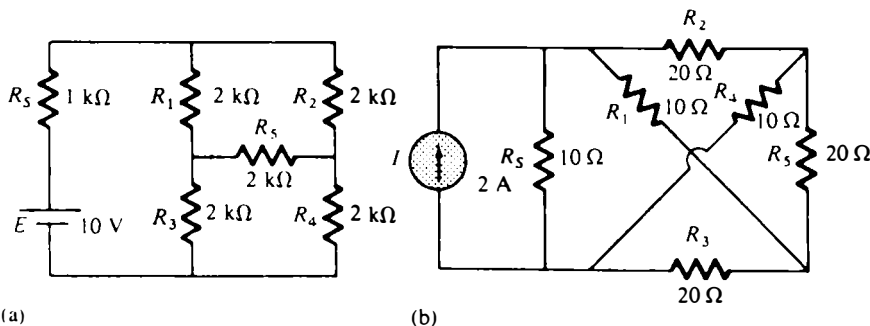


FIG. 7.90



## Section 7.13

42. Au moyen d'une transfiguration  $\Delta$ -Y ou Y- $\Delta$ , déterminez le courant  $I$  dans chacun des réseaux illustrés à la figure 7.91.

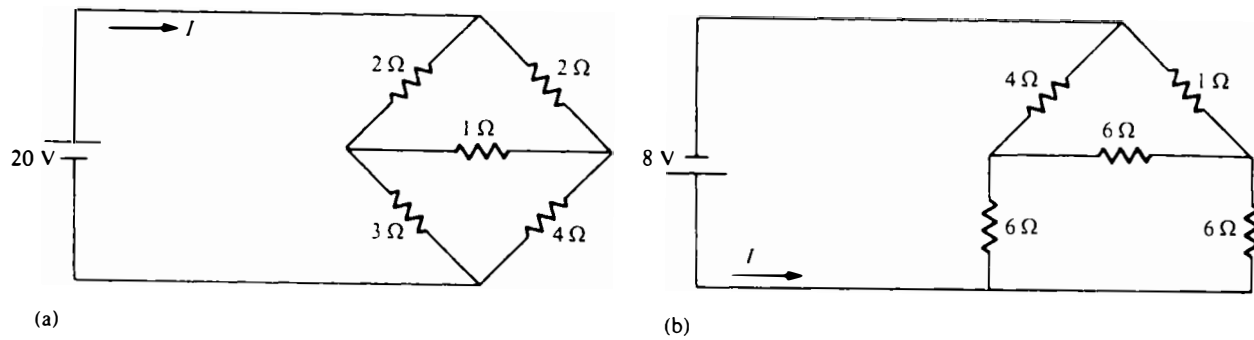


FIG. 7.91

43. Refaites le problème 42 dans le cas des réseaux illustrés à la figure 7.92.

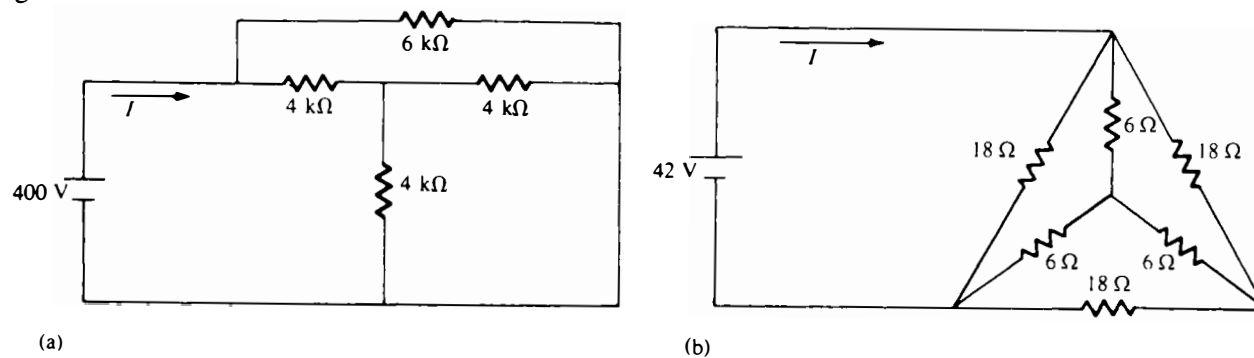


FIG. 7.92

44. Déterminez le courant  $I$  dans le réseau illustré à la figure 7.93.

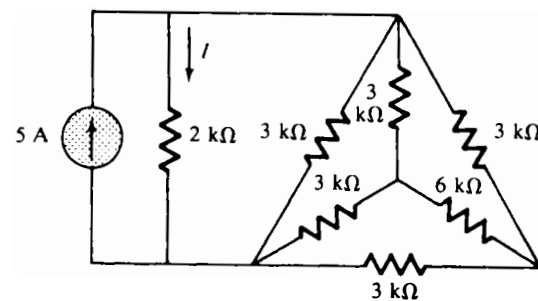


FIG. 7.93

## GLOSSAIRE

**Analyse par branches** Méthode de détermination des courants des branches d'un réseau à plusieurs boucles.

**Analyse par mailles** Méthode de détermination des courants de boucle donnant un ensemble d'équations plus petit que celui obtenu par l'analyse par branches.

**Analyse par noeuds** Méthode de détermination des tensions nodales d'un réseau.

**Courant de boucle** Courant assigné à chacune des boucles d'un réseau, qui permet, seul ou en combinaison avec d'autres courants, de déterminer tous les courants de branches du réseau.



**Montage en étoile (Y) ou en té (T)** Réseau à trois branches ayant la forme de la lettre Y ou de la lettre T.

**Montage en triangle ( $\Delta$ ) ou en pi ( $\pi$ )** Réseau à trois branches ayant la forme d'un triangle ( $\Delta$ ) ou de la lettre grecque pi ( $\pi$ ).

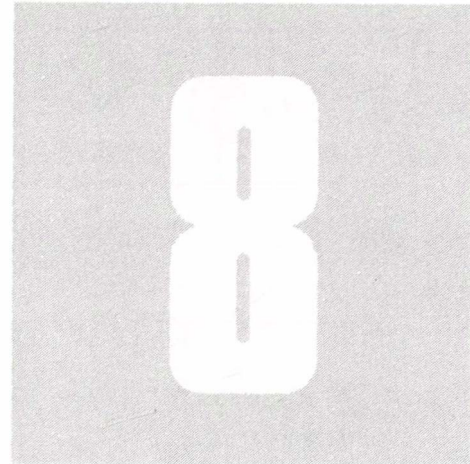
**Méthode des déterminants** Technique mathématique de résolution des systèmes de deux ou plusieurs équations linéaires.

**Noeud** Point de jonction de deux ou plusieurs branches d'un réseau.

**Réseau en pont** Réseau en forme de losange dont les éléments ne sont montés ni en série ni en parallèle.

**Source de courant** Source débitant un courant fixe dans un réseau et dont la tension aux bornes dépend de la configuration du réseau.

# THÉORÈMES DE L'ANALYSE DES CIRCUITS



## 8.1 INTRODUCTION

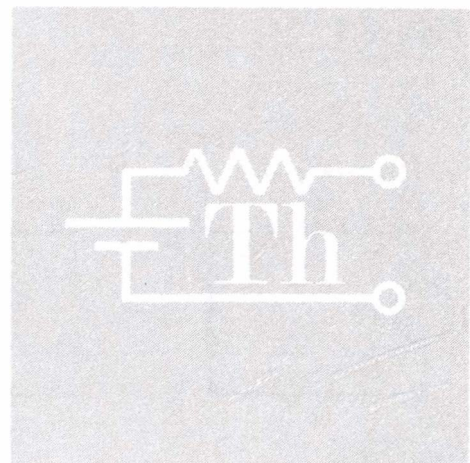
Ce chapitre présente les théorèmes fondamentaux de l'analyse des circuits. Il s'agit des théorèmes *de superposition*, *de Thévenin*, *de Norton*, *du transfert maximal de puissance*, *de substitution*, *de Millman* et *de réciprocité*. Nous examinerons, pour chacun, un certain nombre d'applications. Il est essentiel de comprendre ces théorèmes, car ils sont souvent utilisés dans ce manuel.

## 8.2 THÉORÈME DE SUPERPOSITION

Au même titre que les méthodes présentées au chapitre précédent, le *théorème de superposition* peut servir à l'analyse des réseaux comptant deux ou plusieurs sources qui ne sont montées ni en série ni en parallèle. Son avantage principal est qu'il ne nécessite pas l'emploi de techniques mathématiques élaborées comme la méthode des déterminants. Chaque source est plutôt traitée séparément, la détermination d'une inconnue du réseau se faisant par simple somme algébrique. Autrement dit, pour un réseau comptant  $n$  sources, il faut analyser  $n$  réseaux série-parallèle indépendants avant de parvenir à une solution.

Le théorème s'énonce ainsi:

*Le courant qui traverse un élément (ou la tension présente aux bornes de ce dernier) d'un réseau linéaire bilatéral est égal à la somme algébrique des courants (des tensions) créés séparément par chaque source.*



Pouvoir déterminer les effets créés séparément par chaque source suppose qu'il soit possible de retirer et de remplacer des sources dans le réseau sans que cela n'influe sur le résultat final. Pour utiliser le théorème de superposition, la différence de potentiel aux bornes d'une source de tension doit donc être rendue nulle (la source est court-circuitée) et, dans le cas d'une source de courant, le courant débité doit être nul (circuit ouvert). Par contre, la résistance interne de la source ou la conductance qui lui est associée doivent être considérées dans l'analyse lorsque la source est fictivement retirée du réseau.

Le courant net dans une partie quelconque du réseau est donc égal à la somme algébrique des courants créés séparément par chacune des sources. Dans un réseau à deux sources produisant des courants de sens opposés, *le courant net est égal à la différence des deux et son sens est celui du plus intense*. Si les deux courants sont de même sens, *le courant net est égal à la somme des deux et il est de même sens que ceux-ci*. Cette règle est aussi valable pour les tensions et s'applique aux réseaux d'un nombre quelconque de sources.

Le principe de superposition ne tient plus lorsqu'il est question de la puissance, car celle-ci est proportionnelle au carré (relation non linéaire) de l'intensité ou de la tension. Pour cette raison, la puissance fournie à un élément d'un réseau ne peut être déterminée qu'une fois connu le courant qui traverse l'élément (ou la tension à ses bornes) au moyen du théorème de superposition. Ce cas particulier est étudié à l'exemple 8.4.

**EXEMPLE 8.1** Déterminer  $V_1$  dans le réseau illustré à la figure 8.1 au moyen du théorème de superposition.

*Solution:* Si on suppose que la tension aux bornes de la source de tension est nulle (la source est court-circuitée), on obtient le réseau illustré à la figure 8.2a:

$$V'_1 = I_1 R_1 = IR_1 = (2)(15) = 30 \text{ V}$$

Par contre, on obtient le réseau illustré à la figure 8.2b, si on suppose que le courant débité par la source de courant est nul:

$$V''_1 = 0 \text{ V}$$

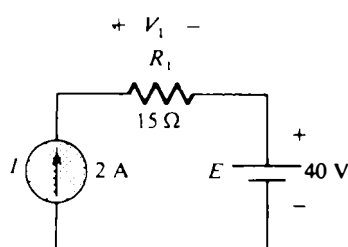


FIG. 8.1

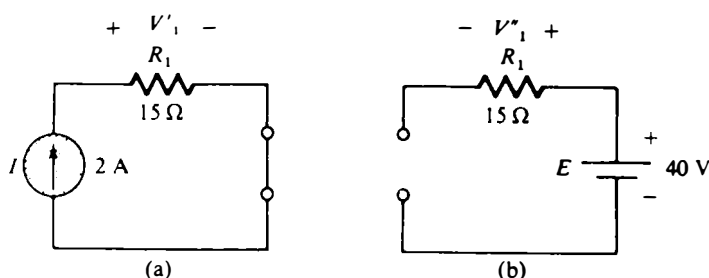


FIG. 8.2

La somme algébrique des tensions est:

$$V_1 = V'_1 + V''_1 = 30 + 0 = 30 \text{ V}$$

La source de 40 V n'a aucune incidence sur  $V_1$ , puisque l'intensité du courant traversant la résistance de 15 Ω est déterminée par la source de courant.

**EXEMPLE 8.2** Déterminer  $I_1$  dans le réseau illustré à la figure 8.3.

*Solution:* Supposons que  $E = 0$ ; nous obtenons alors le réseau illustré à la figure 8.4a:

$$I'_1 = 0 \text{ A}$$

Par contre, on obtient le réseau illustré à la figure 8.4b, si on suppose que  $I = 0$  (circuit ouvert):

$$I''_1 = \frac{30}{6} = 5 \text{ A}$$

de sorte que la somme algébrique des courants est:

$$I_1 = I'_1 + I''_1 = 0 + 5 = 5 \text{ A}$$

Dans ce cas, la source de courant n'a aucune incidence sur l'intensité du courant traversant la résistance de 6 Ω puisque la tension aux bornes de cette dernière est fixe et égale à  $E = 30 \text{ V}$ .

**EXEMPLE 8.3** Au moyen du théorème de superposition, déterminer le courant traversant la résistance de 3 Ω du réseau illustré à la figure 8.5. (À noter que ce réseau compte deux sources et qu'il est semblable à ceux étudiés au chapitre 7.)

*Solution:* Supposons d'abord que la source de 18 V est court-circuitée, pour déterminer les effets de la source de 72 V (figure 8.6):

$$R_T = 6 + 2 = 8 \text{ } \Omega$$

$$I = \frac{E}{R_T} = \frac{72}{8} = 9 \text{ A}$$

$$I_1 = \frac{(6)(9)}{6 + 3} = 6 \text{ A}$$

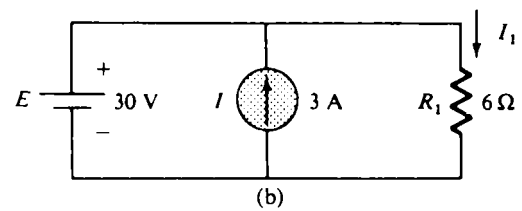


FIG. 8.3

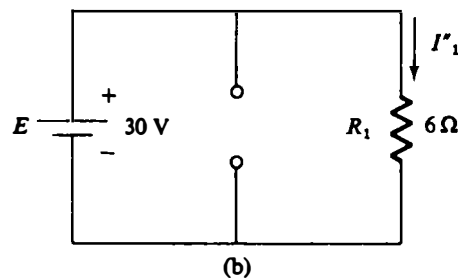
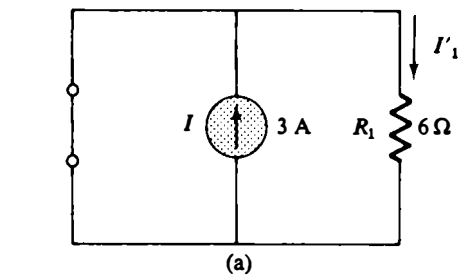


FIG. 8.4

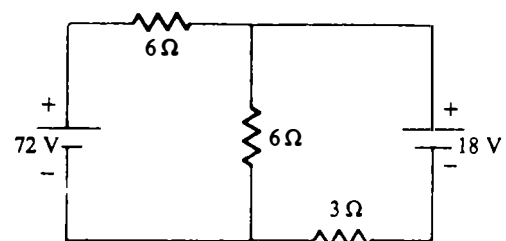


FIG. 8.5

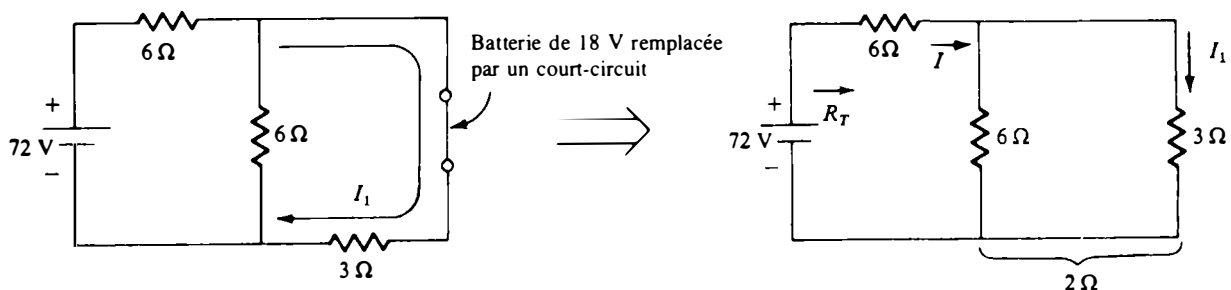


FIG. 8.6



Examinons maintenant ce qui se passe si la source de 72 V est court-circuitée (figure 8.7):

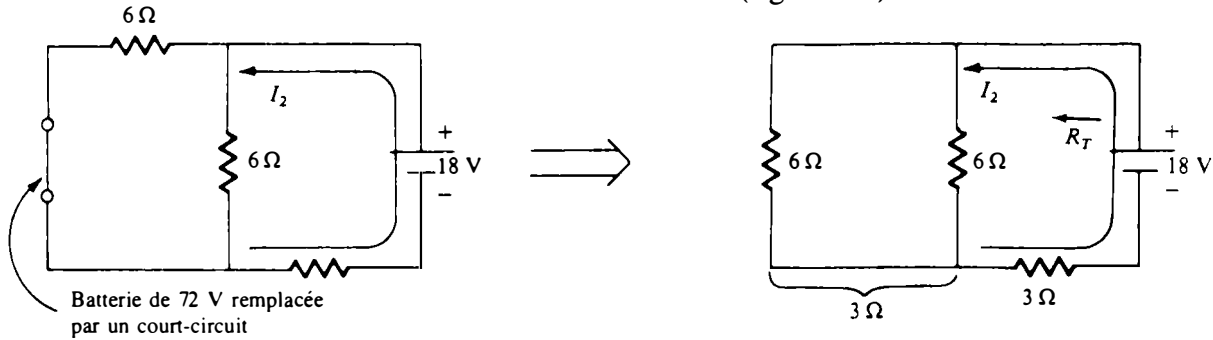


FIG. 8.7

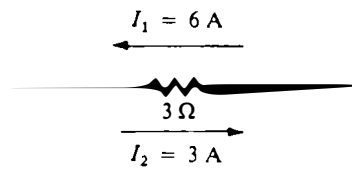


FIG. 8.8

$$R_T = 3 + 3 = 6 \Omega$$

$$I_2 = \frac{E}{R_T} = \frac{18}{6} = 3 \text{ A}$$

Le courant net qui traverse la résistance de 3 Ω est donc (figure 8.8):

$$I_{3\Omega} = 3 \text{ A} \quad (\text{et son sens est celui de } I_1)$$

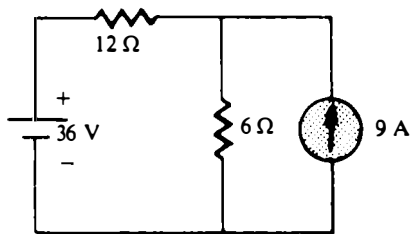


FIG. 8.9

**EXEMPLE 8.4** Au moyen du théorème de superposition, déterminer le courant traversant la résistance de 6 Ω dans le réseau illustré à la figure 8.9.

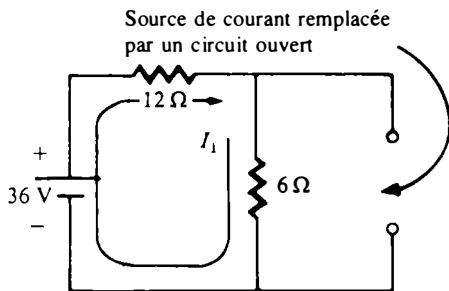


FIG. 8.10

*Solution:* Supposons d'abord que la source de courant est supprimée (circuit ouvert), comme l'illustre la figure 8.10:

$$I_1 = \frac{E}{R_T} = \frac{36}{12 + 6} = 2 \text{ A}$$

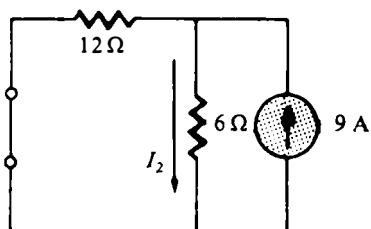


FIG. 8.11

Examinons maintenant ce qui se passe si la source de tension est court-circuitée (figure 8.11), en ayant recours à la règle du diviseur de courant:

$$I_2 = \frac{(12)(9)}{12 + 6} = \frac{108}{18}$$

$$I_2 = 6 \text{ A}$$



Le courant net qui traverse la résistance de  $6\ \Omega$  (figure 8.12) est donc:  $I_{6\Omega} = 8\ \text{A}$

La puissance fournie à cette résistance est:

$$\text{Puissance} = I^2 R = (8^2)(6) = 384\ \text{W}$$

Une *mauvaise utilisation* du théorème de superposition aurait donné:

$$P_1 = I_1^2 R = (2)^2(6) = 24\ \text{W}$$

$$P_2 = I_2^2 R = (6)^2(6) = 216\ \text{W}$$

$$P_1 + P_2 = 240\ \text{W} \neq 384\ \text{W}$$

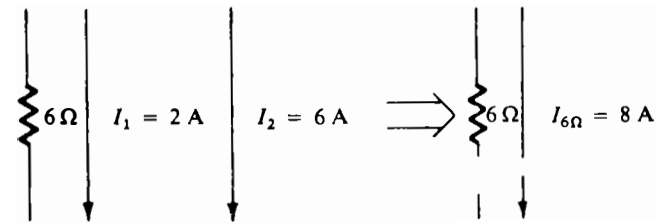


FIG. 8.12

Cette erreur s'explique par le fait que  $2 + 6 = 8$ , mais que:

$$(2)^2 + (6)^2 \neq (8)^2$$

Comme nous l'avons souligné, le théorème de superposition ne tient plus lorsqu'il est question de la puissance, car celle-ci est proportionnelle au carré de l'intensité ou de la tension ( $I^2 R$  ou  $V^2/R$ ).

La figure 8.13 représente le graphique de la puissance fournie à la résistance de  $6\ \Omega$  en fonction de l'intensité du courant.

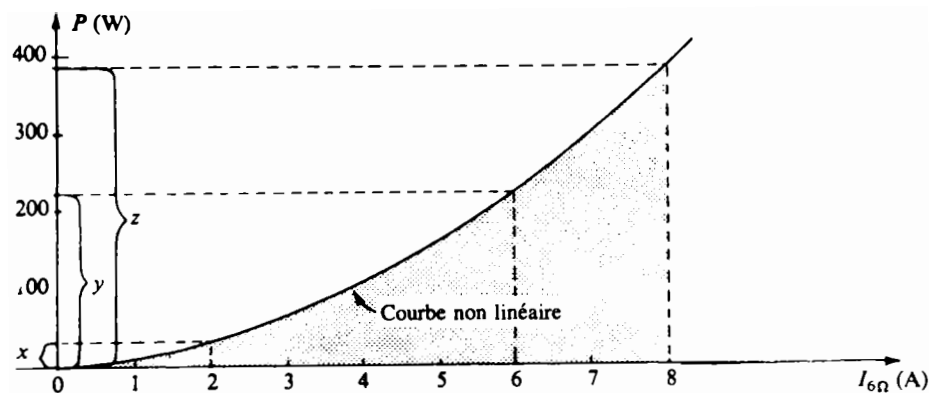


FIG. 8.13

Manifestement,  $x + y \neq z$ , c'est-à-dire que  $24 + 216 \neq 384$ , le théorème de superposition ne s'appliquant pas. Ce théorème ne s'applique que dans le cas de relations linéaires (tension et intensité) comme l'illustre le graphique de la figure 8.14, pour lequel  $a + b = c$ , soit encore  $2 + 6 = 8$ .

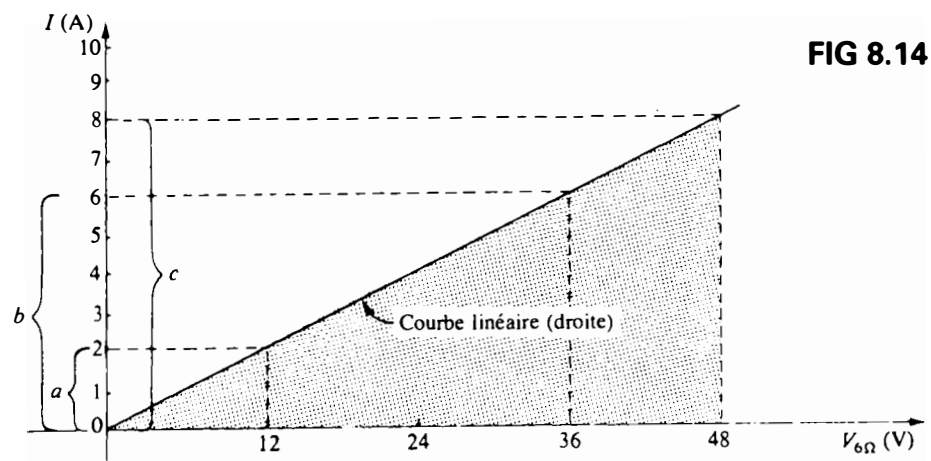


FIG. 8.14

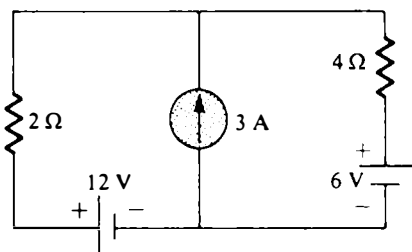


FIG. 8.15

**EXEMPLE 8.5** Déterminer le courant traversant la résistance de 2 Ω dans le réseau illustré à la figure 8.15.

*Solution:* Court-circuitons la source de 6 V (figure 8.16); alors:

$$I_1 = \frac{12}{2 + 4} = \frac{12}{6} = 2 \text{ A}$$

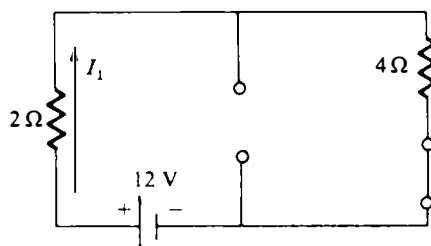


FIG. 8.16

Si maintenant la source de 12 V est court-circuitée (figure 8.17), on a:

$$I_2 = \frac{E}{R_T} = \frac{6}{6} = 1 \text{ A}$$

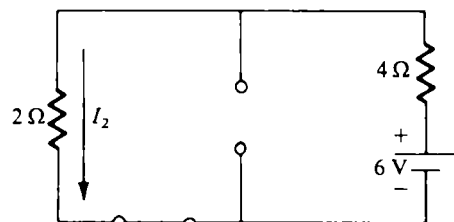


FIG. 8.17

Remplaçons finalement la source de courant par un circuit ouvert (figure 8.18). La règle du diviseur de courant donne:

$$I_3 = \frac{(4)(3)}{2 + 4} = \frac{12}{6} = 2 \text{ A}$$

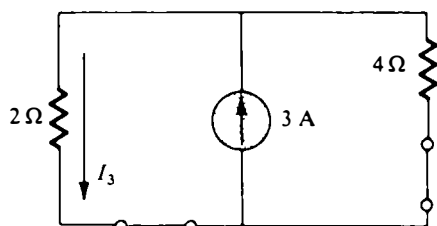


FIG. 8.18

Le courant net qui traverse la résistance est donc de 1 A (voir la figure 8.19).

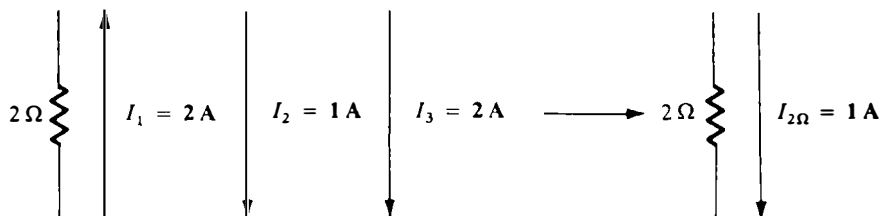


FIG. 8.19

### 8.3 THÉORÈME DE THÉVENIN

Le théorème de Thévenin s'énonce ainsi: *En courant continu, tout réseau linéaire bilatéral à deux bornes peut être remplacé par un générateur constitué d'une source de tension et d'une résistance en série avec cette source (figure 8.20).*

Ce théorème présente deux importants avantages. Il permet tout d'abord, comme les méthodes déjà décrites, de déterminer un courant donné ou une tension donnée dans les réseaux linéaires comptant un nombre quelconque de sources. Mais surtout, il permet d'isoler une partie précise d'un réseau, le reste du réseau étant remplacé par un générateur. Dans le réseau illustré à la figure 8.21 par exemple, il suffit de trouver le circuit

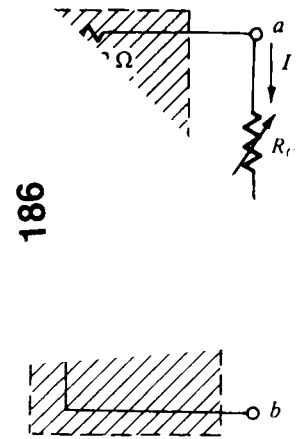


FIG. 8.20 Générateur de Thévenin.

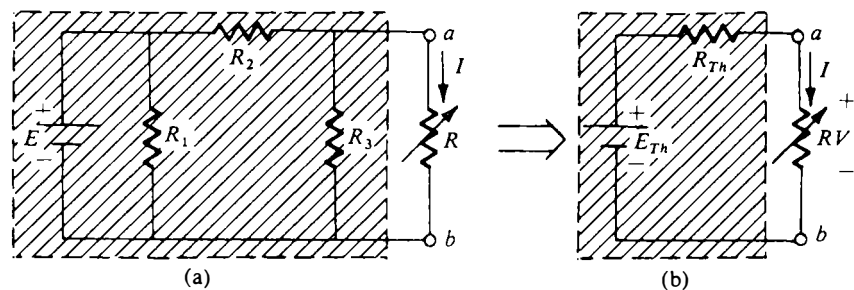


FIG. 8.21

équivalent de la partie hachurée pour être en mesure de déterminer rapidement l'intensité du courant qui traverse la résistance variable  $R$ , pour les diverses valeurs que celle-ci peut prendre, ou encore la tension présente à ses bornes.

Une précision s'impose. À la figure 8.21, tout le réseau, à l'exception de la branche contenant  $R$ , est remplacé par une résistance montée en série avec une batterie. Les valeurs de ces deux éléments doivent manifestement être choisies de sorte que le réseau équivalent présente aux bornes de  $R$  les mêmes caractéristiques que le réseau original. En d'autres termes, le courant traversant  $R$  et la tension à ses bornes doivent être les mêmes peu importe quel réseau lui est raccordé, et cela pour toutes les valeurs possibles de  $R$ . Un dernier point: le circuit équivalent *ne peut être qu'un montage série d'une source de tension et d'une résistance*. Ce montage porte le nom de générateur de Thévenin.

Voici les étapes à suivre pour déterminer les valeurs *correctes* de  $R_{Th}$  et de  $E_{Th}$ .

1. Retirer du réseau la branche à laquelle sera raccordé le générateur. Dans le cas du réseau illustré à la figure 8.21a, il s'agit de la branche contenant  $R$ .
2. Repérer les deux bornes du réseau résiduel. (On se rendra compte de l'importance de cette étape à l'analyse des réseaux complexes.)
3. Calculer  $R_{Th}$ . Pour ce faire, court-circuiter toutes les sources de tension et mettre en circuit ouvert toutes les

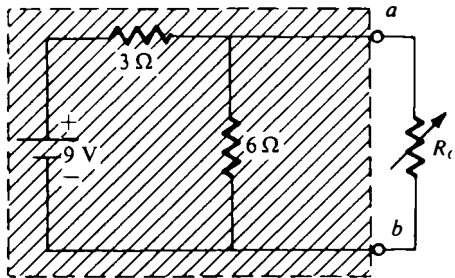
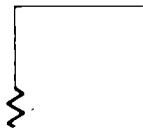


FIG. 8.22

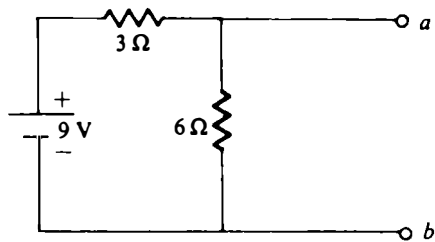


FIG. 8.23

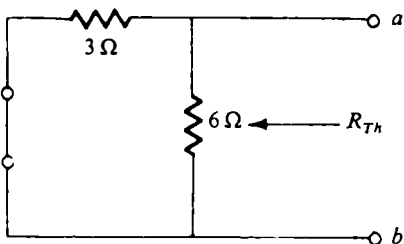


FIG. 8.24

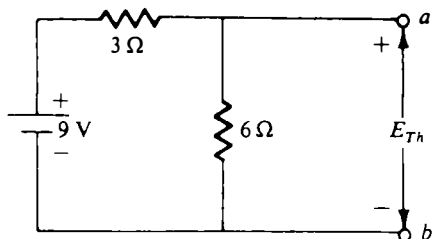


FIG. 8.25

sources de courant; déterminer ensuite la résistance totale présente aux deux bornes repérées. (Si les résistances internes des sources sont indiquées sur le réseau, les considérer comme des résistances ordinaires.)

4. Calculer  $E_{Th}$ . Pour ce faire, restituer au réseau ses sources de tension et de courant puis déterminer la tension *en circuit ouvert* aux bornes repérées. (C'est à cette étape que les erreurs sont les plus fréquentes. Se rappeler que *dans tous les cas* il s'agit de déterminer la tension *en circuit ouvert* aux bornes repérées à l'étape 2.)
5. Remplacer le réseau résiduel par le générateur et raccorder aux bornes de ce dernier la branche qui avait été retirée du réseau. À la figure 8.21b, c'est la branche contenant la résistance  $R$  qui est raccordée au générateur.

Quelques exemples permettront de bien comprendre cet important théorème.

**EXEMPLE 8.6** Trouver le générateur de Thévenin de la partie hachurée du réseau illustré à la figure 8.22. Calculer ensuite le courant traversant la résistance  $R_C$ , lorsque celle-ci est égale à  $2 \Omega$ , à  $10 \Omega$  et à  $100 \Omega$ .

*Solution:*

*Étapes 1 et 2:* Voir la figure 8.23.

*Étape 3:* Court-circuiter la source de tension (figure 8.24).

$$R_{Th} = \frac{(3)(6)}{3 + 6} = 2 \Omega$$

*Étape 4:* Remettre en circuit la source de tension (figure 8.25). Dans ce cas particulier, la tension  $E_{Th}$  est égale à la chute de tension aux bornes de la résistance de  $6 \Omega$ . La règle du diviseur de tension donne:

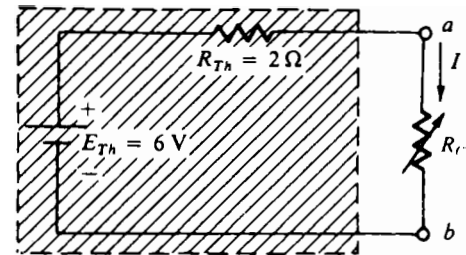
$$E_{Th} = \frac{(6)(9)}{6 + 3} = \frac{54}{9} = 6 \text{ V}$$

Étape 5: Voir la figure 8.26.

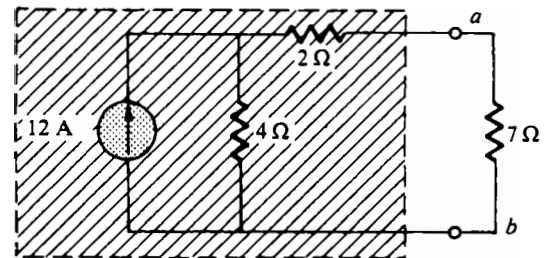
$$R_C = 2 \Omega: \quad I = \frac{6}{2 + 2} = 1,5 \text{ A}$$

$$R_C = 10 \Omega: \quad I = \frac{6}{2 + 10} = 0,5 \text{ A}$$

$$R_C = 100 \Omega: \quad I = \frac{6}{2 + 100} = 0,059 \text{ A}$$

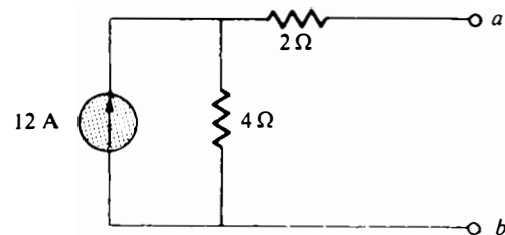

**FIG. 8.26**

**EXEMPLE 8.7** Trouver le générateur de Thévenin de la partie hachurée du réseau illustré à la figure 8.27.

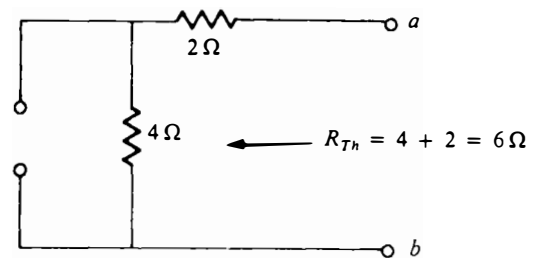

**FIG. 8.27**

*Solution:*

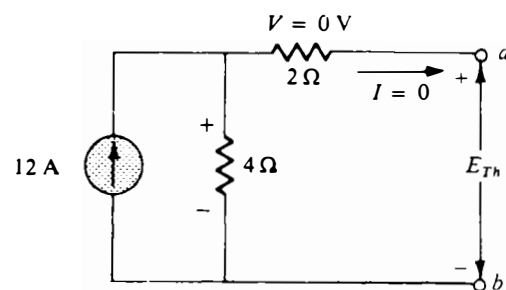
Étape 1 et 2: Voir la figure 8.28.


**FIG. 8.28**

Étape 3: Voir la figure 8.29.


**FIG. 8.29**

Étape 4: (Voir la figure 8.30.) Le circuit étant ouvert entre les deux bornes repérées, le courant passant entre ces bornes et traversant la résistance de  $2 \Omega$  est nul. La chute de tension aux bornes de cette résistance est donc également nulle, et la tension  $E_{Th}$  est égale à la chute de tension aux bornes de la résistance de  $4 \Omega$ .


**FIG. 8.30**

$$E_{Th} = (4)(12) = 48 \text{ V}$$

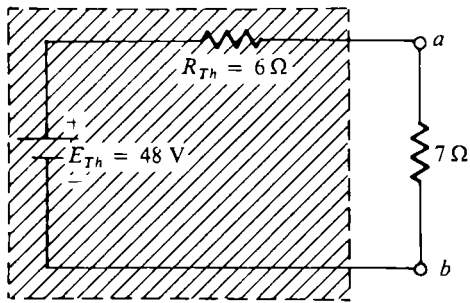


FIG. 8.31

Étape 5: Voir la figure 8.31.

**EXEMPLE 8.8** Trouver le générateur de Thévenin de la partie hachurée du réseau illustré à la figure 8.32.

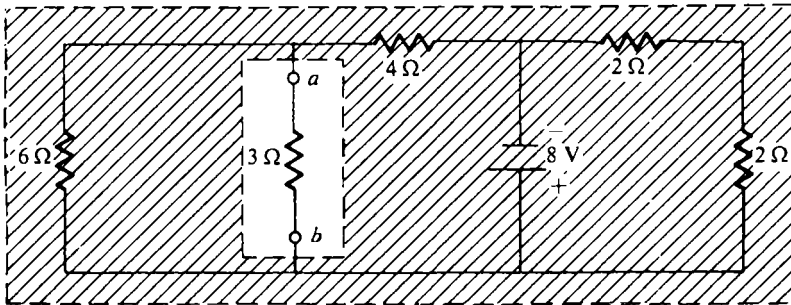


FIG. 8.32

*Solution:*

Étapes 1 et 2: Voir la figure 8.33.

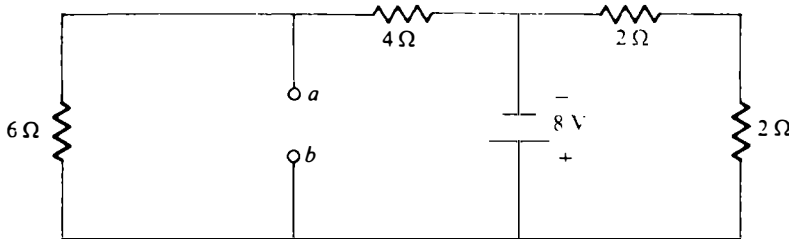


FIG. 8.33

Étape 3: Voir la figure 8.34.

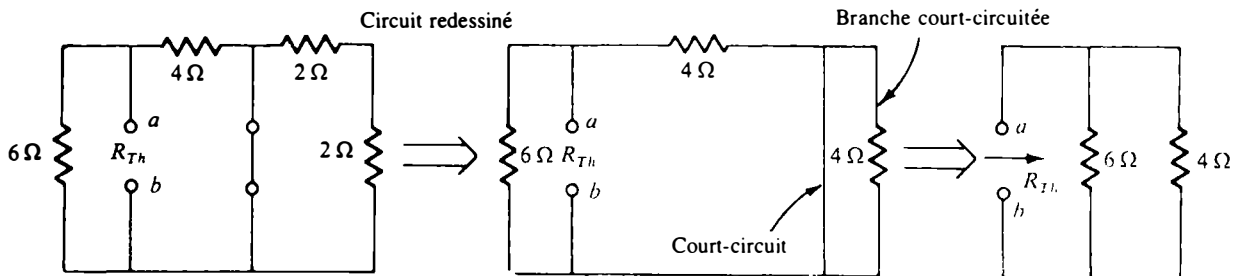


FIG. 8.34

$$R_{Th} = \frac{(6)(4)}{6 + 4} = \frac{24}{10}$$

$$R_{Th} = 2,4 \Omega$$

Étape 4: (Voir la figure 8.35.) La règle du diviseur de tension donne:

$$E_{Th} = V_{6\Omega} = \frac{(6)(8)}{6 + 4} = \frac{48}{10} = 4,8 \text{ V}$$

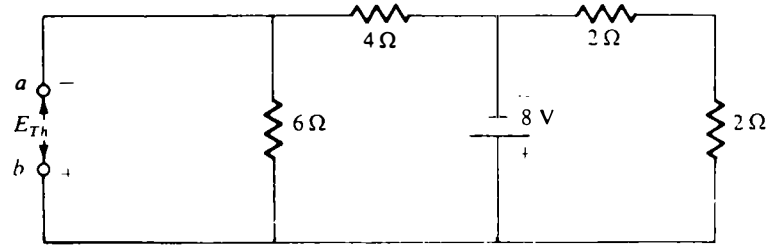


FIG. 8.35

Étape 5: Voir la figure 8.36.

Cet exemple démontre pourquoi il est si important de bien repérer les bornes du réseau. Notons qu'en gardant la bonne polarité pour *a* et *b*, la tension de Thévenin a la polarité inverse de la source originale.

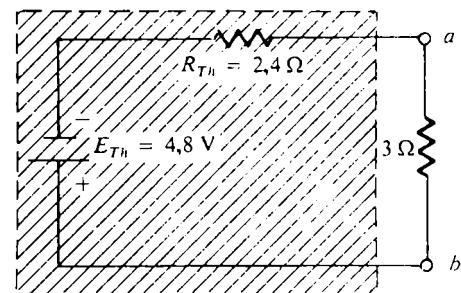


FIG. 8.36

**EXEMPLE 8.9** Trouver le générateur de Thévenin de la partie hachurée du réseau en pont illustrée à la figure 8.37.

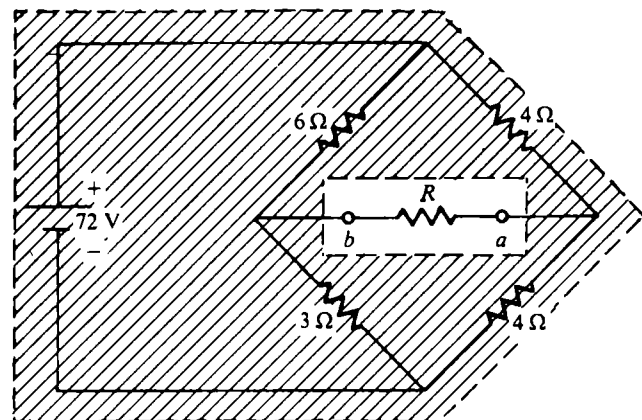


FIG. 8.37

Solution:

Étapes 1 et 2: Voir la figure 8.38.

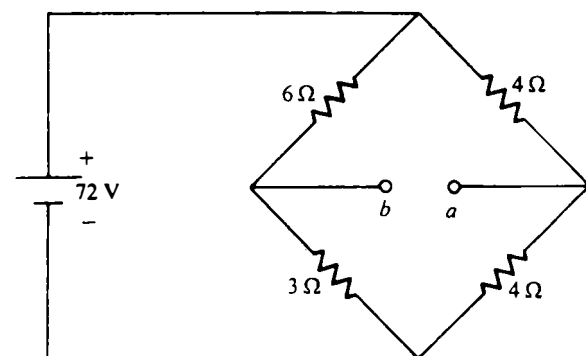


FIG. 8.38



Étape 3: Voir la figure 8.39.

$$R_{Th} = \frac{(3)(6)}{3 + 6} + \frac{4}{2} = 2 + 2$$

$$R_{Th} = 4 \Omega$$

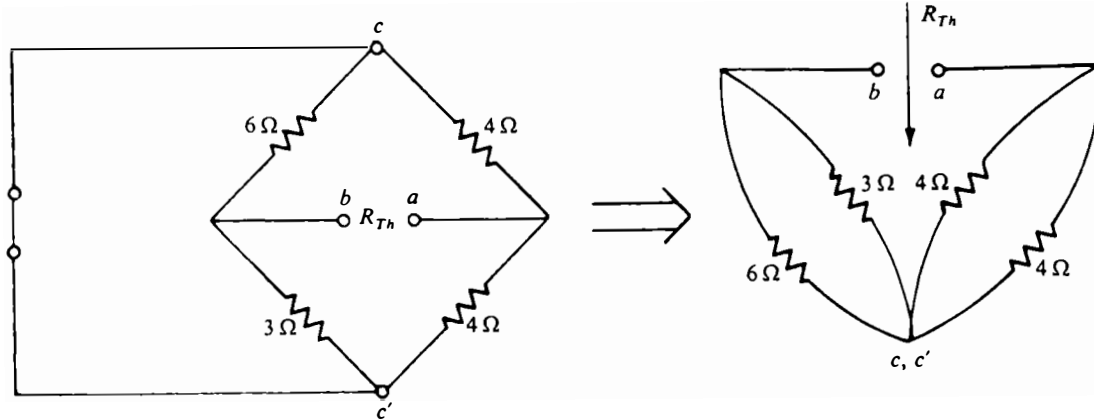


FIG. 8.39

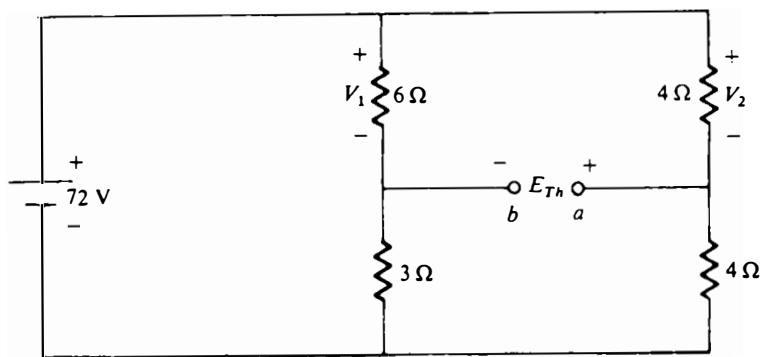


FIG. 8.40

Étape 4: (Voir la figure 8.40.) La règle du diviseur de tension donne:

$$V_1 = \frac{(6)(72)}{6 + 3} = \frac{432}{9} = 48 \text{ V}$$

$$V_2 = \frac{(4)(72)}{4 + 4} = \frac{72}{2} = 36 \text{ V}$$

Supposons que la polarité de  $E_{Th}$  est celle qu'on indique sur la figure. La loi des tensions donne alors:

$$\sum \circ V = +E_{Th} + V_2 - V_1 = 0$$

ou:

$$\begin{aligned} E_{Th} &= V_1 - V_2 \\ &= 48 - 36 \end{aligned}$$

et:

$$E_{Th} = +12 \text{ V}$$

↑  
la polarité supposée est correcte

Étape 5: Voir la figure 8.41.

Le théorème de Thévenin n'est pas limité aux réseaux amputés d'un seul élément passif: les réseaux peuvent tout aussi bien être amputés d'une source, d'une branche et même de parties entières, comme le montre l'exemple qui suit. Dans les cas complexes, il faut parfois recourir à une des méthodes déjà étudiées (analyse par mailles, théorème de superposition, etc.) pour établir le générateur de Thévenin.

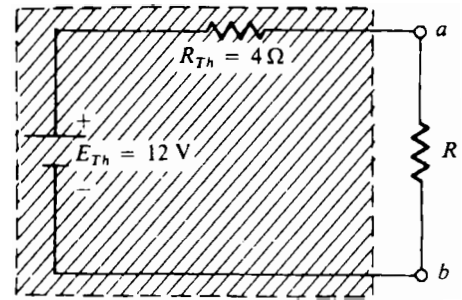


FIG. 8.41

**EXEMPLE 8.10** Trouver le générateur de Thévenin de la partie hachurée du réseau à trois sources illustré à la figure 8.42.

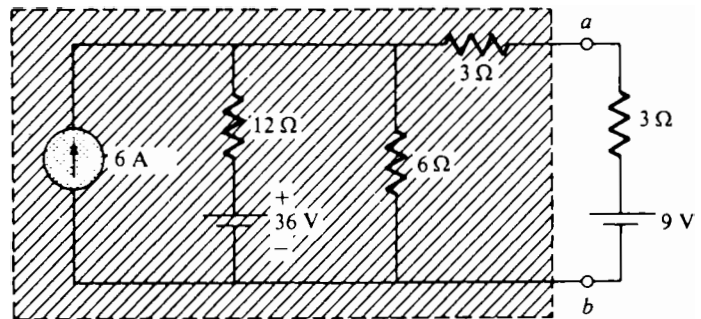


FIG. 8.42

Solution:

Étapes 1 et 2: Voir la figure 8.43.

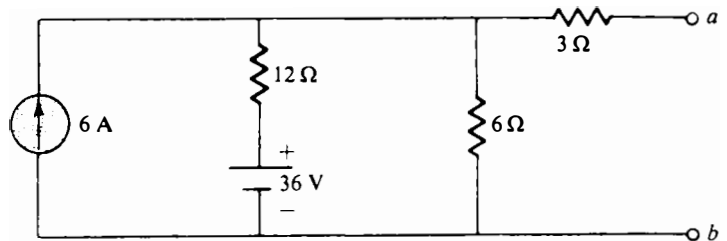


FIG. 8.43

Étape 3: Voir la figure 8.44.

$$R_{Th} = 3 + \frac{(6)(12)}{6 + 12} = 3 + 4$$

$$R_{Th} = 7 \Omega$$

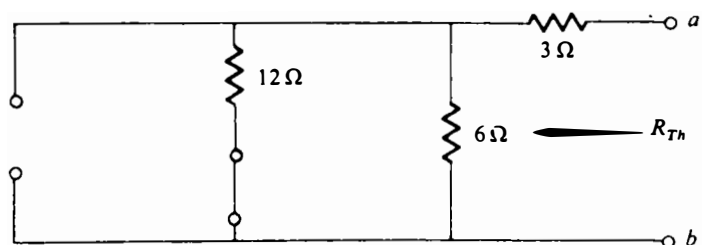


FIG. 8.44

Étape 4: Appliquons le théorème de superposition à la batterie de 36 V (figure 8.45). La règle du diviseur de tension donne alors:

$$E'_{Th} = \frac{(6)(36)}{6 + 12} = \frac{216}{18} = 12 \text{ V}$$

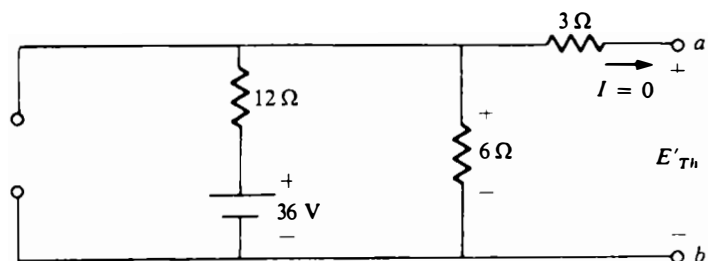
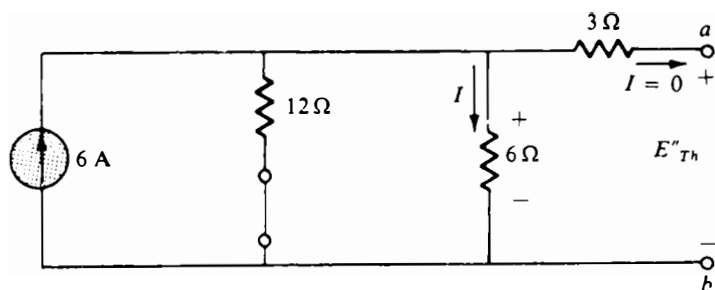


FIG. 8.45



La source de 6 A est remise en circuit à la figure 8.46. La règle du diviseur de courant permet d'écrire:



$$I_{6\Omega} = \frac{(12)(6)}{12 + 6} = \frac{72}{18} = 4 \text{ A}$$

$$E''_{Th} = I_{6\Omega} \times 6 \Omega = (4)(6) = 24 \text{ V}$$

$$E_{Th} = E'_{Th} + E''_{Th} = 36 \text{ V}$$

FIG. 8.46

Étape 5: Voir la figure 8.47.

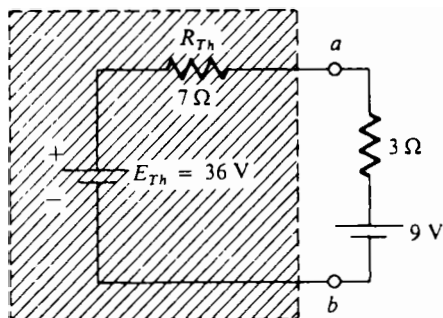


FIG. 8.47



FIG. 8.48

## 8.4 THÉORÈME DE NORTON

Il a été démontré à la section 7.3 que toute source de tension avec une résistance interne série peut être transposée en une source de courant. Les caractéristiques de la source de courant (figure 8.48) équivalant à un générateur de Thévenin (dans lequel la résistance est en série avec la source, ce qui satisfait à la condition ci-dessus), peuvent être déterminées au moyen du théorème de Norton. Elles peuvent aussi être déterminées au moyen des techniques de transposition décrites à la section 7.4.

Le théorème de Norton s'énonce ainsi:

*En courant continu, tout réseau linéaire bilatéral à deux bornes peut être remplacé par un générateur constitué d'une source de courant et d'une résistance en parallèle avec cette source (figure 8.48).*

Les avantages du théorème de Norton sont ceux du théorème de Thévenin, et tout ce qui a été dit du générateur de Thévenin peut se dire du générateur de Norton.

Voici les étapes à suivre pour déterminer les valeurs correctes de  $I_N$  et de  $R_N$ .

1. Retirer du réseau la branche ou la partie à laquelle sera raccordé le générateur.
2. Repérer les deux bornes du réseau résiduel.
3. Calculer  $R_N$ . Pour ce faire, court-circuiter toutes les sources de tension et mettre en circuit ouvert toutes les sources de courant; déterminer ensuite la résistance totale présente aux deux bornes repérées. (Si les résistances internes des sources sont indiquées sur le réseau, les considérer comme des résistances ordinaires.)
4. Calculer  $I_N$ . Pour ce faire, restituer au réseau ses sources de tension et de courant puis déterminer l'intensité du courant qui passerait dans un *court-circuit* reliant les deux bornes repérées.

- Remplacer le réseau résiduel par le générateur et raccorder aux bornes de ce dernier la branche ou la partie qui avait été retirée du réseau.

Notons finalement que les générateurs de Thévenin et de Norton peuvent se déduire l'un de l'autre par la technique de transposition des sources exposée au début du chapitre (figure 8.49).

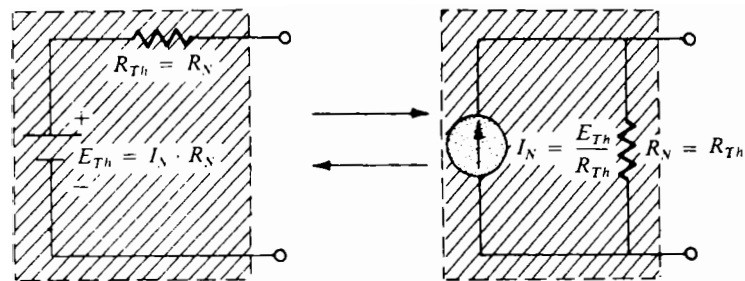


FIG. 8.49

**EXEMPLE 8.11** Trouver le générateur de Norton de la partie hachurée du réseau illustré à la figure 8.50.

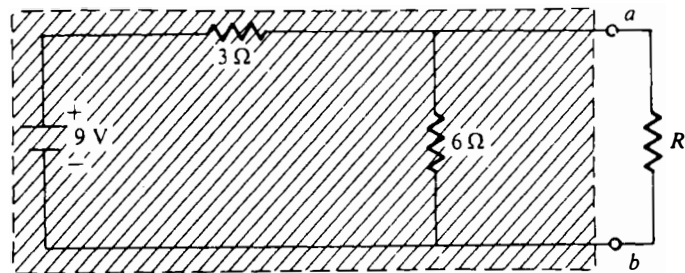


FIG. 8.50

*Solution:*

Étapes 1 et 2: Voir la figure 8.51.

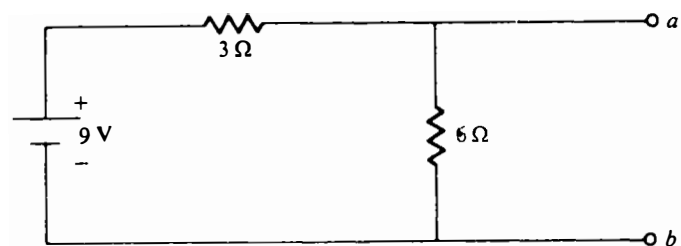


FIG. 8.51

Étape 3: Voir la figure 8.52.

$$R_N = \frac{(3)(6)}{3 + 6} = 2 \Omega$$

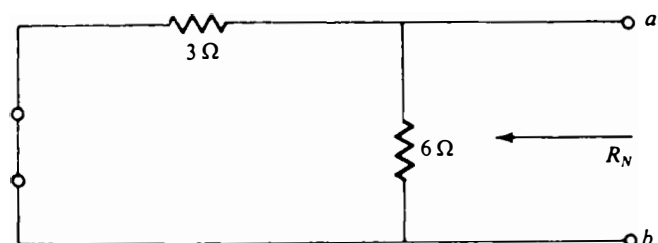
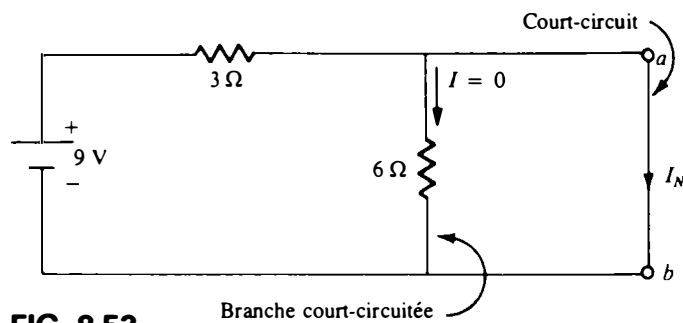


FIG. 8.52



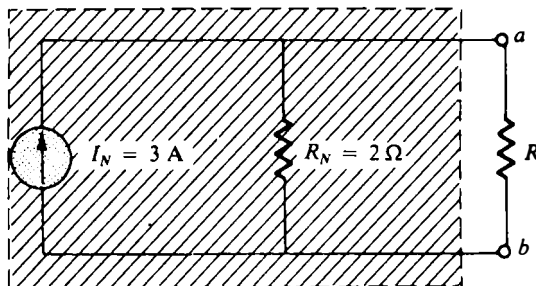
Étape 4: Voir la figure 8.53.



$$I_N = \frac{9}{3} = 3 \text{ A}$$

FIG. 8.53

Étape 5: Voir la figure 8.54.



Ce circuit est identique à celui que nous avons étudié à l'exemple 8.6, comme l'illustre la transposition de la source de courant en une source de tension (figure 8.55).

FIG. 8.54

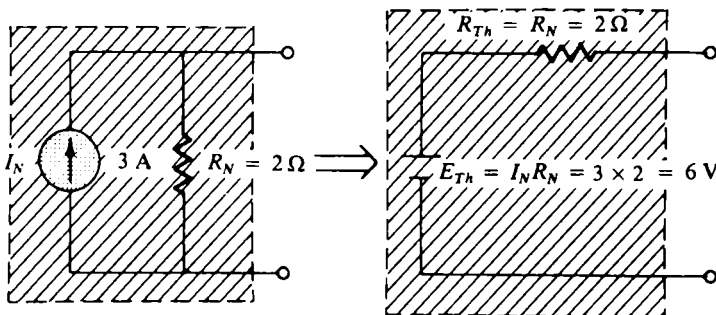
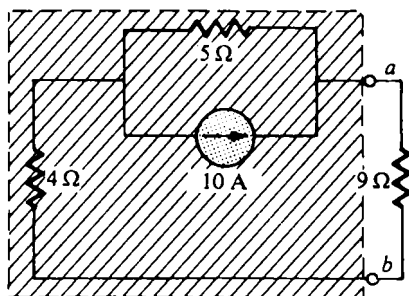
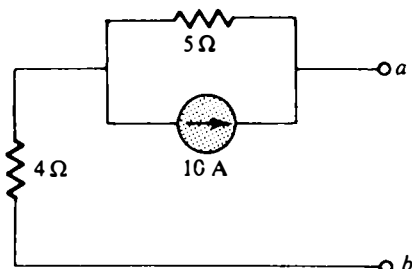


FIG. 8.55



**EXEMPLE 8.12** Trouver le générateur de Norton de la partie hachurée du réseau illustré à la figure 8.56.

FIG. 8.56



*Solution:*

Étapes 1 et 2: Voir la figure 8.57.

FIG. 8.57



Étape 3: Voir la figure 8.58.

$$R_N = 5 + 4 = 9 \Omega$$

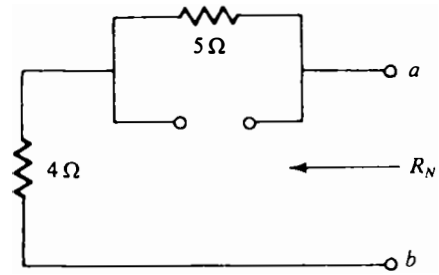


FIG. 8.58

Étape 4: Voir la figure 8.59. La règle du diviseur de courant donne:

$$I_N = \frac{(5)(10)}{4 + 5} = \frac{50}{9}$$

$$I_N = 5,556 \text{ A}$$

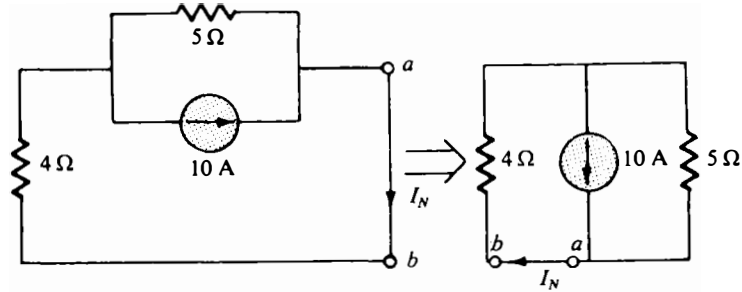


FIG. 8.59

Étape 5: Voir la figure 8.60.

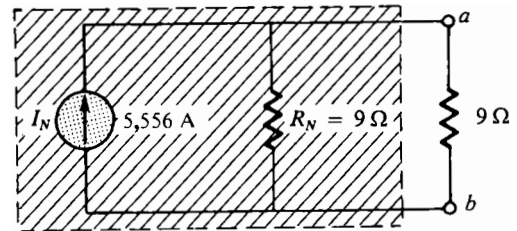


FIG. 8.60

EXEMPLE 8.13 Trouver le générateur de Norton de la partie hachurée du réseau illustré à la figure 8.61.

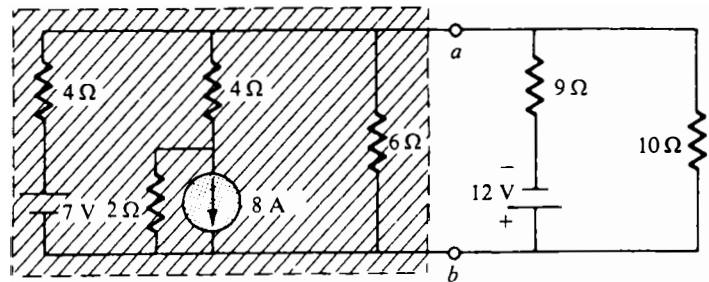


FIG. 8.61

Solution:

Étapes 1 et 2: Voir la figure 8.62.

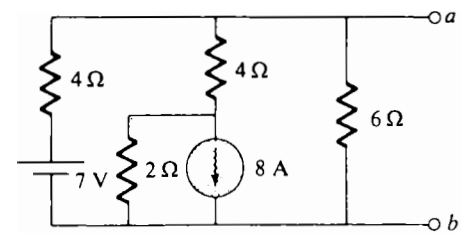


FIG. 8.62

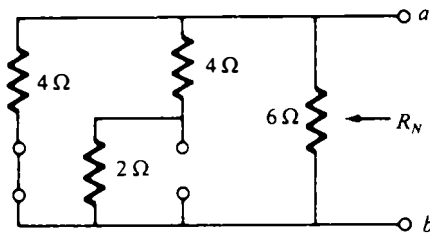


FIG. 8.63

Étape 3: Voir la figure 8.63.

$$R_N = \frac{(6/2)(4)}{(6/2) + 4} = \frac{12}{7} = 1,714 \Omega$$

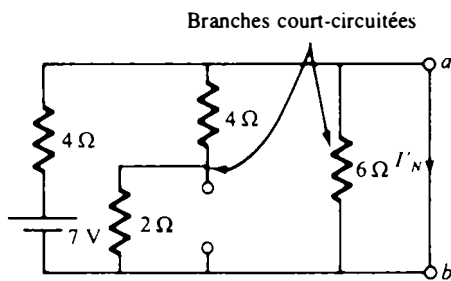


FIG. 8.64

Étape 4: L'application du théorème de superposition à la batterie de 7 V (figure 8.64) permet d'écrire:

$$I'_N = \frac{7}{4} = 1,75 \text{ A}$$

Pour la source de 8 A (figure 8.65), on a:

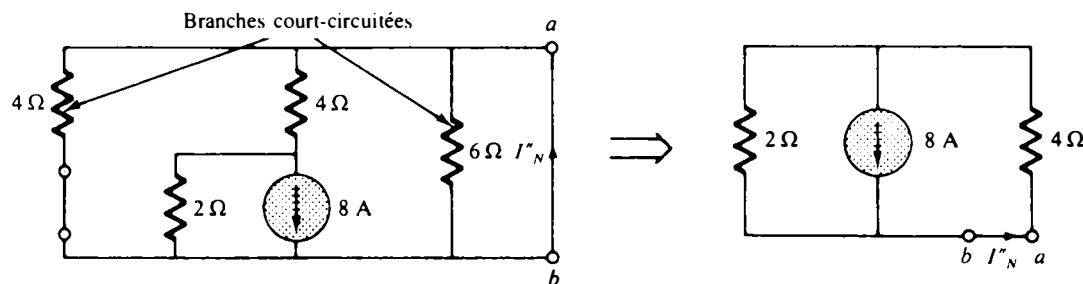


FIG. 8.65

$$I''_N = \frac{2(8)}{2 + 4} = \frac{16}{6} = 2,667 \text{ A}$$

et:

$$I_N = I''_N - I'_N = 2,667 - 1,750 = 0,917 \text{ A} \quad (\text{sens de } I''_N)$$

Étape 5: Voir la figure 8.66.

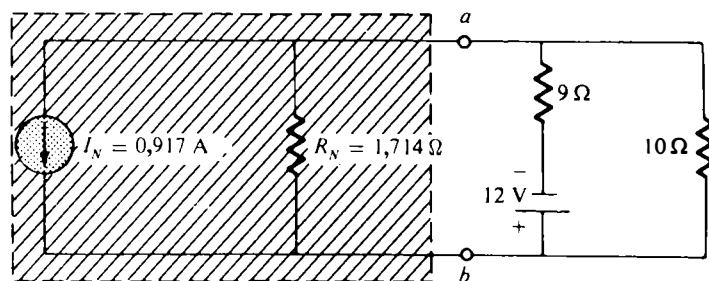


FIG. 8.66

## 8.5 THÉORÈME DU TRANSFERT MAXIMAL DE PUISSANCE

Le théorème du transfert maximal de puissance s'énonce ainsi:

*En courant continu, un réseau linéaire bilatéral fournit une puissance maximale à une charge si la résistance totale de celle-ci est égale à la résistance du générateur de Thévenin du réseau.*

Ainsi, le réseau illustré à la figure 8.67 fournit une puissance maximale à la charge si:

$$R_C = R_{Th} \quad (8.1)$$

Le générateur de Thévenin présentant les mêmes caractéristiques globales que le réseau qu'il remplace, cette condition signifie en clair que la puissance fournie à la charge ne dépend que des caractéristiques *globales* du réseau auquel on raccorde cette dernière.

À tout générateur de Thévenin correspond un générateur de Norton (figure 8.68); la condition du transfert maximal de puissance peut donc s'écrire:

$$R_C = R_N \quad (8.2)$$

Ce résultat sera des plus utiles pour l'analyse des circuits à transistors, le circuit équivalent du transistor faisant le plus fréquemment appel à une source de courant plutôt qu'à une source de tension.

Dans le réseau illustré à la figure 8.67, on a:

$$I = \frac{E_{Th}}{R_{Th} + R_C}$$

et:

$$P_C = I^2 R_C = \left( \frac{E_{Th}}{R_{Th} + R_C} \right)^2 R_C$$

de sorte que:

$$P_C = \frac{E_{Th}^2 R_C}{(R_{Th} + R_C)^2}$$

Pour  $E_{Th} = 4 \text{ V}$  et  $R_{Th} = 5 \Omega$ , la puissance fournie à  $R_C$  varie en fonction de la valeur ohmique de  $R_C$ . Le tableau 8.1 donne une idée de cette variation.

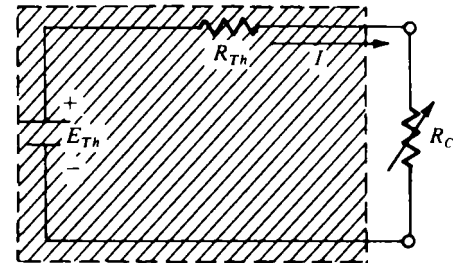


FIG. 8.67

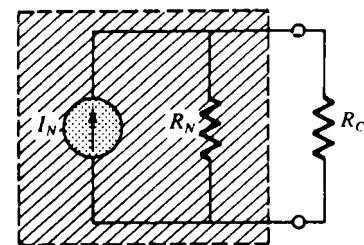
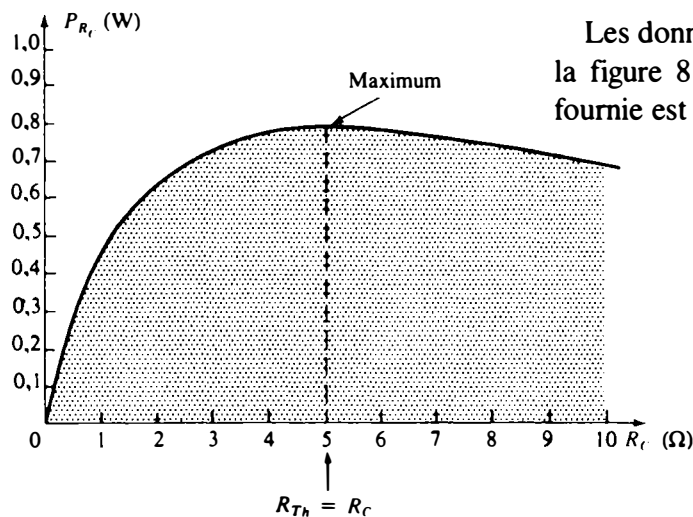


FIG. 8.68



TABLEAU 8.1

$R_L$ (Ohms)	$P_L = \frac{16R_L^2}{(5 + R_L)^2}$ (Watts)	
1	0,444	Augmentation de la puissance
2	0,653	
3	0,750	
4	0,790	
5	0,800	
6	0,793	← Puissance maximale
7	0,778	
8	0,757	Diminution de la puissance
9	0,735	
10	0,711	



Les données du tableau sont portées sur le graphique tracé à la figure 8.69; la courbe indique nettement que la puissance fournie est maximale lorsque  $R_C$  est égale à  $R_{Th}$ .

FIG. 8.69

Dans les conditions de transfert maximal, le rendement est:

$$\begin{aligned} \eta\% &= \frac{P_s}{P_e} \times 100\% = \frac{V_C I_C}{E_{Th} I_C} \times 100\% \\ &= \frac{E_{Th}}{2} \times 100\% = \frac{1}{2} \times 100\% = 50\% \end{aligned}$$

Ce résultat est général: dans les conditions de transfert maximal, le rendement est toujours de 50%.

La courbe du rendement en fonction de la valeur ohmique de la charge est donnée à la figure 8.70. Comme un rendement de 50% est relativement faible, le théorème n'est pas utilisé dans l'étude de la transmission de puissance, des pertes d'énergie de 50% étant intolérables. Il est cependant utile en électronique et en télécommunications, car dans ces domaines, le rendement est un critère d'importance secondaire, les niveaux de puissance étant habituellement très petits.

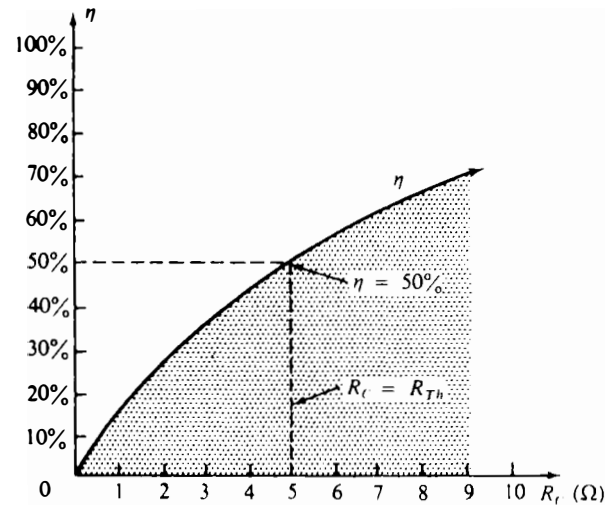


FIG. 8.70

Les figures 8.71 et 8.72 donnent respectivement les courbes de la tension en fonction de  $R_C$  et de l'intensité du courant en fonction de  $R_C$ . Notons que la tension de la charge est la moitié de la tension de Thévenin dans les conditions de transfert maximal et que l'intensité du courant est la moitié de l'intensité du courant obtenu quand  $R_C = 0 \Omega$  (court-circuit). L'intensité du courant quand  $R_C = 0 \Omega$  est:

$$I_C = I_{\max} = \frac{E_{Th}}{R_{Th}}$$

Il n'est pas nécessaire de déterminer  $E_{Th}$  pour calculer la valeur ohmique de  $R$  donnant lieu au transfert maximal de puissance; mais cela est nécessaire s'il faut calculer la puissance maximale fournie à  $R$ , à moins de savoir quel est le courant qui traverse  $R$  lorsque  $R = R_{Th}$  ou encore quelle est la tension alors présente à ses bornes.

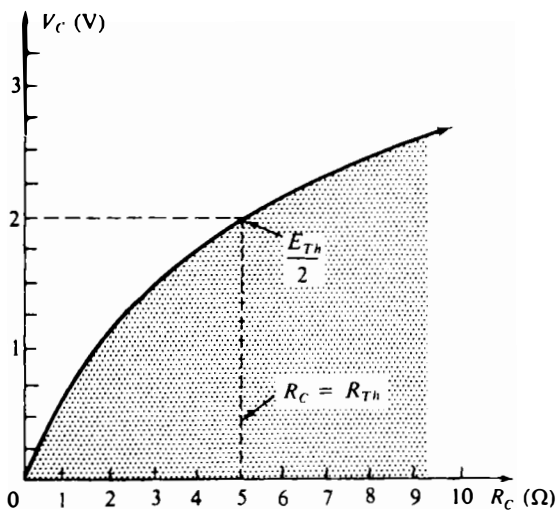


FIG. 8.71

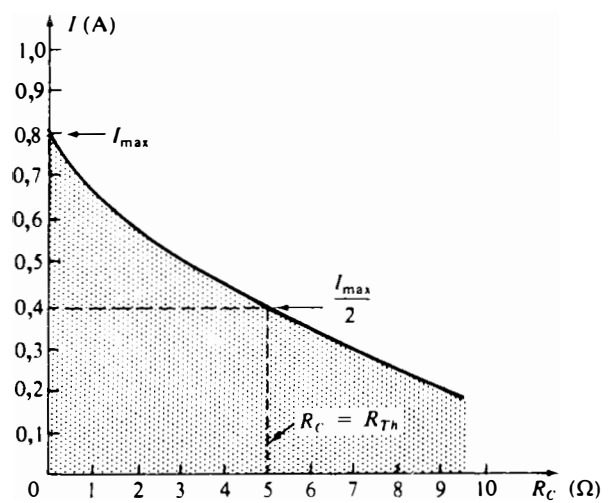


FIG. 8.72



Traçons  $P_C$ ,  $V_C$  et  $I_C$  sur un graphique à échelle logarithmique (voir la figure 8.73). La variation de ces grandeurs en fonction de la variation de la valeur ohmique devient manifeste. On constatera que  $P_C$  ne possède qu'un seul maximum (quand  $R_C = R_{Th}$ ), que  $V_C$  augmente lorsque  $R_C$  augmente, comme le laisse prévoir la règle du diviseur de tension, et que  $I_C$  chute lorsque  $R_C$  augmente (loi d'Ohm). Un des avantages évidents des graphiques à échelle logarithmique est qu'ils permettent de représenter de grandes variations dans un espace relativement restreint (comme c'est le cas de  $R_C$  à la figure 8.73).

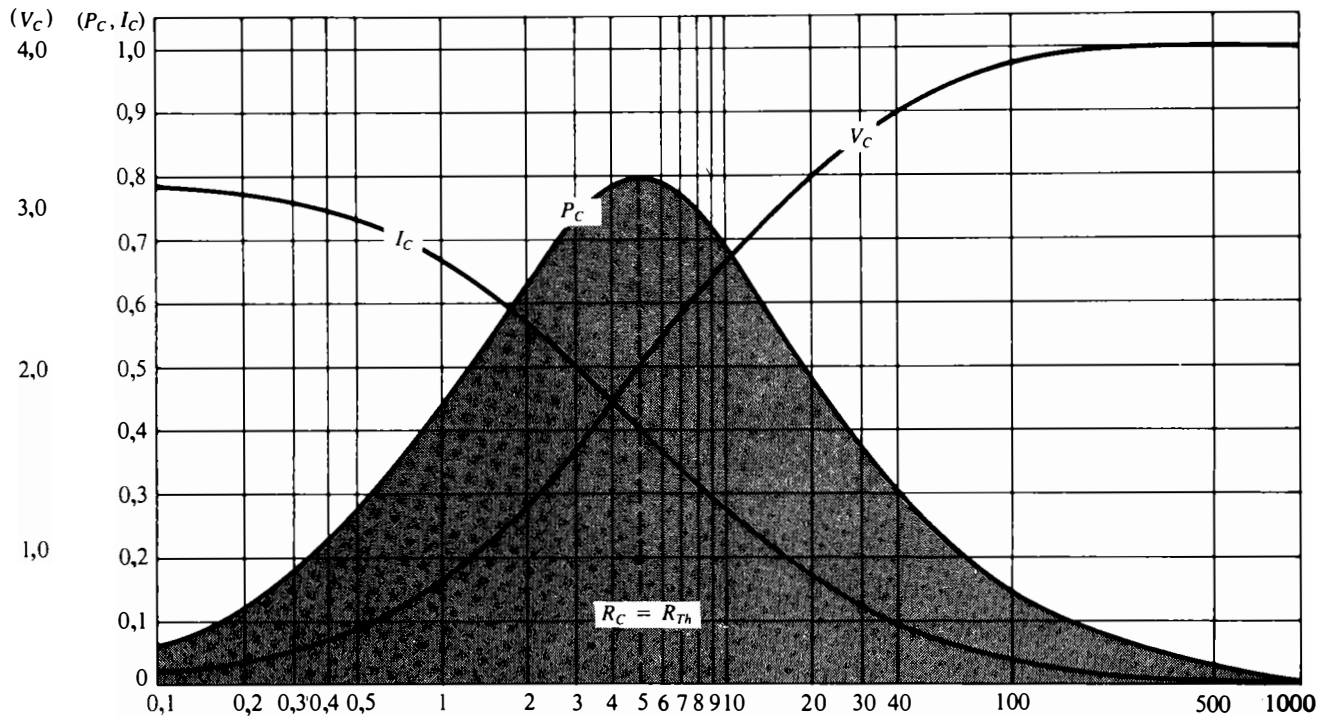


FIG. 8.73

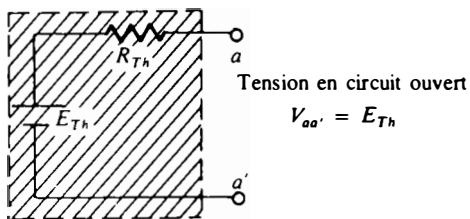


FIG. 8.74

Dans un réseau bien réel, la valeur de  $R_C = R_{Th}$  peut se déterminer par la mesure de la tension en circuit ouvert présente aux bornes de la charge ( $V_{aa'} = E_{Th}$  à la figure 8.74).

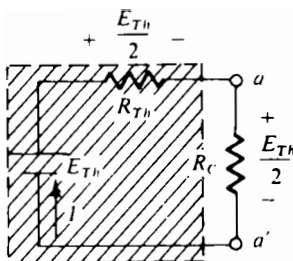


FIG. 8.75

Cette mesure étant faite, on raccorde la charge au réseau et on en fait varier la résistance en cherchant à faire apparaître à ses bornes une tension égale à la moitié de la tension en circuit ouvert ( $V_C = E_{Th}/2$  à la figure 8.75). Lorsque cette condition est réalisée, on peut déterminer  $R_{Th}$  sachant qu'elle est égale à  $R_C$  puisque les tensions aux bornes des deux et le courant traversant les deux sont égaux.

$$R_C = \frac{E_{Th}}{I} = \frac{E_{\text{circuit ouvert}}}{I(R_C = R_{Th})} = \frac{E_{co}}{2I} = R_{Th} \quad (8.3)$$

La tension  $E_{co}$  et le courant  $I$  se mesurent aisément au moyen d'appareils spéciaux (les appareils de mesure sont étudiés au chapitre 12).

La puissance fournie à  $R_C$  dans les conditions de transfert maximal ( $R_C = R_{Th}$ ) est:

$$I = \frac{E_{Th}}{R_{Th} + R_C} = \frac{E_{Th}}{2R_{Th}}$$

$$P_C = I^2 R_C = \left( \frac{E_{Th}}{2R_{Th}} \right)^2 R_{Th} = \frac{E_{Th}^2 R_{Th}}{4R_{Th}^2}$$

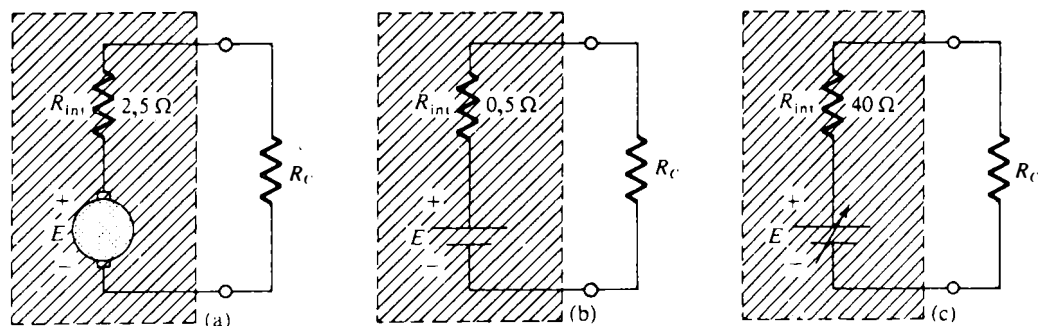
et:

$$P_{C_{max}} = \frac{E_{Th}^2}{4R_{Th}} \quad (\text{W}) \quad (8.4)$$

Dans le cas du générateur de Norton illustré à la figure 8.68, cette relation devient:

$$P_{C_{max}} = \frac{I_N^2 R_N}{4} \quad (\text{W}) \quad (8.5)$$

**EXEMPLE 8.14** Une charge résistante  $R_C$  est successivement raccordée à une génératrice, à une batterie et à une alimentation de laboratoire (figure 8.76). Dans chaque cas, déterminer la valeur de  $R_C$  donnant lieu au transfert maximal de puissance.



**FIG. 8.76**

*Solution:*

a. Pour la génératrice:

$$R_C = 2,5 \Omega$$

b. Pour la batterie:

$$R_C = 0,5 \Omega$$

c. Pour l'alimentation de laboratoire:

$$R_C = 40 \Omega$$

On peut donc énoncer le théorème du transfert maximal de puissance de la façon suivante:

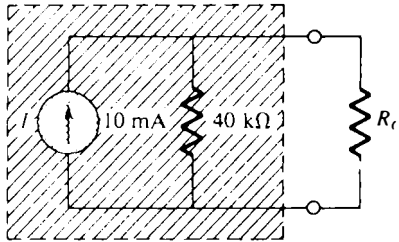


FIG. 8.77

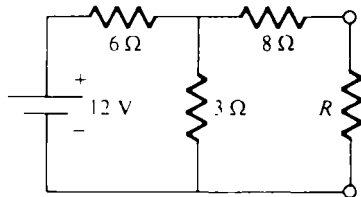


FIG. 8.78

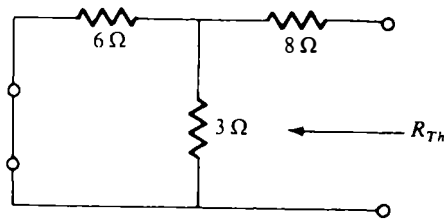


FIG. 8.79

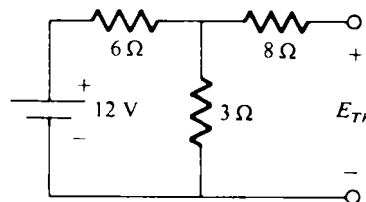


FIG. 8.80

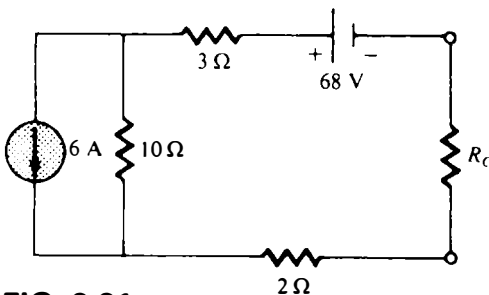


FIG. 8.81

Lorsqu'une charge est raccordée directement à une source de tension continue, la condition de transfert maximal de puissance est que la résistance de la charge soit égale à la résistance interne de la source:

$$R_C = R_{int} \tag{8.6}$$

**EXEMPLE 8.15** La figure 8.77 illustre le circuit équivalent d'un réseau à transistors. Déterminer la valeur de  $R_C$  donnant lieu au transfert maximal de puissance et calculer la puissance fournie à la charge dans ces conditions.

*Solution:*

L'équation (8.2) donne  $R_C = R_N = 40 \text{ k}\Omega$

L'équation (8.5) donne

$$P_{C_{max}} = \frac{I_N^2 R_N}{4} = \frac{(10 \times 10^{-3})^2 40 \text{ k}\Omega}{4} = 1 \text{ W}$$

**EXEMPLE 8.16** Déterminer la valeur de  $R$  du réseau de la figure 8.78 donnant lieu au transfert maximal de puissance et calculer la puissance fournie à  $R$  dans ces conditions.

*Solution:* Voir la figure 8.79.

$$R_{Th} = 8 + \frac{(3)(6)}{3 + 6} = 8 + 2$$

et:

$$R = R_{Th} = 10 \Omega$$

Voir la figure 8.80. On a:

$$E_{Th} = \frac{3(12)}{3 + 6} = \frac{36}{9} = 4 \text{ V}$$

et, de l'équation (8.4):

$$P_{C_{max}} = \frac{E_{Th}^2}{4R_{Th}} = \frac{(4)^2}{4(10)} = 0,4 \text{ W}$$

**EXEMPLE 8.17** Déterminer la valeur de  $R_C$  dans le réseau illustré à la figure 8.81 donnant lieu au transfert maximal de puissance et calculer la puissance maximale fournie.

Solution: Voir la figure 8.82.

$$R_{Th} = 3 + 10 + 2 = 15 \Omega$$

$$R_C = R_{Th} = 15 \Omega$$

Voir la figure 8.83. On a:

$$V_1 = (6)(10) = 60 \text{ V}$$

$$E_{Th} = 68 + 60 = 128 \text{ V}$$

$$P_{C_{max}} = \frac{E_{Th}^2}{4R_{Th}} = \frac{(128)^2}{(4)(15)} = 273,07 \text{ W}$$

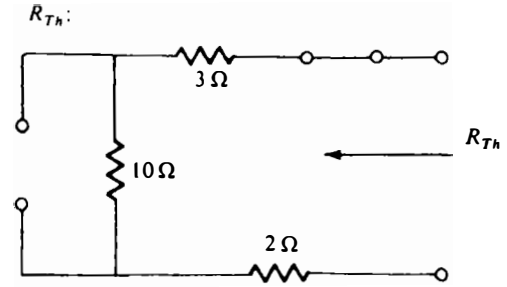


FIG. 8.82

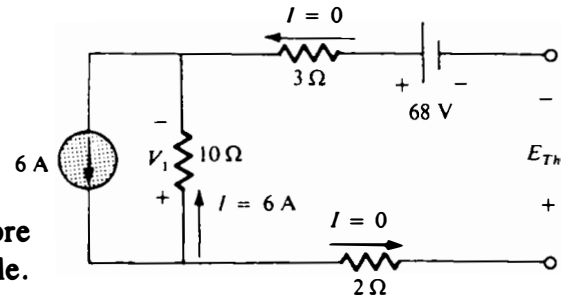


FIG. 8.83

### 8.6 THÉORÈME DE MILLMAN

Le *théorème de Millman* permet de remplacer un nombre quelconque de sources de tension en parallèle par une seule. Ainsi, les trois sources de tension du réseau illustré à la figure 8.84 sont remplacées par une seule source; le circuit résultant est représenté à la droite de la figure. Cette simplification permet de calculer le courant qui traverse  $R_C$ , ou encore la tension à ses bornes, sans qu'il soit nécessaire d'utiliser l'analyse par mailles, l'analyse par noeuds, le théorème de superposition ou les autres théorèmes déjà étudiés. Mettons en évidence l'essence du théorème à l'aide du réseau illustré à la figure 8.84. Son application se fait en trois étapes.

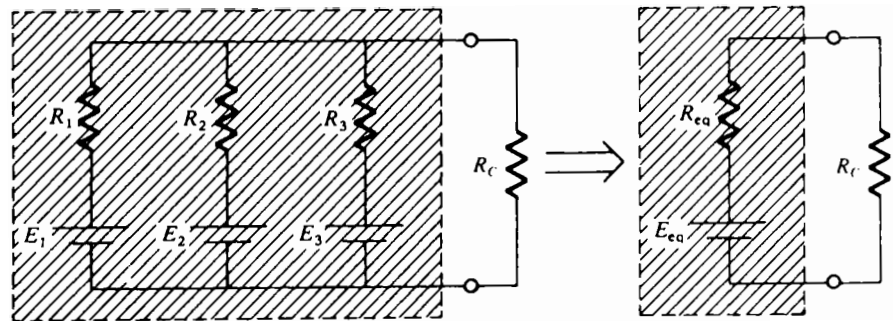


FIG. 8.84

Étape 1: Transposer toutes les sources de tension en sources de courant en suivant la méthode décrite à la section 7.3. Le résultat de la transposition apparaît à la figure 8.85.

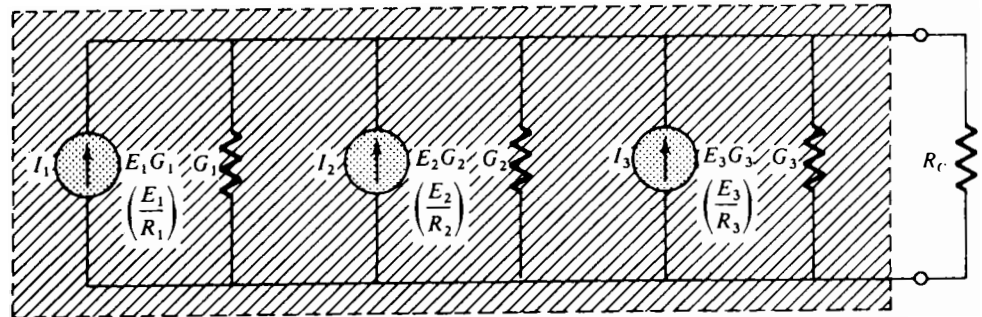


FIG. 8.85

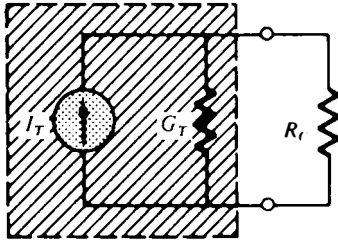


FIG. 8.86

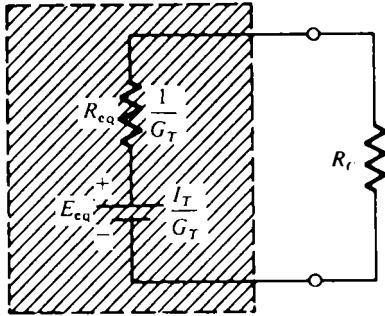


FIG. 8.87

Étape 2: Combiner toutes les sources de courant en parallèle de la façon indiquée à la section 7.4. La figure 8.86 illustre le circuit résultant, dans lequel:

$$I_T = I_1 + I_2 + I_3 \quad G_T = G_1 + G_2 + G_3$$

Étape 3: Transposer cette source de courant en une source de tension (voir la figure 8.87).

En règle générale, pour un nombre quelconque de sources de tension en parallèle, le théorème de Millman se traduit mathématiquement de la façon suivante:

$$E_{\text{eq}} = \frac{I_T}{G_T} = \frac{\pm I_1 \pm I_2 \pm I_3 \pm \cdots \pm I_N}{G_1 + G_2 + G_3 + \cdots + G_N}$$

$$E_{\text{eq}} = \frac{\pm E_1 G_1 \pm E_2 G_2 \pm E_3 G_3 \pm \cdots \pm E_N G_N}{G_1 + G_2 + G_3 + \cdots + G_N}$$

(8.7)

Les signes + et - permettent de tenir compte des cas où les sources ne sont pas toutes de même polarité. Un tel cas est étudié à l'exemple 8.18.

$$R_{\text{eq}} = \frac{1}{G_T} = \frac{1}{G_1 + G_2 + G_3 + \cdots + G_N} \quad (8.8)$$

En termes de valeurs ohmiques, la relation devient:

$$E_{\text{eq}} = \frac{\pm \frac{E_1}{R_1} \pm \frac{E_2}{R_2} \pm \frac{E_3}{R_3} \pm \cdots \pm \frac{E_N}{R_N}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots + \frac{1}{R_N}} \quad (8.9)$$

et:

$$R_{\text{eq}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots + \frac{1}{R_N}} \quad (8.10)$$

La méthode ne comptant que quelques étapes directes, il n'est peut-être pas nécessaire de mémoriser les équations (8.7) à (8.10); elles s'établissent facilement.

**EXEMPLE 8.18** À l'aide du théorème de Millman, déterminer le courant qui traverse la résistance  $R_C$  dans le réseau illustré à la figure 8.88, et calculer la tension à ses bornes.

*Solution:*

$$E_{eq} = \frac{+\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} + \frac{E_3}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

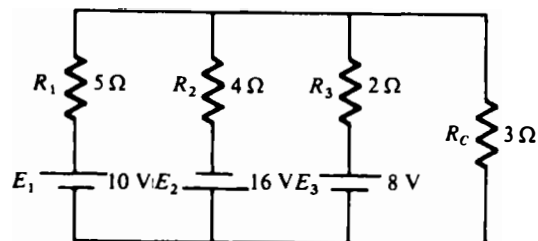


FIG. 8.88

L'expression  $E_2/R_2$  est affectée du signe moins, car la polarité de cette source est opposée à celle des deux autres. Le sens de référence choisi est par conséquent celui de  $E_1$  et  $E_3$ . La conductance totale ne dépend toutefois pas de la polarité des sources:

$$E_{eq} = \frac{+\frac{10}{5} - \frac{16}{4} + \frac{8}{2}}{\frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}} = \frac{2 - 4 + 4}{0,2 + 0,25 + 0,5}$$

$$= \frac{2}{0,95} = 2,105 \text{ V}$$

et:

$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{0,95} = 1,053 \Omega$$

La figure 8.89 représente la source résultante; sur cette figure, on a:

$$I_C = \frac{2,105}{1,053 + 3} = \frac{2,105}{4,053} = 0,519 \text{ A}$$

et:

$$V_C = I_C R_C = (0,519)(3) = 1,557 \text{ V}$$

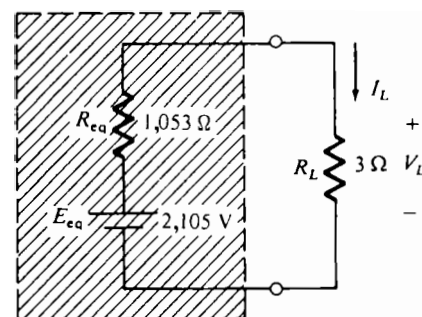


FIG. 8.89

**EXEMPLE 8.19** Considérons maintenant le type de problème présenté dans l'introduction à l'analyse par mailles et à l'analyse par noeuds au chapitre 7. Le réseau illustré à la figure 8.90 a été étudié au moyen de l'analyse par mailles (exemple 7.14). Nous allons déterminer le courant qui traverse la résistance de 2  $\Omega$  à l'aide du théorème de Millman, puis nous comparerons les résultats.

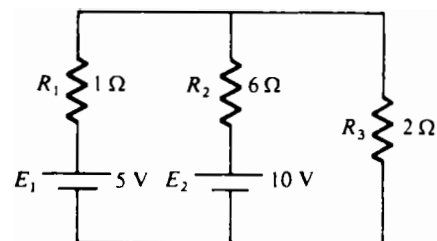


FIG. 8.90



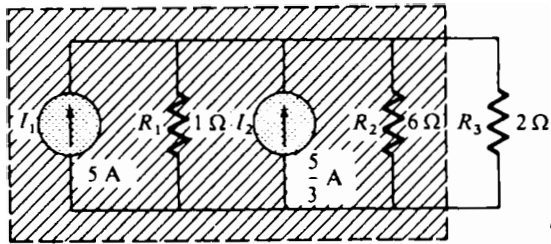


FIG. 8.91

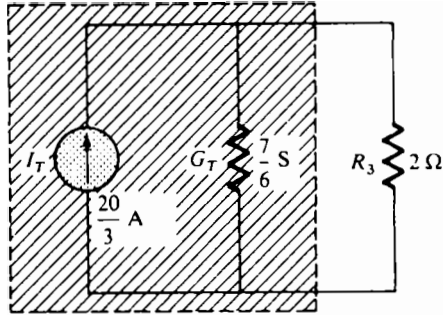


FIG. 8.92

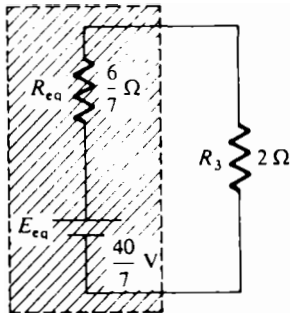


FIG. 8.93

*Solution:*

a. Résolvons d'abord le problème étape par étape, puis nous appliquerons en (b) l'équation (8.9) pour trouver notre réponse directement. La simplification des sources donne le réseau illustré à la figure 8.91. La combinaison des sources et des conductances des branches en parallèle (figure 8.92) donne:

$$I_T = I_1 + I_2 = 5 + \frac{5}{3} = \frac{15}{3} + \frac{5}{3} = \frac{20}{3} \text{ A}$$

$$G_T = G_1 + G_2 = 1 + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} + \frac{1}{6} = \frac{7}{6} \text{ S}$$

La transposition de la source de courant en une source de tension (figure 8.93) donne par ailleurs:

$$E_{eq} = \frac{I_T}{G_T} = \frac{\frac{20}{3}}{\frac{7}{6}} = \frac{6(20)}{3(7)} = \frac{40}{7} \text{ V}$$

et:

$$R_{eq} = \frac{1}{G_T} = \frac{1}{\frac{7}{6}} = \frac{6}{7} \Omega$$

de sorte que:

$$I_{2\Omega} = \frac{\frac{40}{7}}{\frac{6}{7} + 2} = \frac{\frac{40}{7}}{\frac{6}{7} + \frac{14}{7}} = \frac{40}{20} = 2 \text{ A}$$

ce qui concorde avec la solution du problème de l'exemple 7.14.

b. Appliquons maintenant directement l'équation (8.9):

$$E_{eq} = \frac{+\frac{5}{1} + \frac{10}{6}}{\frac{1}{1} + \frac{1}{6}} = \frac{\frac{30}{6} + \frac{10}{6}}{\frac{6}{6} + \frac{1}{6}} = \frac{40}{7} \text{ V}$$

et:

$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{1} + \frac{1}{6}} = \frac{1}{\frac{6}{6} + \frac{1}{6}} = \frac{1}{\frac{7}{6}} = \frac{6}{7} \Omega$$

résultats identiques aux précédents.

Le dual du théorème de Millman consiste à combiner des sources de courant en série. Ainsi, le dual du réseau illustré à la figure 8.84 est celui illustré à la figure 8.94.

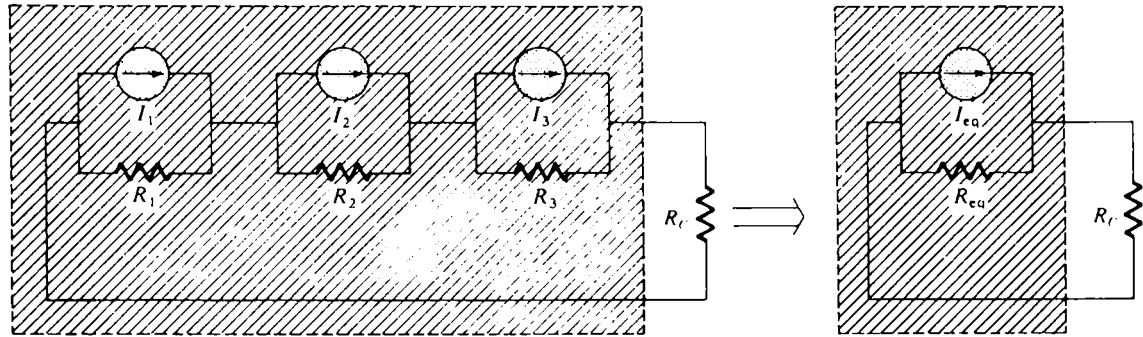


FIG. 8.94

Il est possible de démontrer que  $I_{eq}$  et  $R_{eq}$  dans le réseau illustré à la figure 8.94 sont donnés par les relations:

$$I_{eq} = \frac{\pm I_1 R_1 \pm I_2 R_2 \pm I_3 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (8.11)$$

et:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 \quad (8.12)$$

L'établissement de ces deux relations constitue un des problèmes de la fin du chapitre.

## 8.7 THÉORÈME DE SUBSTITUTION

Le théorème de substitution s'énonce ainsi:

*Si la tension aux bornes d'une branche d'un réseau linéaire bilatéral à courant continu est connue ainsi que le courant qui parcourt cette branche, celle-ci peut être remplacée par toute combinaison d'éléments ne faisant varier ni la tension ni le courant.*

En termes simples, le théorème dit que la tension aux bornes du montage équivalent et le courant qui le parcourt doivent demeurer les mêmes. Considérons le circuit illustré à la figure 8.95, dans lequel la tension aux bornes de la branche  $a-b$  et le courant parcourant cette branche sont déterminés. La figure 8.96 représente divers montages équivalents pouvant remplacer la branche  $a-b$  en vertu du théorème de substitution.

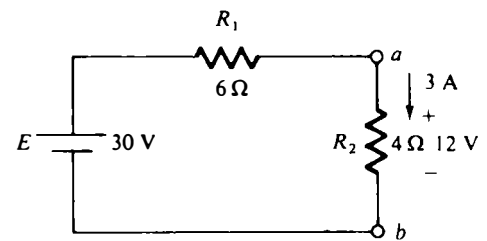


FIG. 8.95

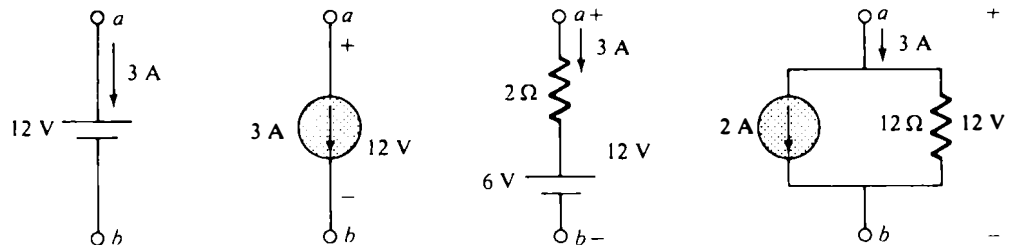


FIG. 8.96



Chaque montage équivalent présente les mêmes caractéristiques de tension et d'intensité que la branche originale du réseau. La substitution n'influe donc aucunement sur le reste du réseau. Comme le laisse deviner la figure 8.96, *une différence de potentiel connue dans un réseau peut être remplacée par une source de tension idéale et, de façon semblable, une branche parcourue par un courant connu peut être remplacée par une source de courant idéale.*

Manifestement, le théorème n'est d'aucune utilité si le réseau étudié comporte plusieurs sources qui ne sont ni en série ni en parallèle. Pour être en mesure de s'en servir, il faut d'abord déterminer une différence de potentiel ou un courant au moyen d'une des techniques déjà étudiées. La figure 8.97 illustre une application du théorème. La substitution d'une source de tension à une différence de potentiel connue ( $V$ ) permet d'isoler la partie du réseau constituée des résistances  $R_3$ ,  $R_4$  et  $R_5$ . Cette approche est essentiellement celle que nous avons utilisée dans l'analyse de ce réseau en échelle pour déterminer à rebours la valeur de  $R_5$ .

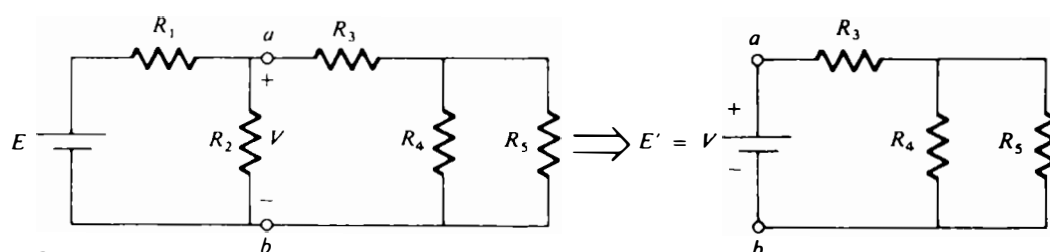


FIG. 8.97

La source de courant équivalente est illustrée à la figure 8.98. Dans ce cas, la substitution d'une source de courant idéale à la branche  $a-b$  parcourue par un courant connu permet d'isoler et de déterminer  $R_4$  et  $R_5$ .

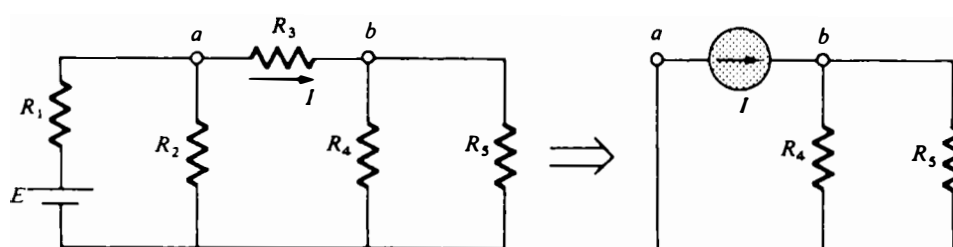


FIG. 8.98

On se rappellera par ailleurs que dans l'analyse des réseaux en pont,  $V = 0$  et  $I = 0$  avaient été respectivement remplacés par un court-circuit et par un circuit ouvert. Tout compte fait, il s'agissait d'une application particulière du théorème de substitution.

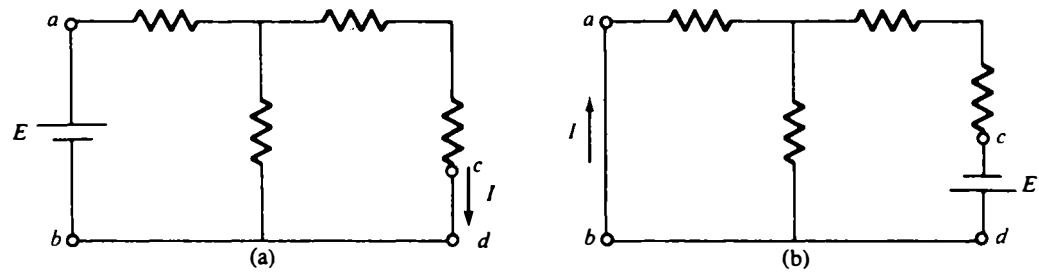
## 8.8 THÉORÈME DE RÉCIPROCITÉ

Le théorème de réciprocité ne s'applique qu'aux réseaux ne comptant qu'une seule source. Il s'énonce ainsi:

Le courant  $I$  qui parcourt une branche quelconque d'un réseau et qui est créé par une source de tension appartenant à une autre branche est égal au courant qui passerait dans cette dernière branche si la source était placée dans la branche que parcourt  $I$ .

Autrement dit, la permutation d'une source et d'un courant, qui s'est produit par celle-ci, n'a aucune incidence sur le courant. Pour que le théorème puisse s'appliquer, il faut toutefois que la polarité de la source de tension corresponde au sens du courant qui parcourt chacune des branches faisant l'objet de la permutation.

Dans le réseau illustré à la figure 8.99a, le courant  $I$  créé par la source de tension  $E$  a été déterminé. Si on permute le courant et la source comme le représente la figure 8.99b, le courant  $I$


**FIG. 8.99**

ne varie pas. Pour nous convaincre de la validité du théorème, considérons le réseau illustré à la figure 8.100.

Sa résistance totale est:

$$\begin{aligned} R_T &= 12 + 6 \parallel (2 + 4) \\ &= 12 + 6 \parallel 6 \\ &= 12 + 3 \\ R_T &= 15 \Omega \end{aligned}$$

et:

$$I_T = \frac{E}{R_T} = \frac{45}{15} = 3 \text{ A}$$

avec:

$$I = \frac{3}{2} = 1,5 \text{ A}$$

Dans le réseau illustré à la figure 8.101, la permutation a été faite. Nous avons:

$$R_T = 12 \parallel 6 + 2 + 4 = 4 + 6 = 10 \Omega$$

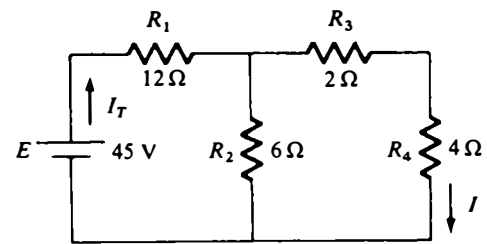
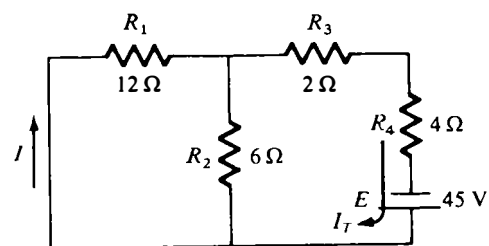
et:

$$I_T = \frac{E}{R_T} = \frac{45}{10} = 4,5 \text{ A}$$

de sorte que:

$$I = \frac{6(4,5)}{12 + 6} = \frac{4,5}{3} = 1,5 \text{ A}$$

ce qui concorde avec les résultats ci-dessus.


**FIG. 8.100**

**FIG. 8.101**



L'importance et l'originalité du théorème sont mises en évidence lorsque celui-ci est appliqué à des circuits complexes comme celui illustré à la figure 8.102.

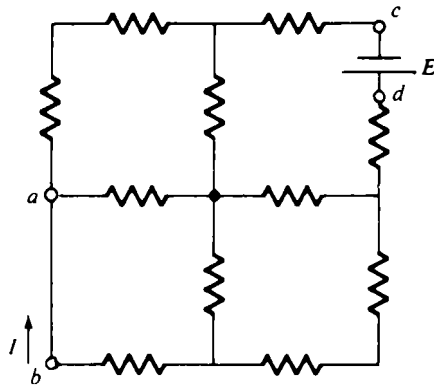
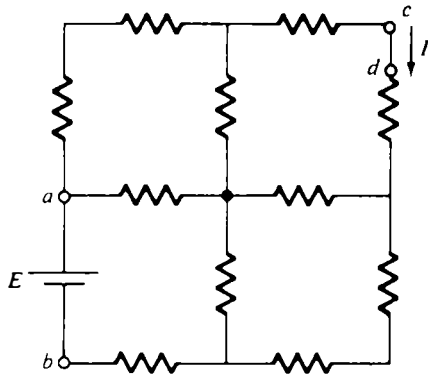


FIG. 8.102

### PROBLÈMES

#### Section 8.2

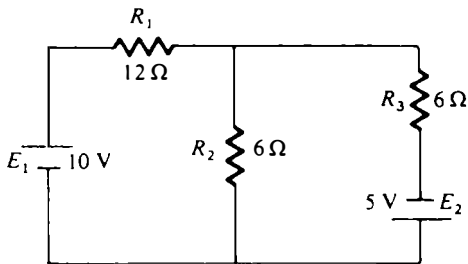
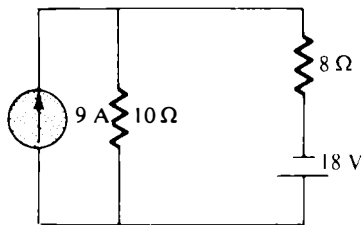


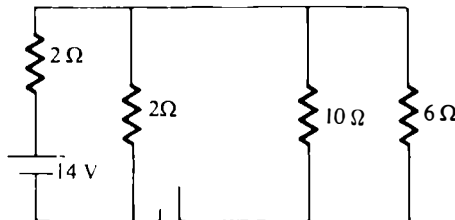
FIG. 8.103

1. a. Au moyen du théorème de superposition, déterminez le courant qui traverse chacune des résistances du réseau illustré à la figure 8.103.
- b. Calculez la puissance fournie à  $R_1$  par chaque source.
- c. Calculez la puissance fournie à  $R_1$  en déterminant le courant total qui traverse cette résistance.
- d. Cette puissance se calcule-t-elle à l'aide du théorème de superposition? Expliquez pourquoi.

2. Au moyen du théorème de superposition, déterminez le courant qui traverse la résistance de  $10 \Omega$  dans chacun des réseaux illustrés à la figure 8.104.



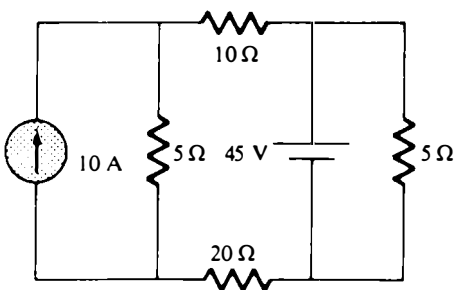
(a)



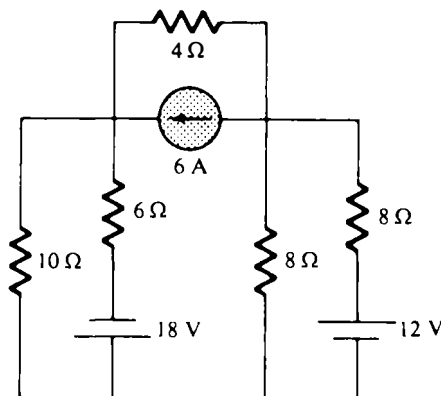
(b)

FIG. 8.104

- \*3. Refaites le problème 2 dans le cas du réseau illustré à la figure 8.105.



(I)



(II)

FIG. 8.105

4. Au moyen du théorème de superposition, calculez la tension  $V_2$  dans le réseau illustré à la figure 8.106.

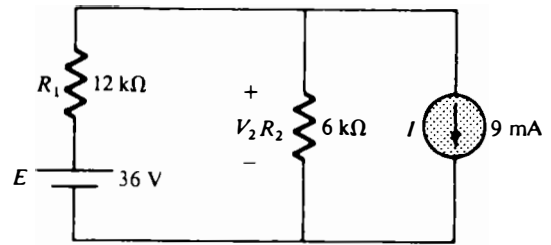


FIG. 8.106

Section 8.3

5. a. Dessinez le générateur de Thévenin du réseau illustré à la figure 8.107, sans tenir compte de la résistance  $R$ .  
 b. Déterminez le courant qui traverse  $R$  si celle-ci prend successivement les valeurs suivantes:  $2\ \Omega$ ,  $30\ \Omega$  et  $100\ \Omega$ .

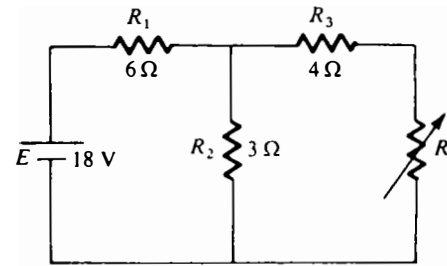


FIG. 8.107

6. a. Dessinez le générateur de Thévenin de chacun des réseaux illustrés à la figure 8.108, sans tenir compte de la résistance  $R$ .  
 b. Calculez la puissance fournie à  $R$  sachant que celle-ci vaut successivement  $2\ \Omega$  et  $100\ \Omega$ .

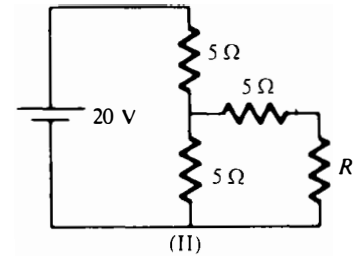
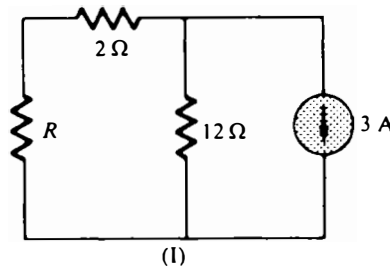


FIG. 8.108

7. Refaites le problème 6 dans le cas des réseaux illustrés à la figure 8.109.

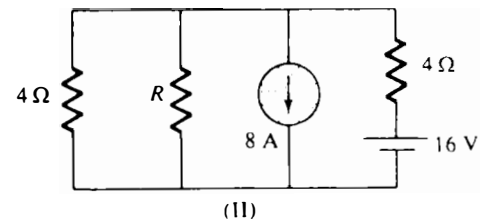
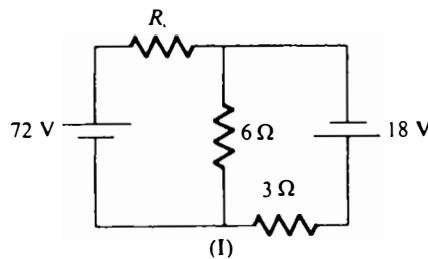


FIG. 8.109

- \*8. Refaites le problème 6 dans le cas des réseaux illustrés à la figure 8.110.

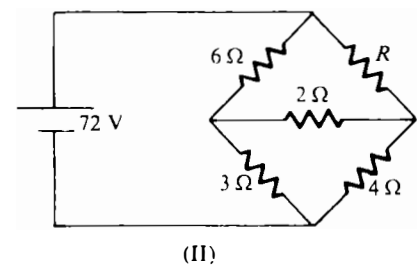
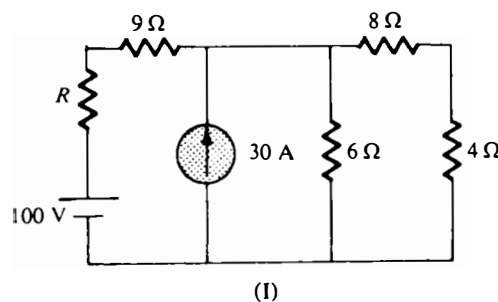


FIG. 8.110



9. Dessinez le générateur de Thévenin de la partie des réseaux illustrés à la figure 8.111 extérieure aux points  $a$  et  $b$ .

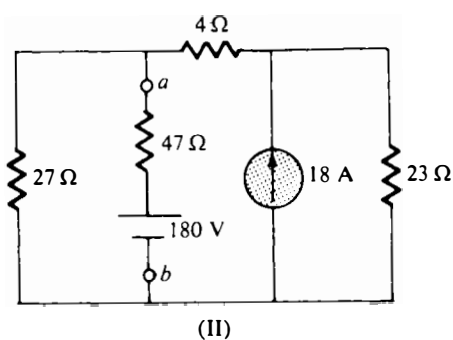
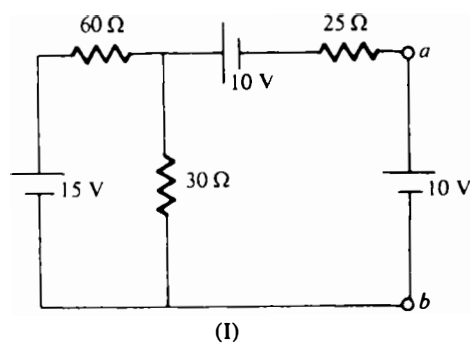


FIG. 8.111

- \*10. Refaites le problème 9 dans le cas des réseaux illustrés à la figure 8.112.

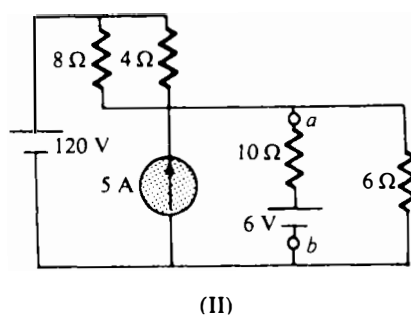
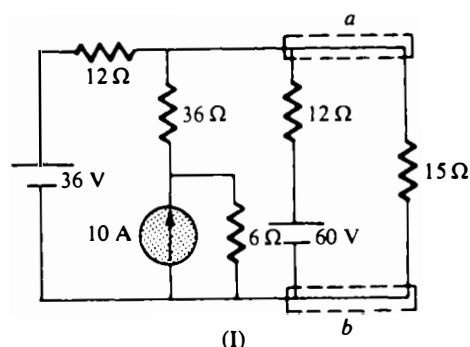


FIG. 8.112

#### Section 8.4

11. Dessinez le générateur de Norton de la partie des réseaux illustrés à la figure 8.108 extérieure à la résistance  $R$ , en:
  - a. suivant la méthode exposée dans le manuel;
  - b. transposant le générateur de Thévenin obtenu au problème 6.
12. Refaites le problème 11 dans le cas des réseaux illustrés à la figure 8.109 (les générateurs de Thévenin ont été obtenus au problème 7).
- \*13. Refaites le problème 11 dans le cas des réseaux illustrés à la figure 8.110 (les générateurs de Thévenin ont été obtenus au problème 8).
14. Dessinez le générateur de Norton de la partie des réseaux illustrés à la figure 8.111 extérieure aux points  $a$  et  $b$ , en:
  - a. suivant la méthode exposée dans le manuel;
  - b. transposant les générateurs de Thévenin obtenus au problème 9.
- \*15. Refaites le problème 14 dans le cas des réseaux illustrés à la figure 8.112 (les générateurs de Thévenin ont été obtenus au problème 10).
16. Dessinez le générateur de Norton de la partie des réseaux illustrés à la figure 8.113 extérieure aux points  $a$  et  $b$ .

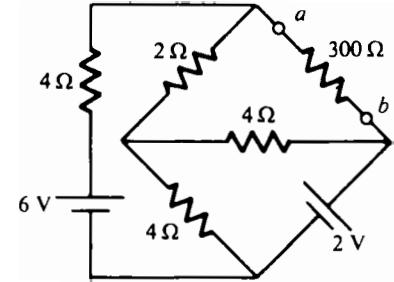
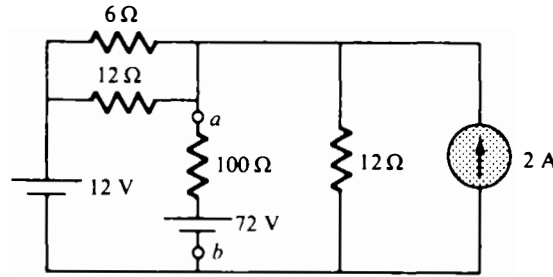


FIG. 8.113

Section 8.5

- 17. a. Pour chaque réseau illustré à la figure 8.108, déterminez la valeur de  $R$  permettant un transfert maximal de puissance à cette résistance.  
b. Pour chaque réseau, calculez la puissance maximale fournie à  $R$ .
- 18. Refaites le problème 17 dans le cas des circuits illustrés à la figure 8.109.
- \*19. Refaites le problème 17 dans le cas des réseaux illustrés à la figure 8.110).
- 20. a. Dans le réseau illustré à la figure 8.114, quelle doit être la valeur de  $R$  pour que la puissance qu'elle reçoit soit maximale?  
b. Calculez la puissance maximale fournie à  $R$ .  
c. Tracez la courbe de la puissance en fonction de  $R$  en prenant, comme valeurs de  $R$ , 0,25, 0,50, 0,75, 1, 1,25, 1,50, 1,75 et 2 fois la valeur obtenue en (a).
- \*21. Calculez la résistance  $R_1$  du réseau illustré à la figure 8.115 permettant un transfert maximal de puissance à la résistance  $R_4$ . Attention au piège!

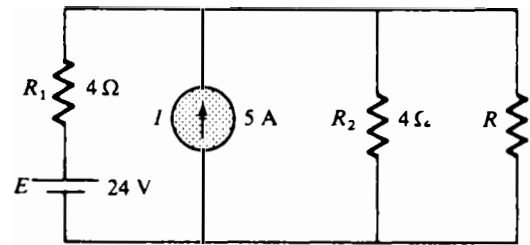


FIG. 8.114

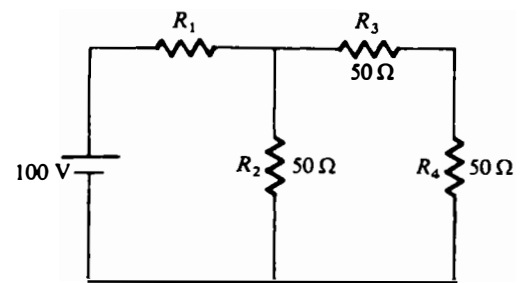


FIG. 8.115

- \*22. a. Calculez la résistance  $R_2$  du réseau illustré à la figure 8.116 permettant un transfert maximal de puissance à la résistance  $R_4$ .  
b. Peut-on dégager une conclusion générale des réponses aux problèmes 21 et 22?

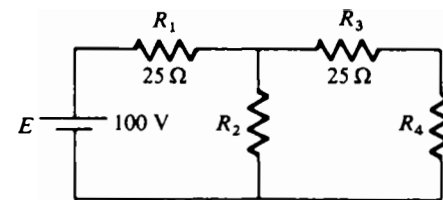


FIG. 8.116

Section 8.6

- 23. Au moyen du théorème de Millman, calculez le courant qui traverse la résistance  $R_C$  dans le réseau illustré à la figure 8.117, ainsi que la tension à ses bornes.

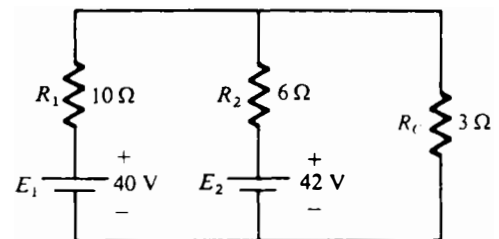


FIG. 8.117



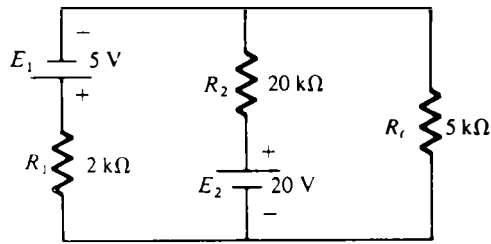


FIG. 8.118

24. Refaites le problème 23 dans le cas du réseau illustré à la figure 8.118.

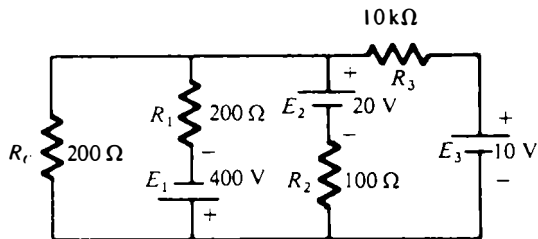


FIG. 8.119

25. Refaites le problème 23 dans le cas du réseau illustré à la figure 8.119.

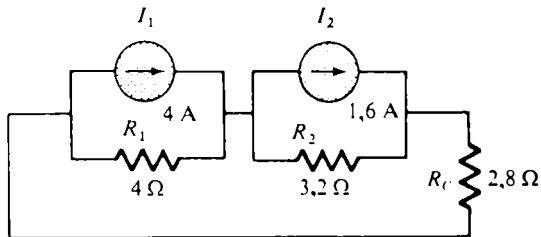


FIG. 8.120

26. Au moyen du dual du théorème de Millman, déterminez le courant qui traverse la résistance  $R_C$  dans le réseau illustré à la figure 8.120, ainsi que la tension à ses bornes.

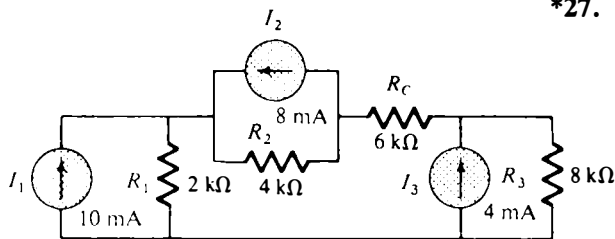


FIG. 8.121

\*27. Refaites le problème 26 dans le cas du réseau illustré à la figure 8.121.

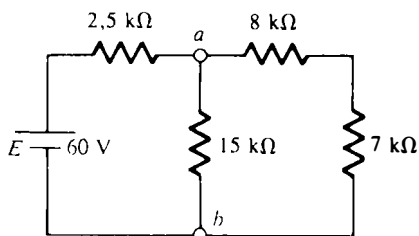


FIG. 8.122

Section 8.7

28. En faisant appel au théorème de substitution, dessinez trois branches équivalentes de la branche  $a-b$  du réseau illustré à la figure 8.122.

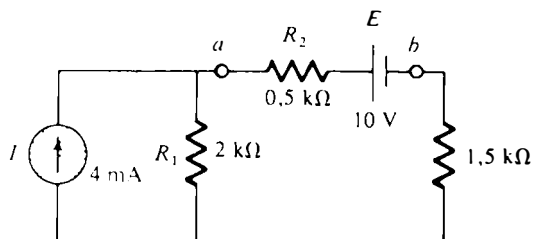


FIG. 8.123

29. Répondez au problème 28 dans le cas du réseau illustré à la figure 8.123.

\*30. Répondez au problème 28 dans le cas du réseau illustré à la figure 8.124.

Section 8.8

31. a. Déterminez le courant  $I$  dans le réseau illustré à la figure 8.125a.
- b. Déterminez le courant  $I$  dans le réseau illustré à la figure 8.125b.
- c. Le théorème de réciprocité est-il vérifié?

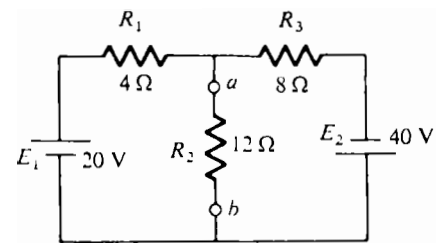


FIG. 8.124

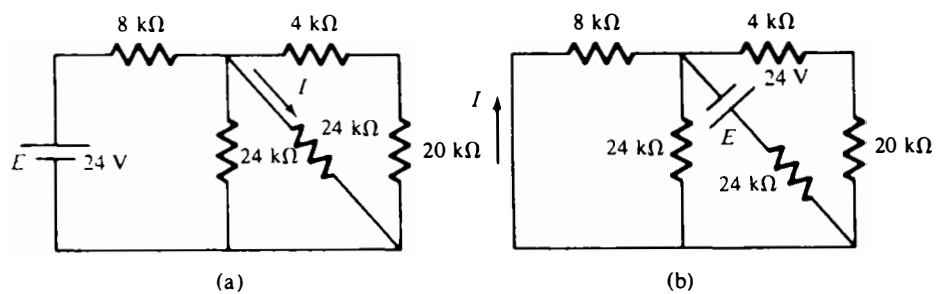


FIG. 8.125

32. Procédez de la même façon que celle utilisée au problème 31 et assurez-vous que le théorème de réciprocité soit vérifié pour les réseaux illustrés à la figure 8.126.

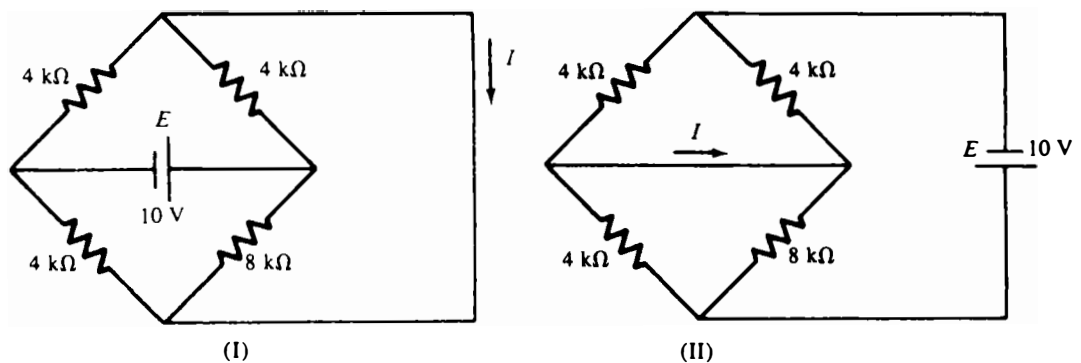


FIG. 8.126

33. a. Déterminez la tension  $V$  dans le réseau illustré à la figure 8.127a.
- b. Déterminez la tension  $V$  dans le réseau illustré à la figure 8.127b.
- c. Le dual du théorème de réciprocité est-il vérifié?

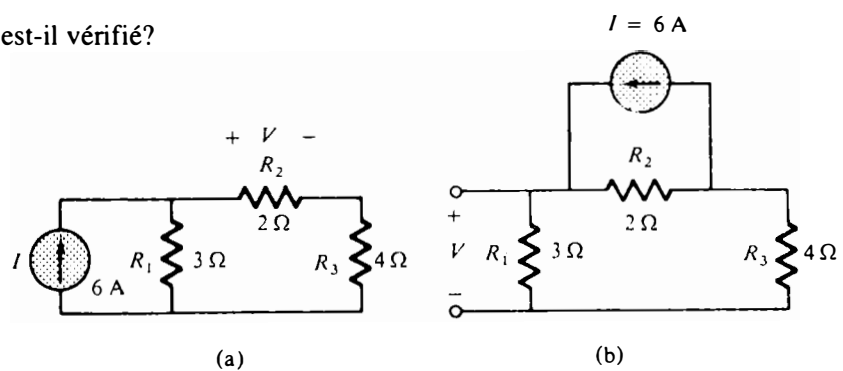


FIG. 8.127

## GLOSSAIRE

**Théorème de Millman** Méthode de transposition des sources permettant de déterminer les inconnues dans un réseau à plusieurs boucles.

**Théorème de Norton** Théorème permettant, en courant continu, de réduire tout réseau linéaire à deux bornes à un réseau constitué d'une seule source de courant et d'une résistance montée en parallèle avec celle-ci.

**Théorème de réciprocité** Théorème stipulant que, dans les réseaux ne comptant qu'une seule source, le courant, qui parcourt une branche quelconque et qui est créé par une source de tension appartenant à une autre branche, est égal au courant qui passerait dans cette dernière branche si la source était placée dans la première branche.

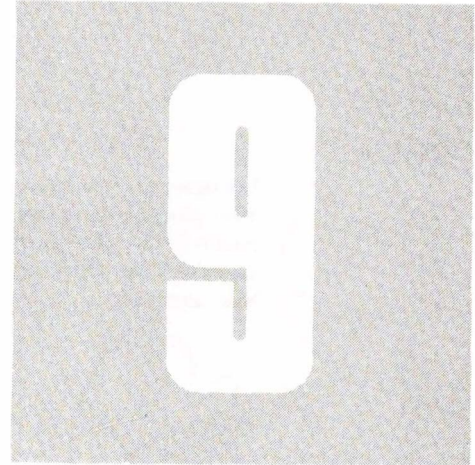
**Théorème de substitution** Théorème qui stipule que si la tension aux bornes d'une branche d'un réseau linéaire bilatéral en courant continu est connue ainsi que le courant qui parcourt cette branche, cette dernière peut être remplacée par toute combinaison d'éléments ne faisant varier ni la tension ni le courant.

**Théorème de superposition** Théorème permettant de traiter chaque source séparément. Le courant résultant ou la tension résultante est la somme algébrique des courants ou des tensions créés par chaque source.

**Théorème de Thévenin** Théorème permettant, en courant continu, de réduire tout réseau linéaire à deux bornes à un réseau constitué d'une seule source de tension et d'une résistance en série avec celle-ci.

**Théorème du transfert maximal de puissance** Théorème servant à déterminer la résistance de charge correspondant au transfert maximal de puissance à la charge.

# CONDENSATEURS



## 9.1 INTRODUCTION

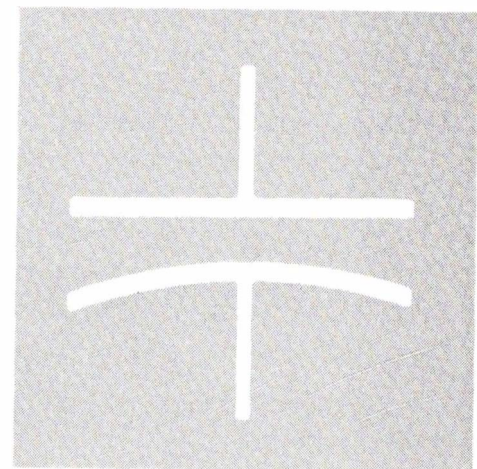
Jusqu'à maintenant, il n'a été question dans le manuel que d'un seul composant passif, la résistance. Nous allons maintenant étudier deux autres composants passifs, le *condensateur* et la *bobine*, qui se distinguent de la résistance tant par leur usage et leur fonctionnement que par leur fabrication.

Contrairement à la résistance, ces composants révèlent leurs caractéristiques seulement s'il y a une variation de tension ou d'intensité dans le circuit dont ils font partie. En outre, *idéalement* ils ne dissipent pas d'énergie mais ils l'emmagasinent sous une forme telle qu'elle peut être restituée au circuit.

Les caractéristiques de ces composants sont complexes. Le chapitre 9 est exclusivement consacré à l'étude du condensateur et le chapitre 11, à l'étude de la bobine. Quant au chapitre 10, il fait l'analyse des circuits magnétiques, puisque la bobine est sensible aux effets électromagnétiques.

## 9.2 LE CHAMP ÉLECTRIQUE

Au chapitre 2, nous avons appris qu'il existe une force d'attraction ou de répulsion entre deux corps électrisés. Nous poursuivons maintenant l'étude de ce phénomène en considérant le champ électrique qui existe autour d'un corps électrisé. Le champ électrique est représenté par des lignes de force, dont la densité indique l'intensité du champ en tout point de l'espace





Les lignes de force associées à une charge positive sont centrifuges et celles qui sont associées à une charge négative sont centripètes.

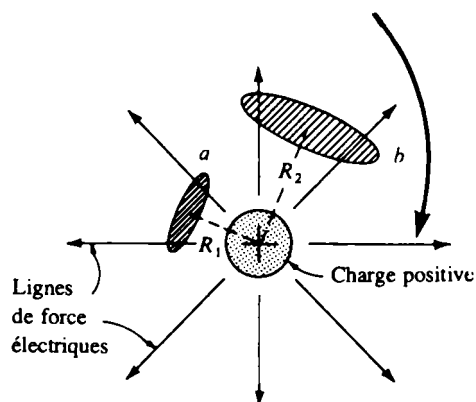


FIG. 9.1

entourant le corps électrisé; plus précisément, plus la densité des lignes de force est grande, plus intense est le champ électrique. À la figure 9.1, le champ électrique est plus intense à la position  $a$  qu'à la position  $b$ , la densité des lignes de force étant plus grande en  $a$  qu'en  $b$ . Le symbole du flux électrique est la lettre grecque  $\psi$  (psi). Le déplacement électrique, incorrectement appelé densité du flux, est représenté par la majuscule  $D$  et est déterminé par la relation:

$$D = \frac{\psi}{A} \quad (\text{flux/aire unitaire}) \quad (9.1)$$

Par ailleurs, plus grande est la charge  $Q$  en coulombs du corps électrisé, plus grand est le nombre de lignes de force par aire unitaire, peu importe la nature du milieu. Ainsi le déplacement double si la charge double. On peut donc écrire:

$$\psi \equiv Q \quad (\text{coulombs, C}) \quad (9.2)$$

Par définition, l'intensité du champ électrique à un point donné est la force qui agit sur une charge positive unitaire placée à ce point; cela se traduit par:

$$\mathcal{E} = \frac{F}{Q} \quad (\text{newtons/coulomb, N/C}) \quad (9.3)$$

La force qu'une charge positive unitaire ( $Q_2 = 1$ ) exerce sur une charge  $Q_1$ , située à une distance  $r$  est déterminée par la loi de Coulomb:

$$F = \frac{kQ_1Q_2}{r^2} = \frac{kQ_1(1)}{r^2} = \frac{kQ_1}{r^2} \quad (k = 9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)$$

La substitution de cette expression de la force  $F$  dans l'équation (9.3) donne:

$$\mathcal{E} = \frac{F}{Q_2} = \frac{kQ_1/r^2}{1}$$

$$\mathcal{E} = \frac{kQ_1}{r^2} \quad (\text{N/C}) \quad (9.4)$$

On peut donc conclure que l'intensité du champ électrique à tout point situé à une distance  $r$  d'une charge ponctuelle  $Q$  est directement proportionnelle à la grandeur de la charge et inversement proportionnelle au carré de la distance  $r$ . La présence du terme au carré au dénominateur explique la chute rapide de l'intensité du champ électrique à mesure que la distance  $r$  augmente. À la figure 9.1, la substitution des dis-



tances  $R_1$  et  $R_2$  dans l'équation (9.4) confirme notre conclusion antérieure: l'intensité du champ électrique est plus grande en  $a$  qu'en  $b$ .

Les lignes de force associées à une charge positive sont toujours centrifuges, et celles associées à une charge négative sont centripètes. Les lignes sont perpendiculaires à la surface des corps électrisés et elles ne se croisent jamais. La figure 9.2 illustre les spectres du champ électrique obtenu dans le cas de deux charges semblables et dans le cas de deux charges opposées.

L'attraction ou la répulsion qui existent entre les charges peuvent maintenant être interprétées en termes du champ électrique et de ses lignes de force. À la figure 9.2a, les lignes de force entre les deux charges ne chevauchent pas mais elles se compriment pour agir comme un ressort qui tend à écarter les charges. L'intensité du champ électrique augmente (plus grand nombre de lignes de force) à mesure que les deux charges se rapprochent l'une de l'autre; la force de répulsion entre les charges est donc plus grande. À la figure 9.2b, les lignes de force partant de la charge positive arrivent à la charge négative. Une loi fondamentale de la physique énonce que les lignes de force électriques tendent toujours à être les plus courtes possible. Les deux charges sont donc attirées l'une par l'autre. Plus les deux charges sont rapprochées, plus grande est la force d'attraction entre elles, en raison de l'augmentation de l'intensité du champ.

### 9.3 CAPACITÉ

Nous n'avons considéré jusqu'à maintenant que des charges sphériques isolées, positives et négatives, mais l'analyse qui a été faite peut être appliquée à toute surface électrisée, peu en importe la forme et les dimensions. À la figure 9.3, nous avons raccordé deux plaques conductrices parallèles à une source de tension au moyen d'un circuit comprenant une résistance et un interrupteur; une couche d'air sépare les deux plaques. Des plaques ainsi montées portent le nom d'armatures. Si au départ les armatures étaient non électrisées et que l'interrupteur soit ouvert, il n'existe aucune charge positive ou négative sur l'une ou l'autre des armatures. Mais dès que l'interrupteur est fermé, des électrons passent de l'armature supérieure à la borne positive de la batterie, en traversant la résistance. Ce déplacement d'électrons crée une charge nette positive sur l'armature supérieure. Par ailleurs, la borne négative de la batterie repousse des électrons qui s'accumulent sur l'armature inférieure; le nombre d'électrons passant à cette armature en une période de temps donné est égal au nombre d'électrons qui quittent l'armature supérieure. Ce transfert d'électrons se poursuit tant que

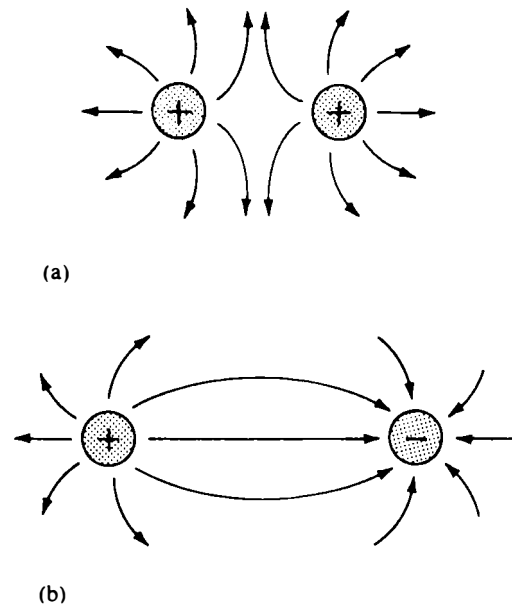


FIG. 9.2

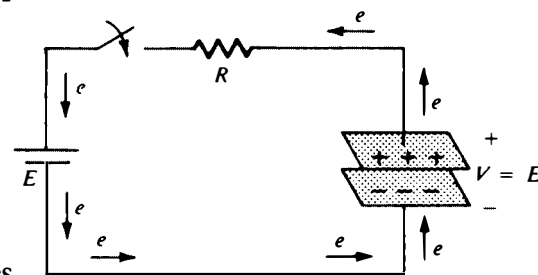


FIG. 9.3



la différence de potentiel entre les armatures parallèles n'est pas égale à la f.é.m. de la batterie. À la fin du transfert, il apparaît une charge nette positive sur l'armature inférieure, situation qui s'apparente donc à de nombreux égards à celle des deux charges isolées illustrées à la figure 9.2b.

Un tel montage parallèle de deux armatures séparées par un matériau isolant (dans ce cas particulier, l'air) constitue un condensateur simple. La *capacité* est la mesure de l'aptitude du condensateur à emmagasiner des charges sur ses armatures; en d'autres termes, elle est une mesure de son pouvoir d'emmagasinage. La capacité d'un condensateur est d'un farad si une différence de potentiel d'un volt entre ses armatures y dépose une charge d'un coulomb. Cette unité a été nommée en l'honneur de Michael Faraday, physicien et chimiste anglais du XIX<sup>e</sup> siècle. Le farad est toutefois une unité trop grande pour être commode dans la plupart des cas; le micro-farad ( $\mu\text{F}$ ) et le picofarad (pF) sont donc habituellement employés. Mathématiquement, la capacité d'un condensateur est déterminée par:

$$C = \frac{Q}{V} \quad \begin{array}{l} C = \text{farads (F)} \\ Q = \text{coulombs (C)} \\ V = \text{volts (V)} \end{array} \quad (9.5)$$

Pour la même tension aux bornes de leurs armatures, des condensateurs différents emmagasinent de plus ou moins grandes charges. La capacité des condensateurs dépend donc, entre autres, de leur fabrication.

La figure 9.4a illustre une coupe des armatures parallèles ainsi que le spectre du champ. Le déplacement ( $D$ ) entre les deux armatures est passablement uniforme. Sur les bords, les lignes de force débordent de l'espace compris entre les armatures, créant ainsi un effet appelé *effet des bords*. Bien qu'il réduise quelque peu la capacité des condensateurs, cet effet peut être négligé dans la plupart des applications pratiques. Aussi, nous supposons dans l'étude qui suit que toutes les lignes de force sont situées dans l'espace compris entre les armatures (figure 9.4b).

Supposons qu'il existe une différence de potentiel  $V$  entre deux armatures séparées d'une distance  $d$ ; l'intensité du champ électrique entre les armatures est alors déterminée par:

$$\mathcal{E} = \frac{V}{d} \quad (\text{volts/mètre, V/m}) \quad (9.6)$$

Par ailleurs, l'uniformité du spectre illustré à la figure 9.4b indique aussi que l'intensité du champ est partout la même entre les deux armatures.

Sans en changer les armatures, on peut faire varier la capacité d'un condensateur en intercalant entre celles-ci divers

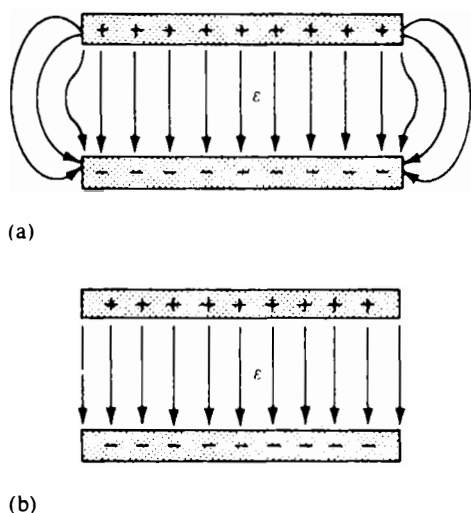


FIG. 9.4



matériaux isolants. À la figure 9.5a, un matériau isolant donné a été placé entre deux armatures parallèles auxquelles est appliquée une différence de potentiel  $V$ .

Comme le matériau est un isolant, ses électrons sont retenus par les atomes parents de sorte qu'ils ne peuvent pas se déplacer vers l'armature positive. Par contre, dans chaque atome les électrons tendent à se rapprocher de l'armature positive et les protons, de l'armature négative (voir la figure 9.5a), ce qui donne naissance à des *dipôles*.

Lorsque tous les atomes de l'isolant se sont transformés en dipôles et qu'ils s'alignent de la façon indiquée à la figure 9.5a, on dit que le matériau est *polarisé*. Un examen attentif du matériau polarisé révélerait que les composantes positives et négatives des dipôles voisins se neutralisent (comme à l'intérieur de la région encerclée à la figure 9.5a). Toutefois, la couche superficielle des charges positives près de l'armature négative et celle des charges négatives près de l'armature positive ne sont pas neutralisées, ce qui donne naissance à un champ électrique au sein de l'isolant ( $\mathcal{E}_{\text{diél}}$  à la figure 9.5b). Le champ électrique net entre les armatures ( $\mathcal{E}_{\text{résultant}} = \mathcal{E}_{\text{air}} - \mathcal{E}_{\text{diél}}$ ) devrait donc être d'une intensité moindre en raison de la présence du diélectrique.

L'effet du diélectrique est par conséquent de créer un champ électrique qui s'oppose à celui établi par les charges libres accumulées sur les armatures parallèles. C'est d'ailleurs pour cette raison qu'on emploie le terme *diélectrique* pour désigner le matériau isolant ainsi utilisé, le préfixe *di* étant une forme de la particule latine qui signifie défaut, opposition.

Mais qu'il y ait ou non présence d'un diélectrique, le champ électrique net entre les armatures doit demeurer le même, comme l'indique l'équation (9.6), pour autant que la différence de potentiel entre les armatures demeure constante et que la distance entre celles-ci soit fixe. Nous venons toutefois d'affirmer que la présence d'un diélectrique intercalé entre les armatures devrait faire diminuer l'intensité du champ électrique net. Pour que cela ne se produise pas et que l'intensité du champ demeure égale au quotient  $V/d$ , il faut donc que des charges supplémentaires s'accumulent sur les armatures [voir l'équation (9.11)]. La différence de potentiel entre les armatures ne changeant pas, ces charges supplémentaires font augmenter la capacité du condensateur, comme l'illustre la relation:

$$C \uparrow = \frac{Q \uparrow}{V}$$

La grandeur de la charge supplémentaire qui s'accumule sur les armatures varie en fonction de la nature du matériau diélectrique. Mais comme  $\psi \equiv Q$  et que  $A$  est fixe, le nombre de lignes de force entre les deux armatures et, par conséquent, le déplacement ( $D \equiv \psi/A$ ) dépendent aussi de la nature du diélectrique.

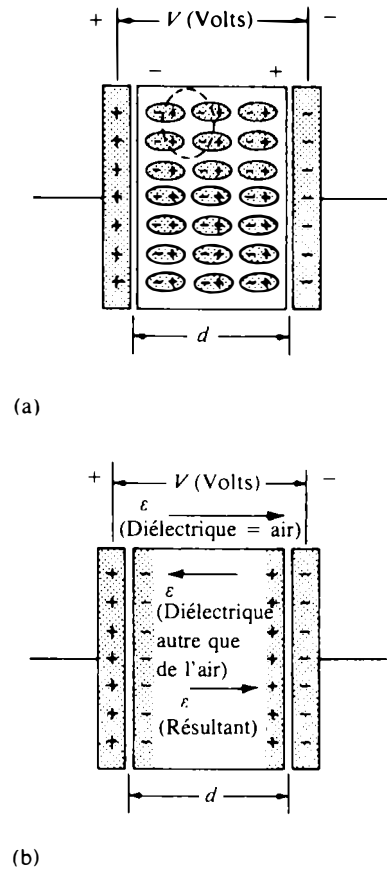


FIG. 9.5





Le rapport du déplacement et de l'intensité du champ électrique existant dans le diélectrique est appelé *permittivité* du diélectrique:

$$\epsilon = \frac{D}{\mathcal{E}} \quad (\text{farads/mètre, F/m}) \quad (9.7)$$

La permittivité est une mesure de la facilité avec laquelle les lignes de force s'établissent dans le diélectrique. Plus elle est grande plus grande est la charge accumulée sur les armatures et par conséquent plus grand est le déplacement.

La permittivité du vide (représenté par  $\epsilon_0$  est de  $8,85 \times 10^{-12}$  F/m. Le rapport de la permittivité d'un matériau diélectrique quelconque à celle du vide est appelé la *permittivité relative* ( $\epsilon_r$ ) du matériau:

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \quad (9.8)$$

La permittivité  $\epsilon$  d'un matériau est donc:

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$$

À noter que  $\epsilon_r$  est un nombre pur. La permittivité relative, plus fréquemment appelée *constante diélectrique*, de divers diélectriques est donnée au tableau 9.1.

**TABLEAU 9.1** *Permittivité relative (constante diélectrique) de divers diélectriques.*

Diélectrique	$\epsilon_r$ (valeur moyenne)
Vide	1.0
Air	1.0006
Téflon	2.0
Papier paraffiné	2.5
Caoutchouc	3.0
Huile pour transformateur	4.0
Mica	5.0
Porcelaine	6.0
Bakélite	7.0
Verre	7.5
Eau	80.0
Titanate de baryum et de strontium (céramique)	7500.0

Substituons à  $D$  et à  $\mathcal{E}$  leurs valeurs respectives dans l'équation (9.7); nous avons:

$$\epsilon = \frac{D}{\mathcal{E}} = \frac{\psi/A}{V/d} = \frac{Q/A}{V/d} = \frac{Qd}{VA}$$

Puisque:

$$C = \frac{Q}{V}, \quad \therefore \epsilon = \frac{Cd}{A}$$



alors:

$$C = \frac{\epsilon A}{d} \quad (\text{farads, F}) \quad (9.9)$$

ou encore:

$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d} = 8.85 \times 10^{-12} \epsilon_r \frac{A}{d} \quad (\text{F}) \quad (9.10)$$

Dans cette dernière équation,  $A$  est l'aire en mètres carrés des armatures,  $d$  est la distance en mètres entre les armatures et  $\epsilon_r$  est la constante diélectrique. La capacité est donc directement proportionnelle à l'aire des armatures et à la constante diélectrique, et inversement proportionnelle à la distance entre les armatures.

L'équation (9.9) donne comme expression de  $d$ :

$$d = \frac{\epsilon A}{C}$$

La substitution de cette expression dans l'équation (9.6) donne:

$$\mathcal{E} = \frac{V}{d} = \frac{V}{\epsilon A / C} = \frac{CV}{\epsilon A}$$

Puisque  $Q = CV$ , alors:

$$\mathcal{E} = \frac{Q}{\epsilon A} \quad (\text{V/m}) \quad (9.11)$$

Cette relation exprime l'intensité du champ électrique entre les armatures en termes de la permittivité  $\epsilon$ , de la charge  $Q$  et de l'aire  $A$  des armatures. On peut d'autre part écrire:

$$\frac{C = \epsilon A / d}{C_0 = \epsilon_0 A / d} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \epsilon_r$$

ou:

$$C = \epsilon_r C_0 \quad (9.12)$$

Cette équation stipule que pour deux armatures parallèles données, la capacité d'un condensateur au mica, par exemple, est cinq fois celle d'un condensateur dont le diélectrique est le vide (ou l'air, la permittivité de ce matériau différant peu de celle du vide). La relation liant  $\epsilon_r$  et la capacité constitue un excellent moyen de déterminer la valeur de  $\epsilon_r$  des diélectriques.

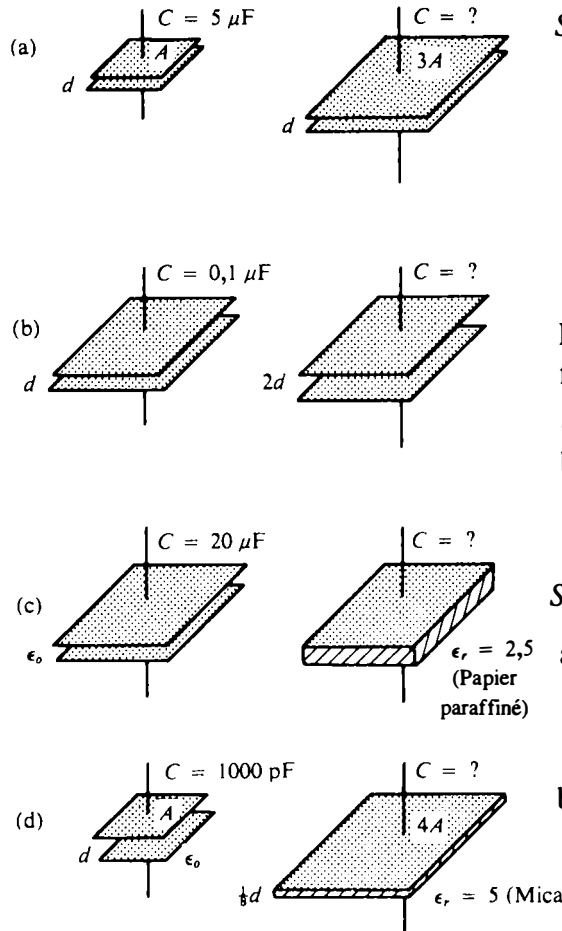


FIG. 9.6

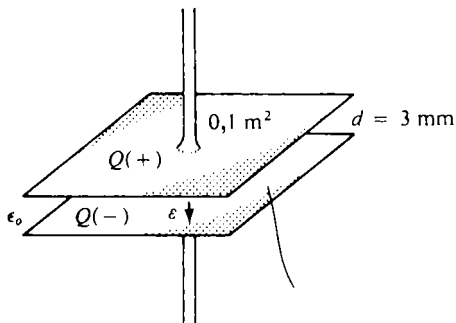


FIG. 9.7

**EXEMPLE 9.1** Déterminer la capacité de chacun des condensateurs illustrés à la figure 9.6.

*Solution:*

- a.  $C = 3(5 \mu\text{F}) = 15 \mu\text{F}$
- b.  $C = \frac{1}{2} (0,1 \mu\text{F}) = 0,05 \mu\text{F}$
- c.  $C = 2,5(20 \mu\text{F}) = 50 \mu\text{F}$
- d.  $C = (5) \frac{4}{(1/8)} (1000 \text{ pF}) = (160)(1000 \text{ pF}) = 0,16 \mu\text{F}$

**EXEMPLE 9.2** Pour chacun des condensateurs illustrés à la figure 9.7, déterminer:

- a. la capacité;
- b. l'intensité du champ électrique entre les armatures;
- c. la charge de chaque armature, si la différence de potentiel entre celles-ci est de 450 V.

*Solution:*

a.  $C_o = \frac{\epsilon_o A}{d} = \frac{(8,85 \times 10^{-12})(0,01)}{1,5 \times 10^{-3}} = 59,0 \times 10^{-12} = 59 \text{ pF}$

b.  $\mathcal{E} = \frac{V}{d} = \frac{450}{1,5 \times 10^{-3}} \cong 300 \times 10^3 \text{ V/m}$

c.  $C = \frac{Q}{V}$

$$Q = CV = (59,0 \times 10^{-12})(450) = 26,550 \times 10^{-9} = 26,55 \text{ nC}$$

**EXEMPLE 9.3** Une feuille de mica d'une épaisseur de 1,5 mm est insérée entre les armatures du condensateur étudié à l'exemple 9.2; ses dimensions sont celles des armatures. Déterminer:

- a. l'intensité du champ électrique entre les armatures;
- b. la charge accumulée sur chacune des armatures;
- c. la capacité du condensateur.

*Solution:*

a.  $\mathcal{E}$  est déterminé par:

$$\mathcal{E} = \frac{V}{d} = \frac{450}{1,5 \times 10^{-3}} \cong 300 \times 10^3 \text{ V/m}$$

b.  $\mathcal{E} = \frac{Q}{\epsilon A}$



$$\begin{aligned}
 Q &= \epsilon \mathcal{E} A = \epsilon_r \epsilon_0 \mathcal{E} A \\
 &= (5)(8,85 \times 10^{-12})(300 \times 10^3)(0,01) \\
 &= 132,75 \times 10^{-9} = \mathbf{132,75 \text{ nC}}
 \end{aligned}$$

(environ cinq fois plus  
que pour de l'air)

$$\begin{aligned}
 \text{c. } C &= \epsilon_r C_0 \\
 &= (5)(59 \times 10^{-12}) = \mathbf{295 \text{ pF}}
 \end{aligned}$$

## 9.4 RIGIDITÉ DIÉLECTRIQUE

Pour tout diélectrique, il existe une tension sous laquelle le diélectrique est percé par un courant. On dit alors que le diélectrique claque. La tension par unité de longueur (intensité du champ) sous laquelle se produit le claquage est une indication de la *rigidité diélectrique* de l'isolant: elle est appelée *tension de claquage*. Lorsque le diélectrique claque, le condensateur présente des caractéristiques extrêmement semblables à celles d'un conducteur. La foudre est un phénomène bien connu de claquage; elle tombe lorsque la différence de potentiel entre les nuages et la terre est suffisamment grande pour que l'air, qui agit comme un diélectrique, soit percé par un courant. Le tableau 9.2 fournit la rigidité diélectrique (exprimée en kilovolts par millimètre) de divers matériaux diélectriques. On y trouvera également, entre parenthèses, la constante diélectrique des matériaux, les deux facteurs étant de grande importance dans la conception des condensateurs. On notera plus particulièrement les caractéristiques du titanate de baryum et de strontium, et du mica.

**TABLEAU 9.2** Rigidité diélectrique de certains matériaux.

Diélectrique	Rigidité diélectrique (valeur moyenne) en	
	kV/mm	( $\epsilon_r$ )
Air	3,0	(1,0006)
Titanate de baryum et de strontium (céramique)	3,0	(7500)
Porcelaine	7,9	(6,0)
Huile pour transformateur	15,7	(4,0)
Bakélite	15,7	(7,0)
Caoutchouc	27,5	(3,0)
Papier paraffiné	51,2	(2,5)
Téflon	59,0	(2,0)
Verre	118,1	(7,5)
Mica	196,8	(5,0)

**EXEMPLE 9.4** Calculer la tension maximale sous laquelle fonctionne un condensateur de  $0,2 \mu\text{F}$  dont l'aire des armatures est de  $0,3 \text{ m}^2$ . Le diélectrique utilisé est en porcelaine. On suppose que la tension de claquage soit liée à la rigidité diélectrique par une relation linéaire.



Solution:

$$C = \frac{8,85\epsilon_r A}{10^{12}d}$$

ou:

$$d = \frac{8,85\epsilon_r A}{10^{12}C} = \frac{(8,85)(6)(0,3)}{(10^{12})(0,2 \times 10^{-6})} = 7,965 \times 10^{-5} \\ \cong 79,65 \mu\text{m}$$

Par conséquent:

$$\text{Tension} = 0,08 \text{ mm} \left( \frac{7,9 \text{ kV}}{\text{mm}} \right) \cong 0,632 \text{ kV}$$

$$\cong 632 \text{ V}$$

## 9.5 COURANT DE FUITE

Nous avons supposé jusqu'à maintenant qu'un courant traverse le diélectrique seulement lorsque la tension de claquage est atteinte. Idéalement, c'est ainsi. Mais, en réalité, un diélectrique contient toujours des électrons libres. La présence de ces électrons s'explique par la contamination du diélectrique par des impuretés et par l'existence de forces dans le matériau.

Lorsqu'une tension est appliquée aux bornes d'un condensateur, les électrons libres d'une armature à l'autre et donnent naissance à un courant de fuite. Ce courant étant habituellement très petit, il est négligeable dans la plupart des applications pratiques. Tout se passe donc comme si une résistance était montée en parallèle avec le condensateur (figure 9.8a). La valeur de cette résistance est habituellement de l'ordre du millier de mégohms ( $M\Omega$ ). Par contre, certains condensateurs, les condensateurs électrolytiques par exemple, ont des courants de fuite élevés. Une fois débranchés de leur circuit de charge, ces condensateurs se déchargent rapidement, en raison du passage des électrons libres d'une armature à l'autre (voir la figure 9.8b).

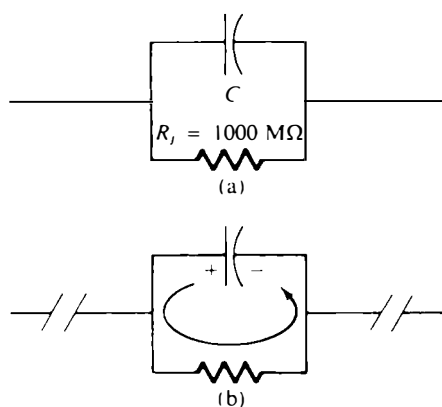




FIG. 9.8

## 9.6 TYPES DE CONDENSATEURS

Tout comme les résistances, les condensateurs appartiennent à deux grands groupes: ils sont soit fixes soit variables. Le symbole graphique du condensateur fixe est  et celui du condensateur variable . La ligne courbe représente l'armature qui est habituellement raccordée au point au potentiel le plus bas.

Il existe aujourd'hui de nombreux types de condensateurs fixes. Les plus usuels sont les condensateurs au mica, les condensateurs en céramique, les condensateurs électrolytiques,



les condensateurs au tantale et les condensateurs à film polyester. Le *condensateur au mica* est essentiellement un assemblage de feuilles de mica séparées par des feuilles de papier métallique. Les armatures sont reliées en alternance aux deux électrodes, comme l'illustre la figure 9.9. L'aire totale est égale au produit de l'aire d'une feuille par le nombre de feuilles. Le tout est encastré dans un boîtier plastique isolant. Le condensateur au mica présente une excellente tenue aux variations de la température et résiste très bien aux hautes tensions (sa rigidité diélectrique est d'environ 200 kV/mm). En outre, son courant de fuite est extrêmement petit ( $R_{\text{fuite}}$  est d'environ 1000 M $\Omega$ ).

La capacité des condensateurs au mica se situe ordinairement entre quelques picofarads et 0,2  $\mu\text{F}$  sous des tensions de 100 V et plus. La figure 9.10 illustre deux types de condensateur au mica. L'annexe B donne le code de couleurs du marquage des condensateurs au mica.

La figure 9.10 b représente des condensateurs au mica d'un autre type. Le plus remarquable d'entre ceux-ci est le condensateur cylindre situé au coin gauche inférieur de la photographie. L'enroulement du mica est rendu possible grâce à un procédé d'extraction des contaminants solubles, ce qui permet d'obtenir un *mica reconstitué* qui a la consistance du papier. Certains condensateurs illustrés possèdent plusieurs bornes: le choix des bornes de branchement détermine la valeur de la capacité du condensateur.

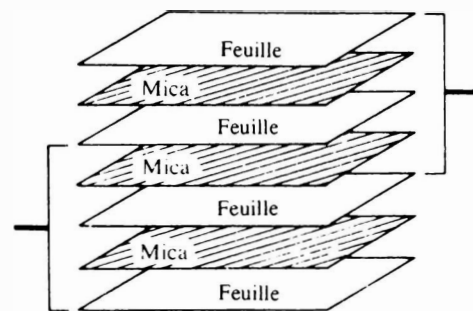


FIG. 9.9



(a) Courtoisie de Sprague Electric Co.



(b) Courtoisie de Custom Electric Inc.

FIG. 9.10 Condensateurs au mica.

Le condensateur en céramique se présente sous plusieurs grandeurs et sous plusieurs formes; les figures 9.11 et 9.12 en illustrent quelques modèles. Cependant, leur fabrication est essentiellement identique. Les deux armatures sont déposées sur les deux surfaces d'une base en céramique par cuivrage ou par argenture. Les broches sont ensuite soudées aux électrodes des armatures. Une couche de protection isolante, qui peut être soit de la céramique, soit du plastique, est appliquée sur les armatures et sur le diélectrique. Les condensateurs en céra-

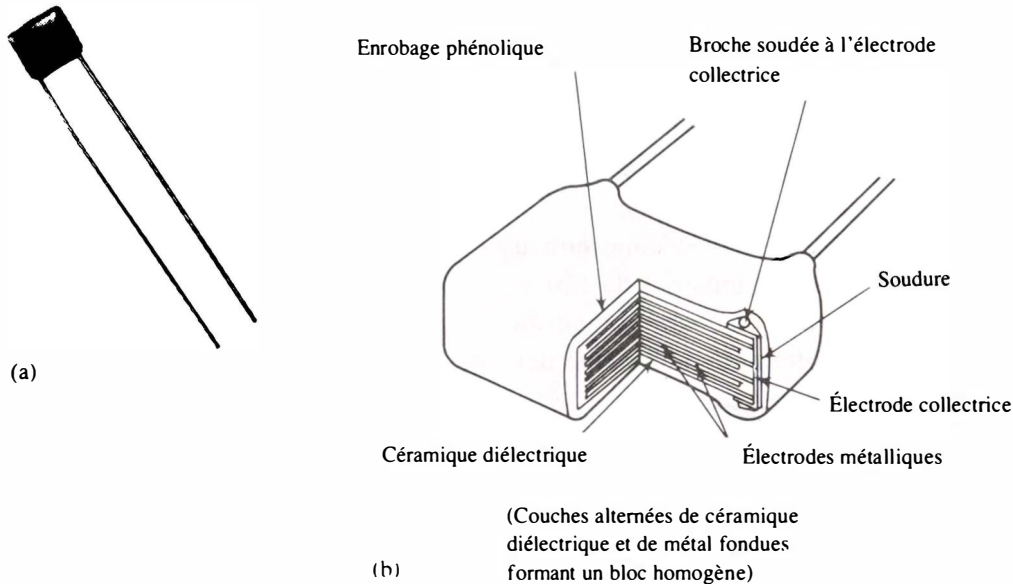


Courtoisie de Sprague Electric Co.

FIG. 9.11 Condensateurs en céramique en forme de pastille.



mique ont aussi un courant de fuite très petit ( $R_{\text{fuite}}$  est d'environ  $1000 \text{ M}\Omega$ ); on les utilise aussi bien en courant continu qu'en courant alternatif. Leurs capacités se situent entre quelques picofarads jusqu'à  $2 \mu\text{F}$ , alors que leurs tensions de service atteignent  $5000 \text{ V}$  et plus.



Courtoisie de Sprague Electric Co.

**FIG. 9.12** Condensateurs céramique multicouches à sorties radiales.

La figure 9.12 représente un condensateur en céramique moulé fabriqué selon la technique d'empilement schématisé à la figure 9.9.

Au cours des dernières années, on s'intéresse de plus en plus aux condensateurs monolithiques sur puce, comme ceux illustrés à la figure 9.13a, en raison de leur emploi dans les circuits hybrides (constitués à la fois de composants discrets et de composants intégrés). Il existe aussi des condensateurs microbandes (figure 9.13b), dont l'usage est de plus en plus répandu.



(a)

Courtoisie de Vitramon, Inc.



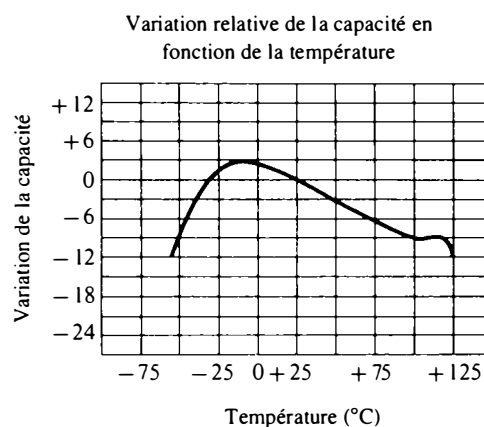
(b)

**FIG. 9.13** Condensateurs monolithiques sur puce.

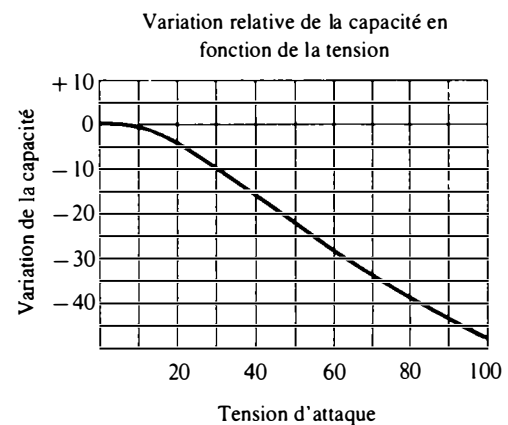


Les lettres L et H apparaissant sur les condensateurs illustrés à la figure 9.13a indiquent la capacité. La lettre H marquée en noir désigne la valeur de 16 pF. lorsqu'elle est marquée en bleu (multiplicateur de 100), elle désigne la valeur de 1600 pF. La valeur de la capacité dépend de la substance en céramique choisie; les dimensions du condensateur ne changent pas.

La capacité des condensateurs sur puce varie selon la température et la tension d'attaque, comme l'illustre la figure 9.14. On constate, d'une part, la brusque variation de la capacité aux températures inférieures au point de congélation ( $0^{\circ}\text{C}$ ) et, d'autre part, le déclin presque linéaire à mesure qu'augmente la tension. Toutefois, à la température de  $50^{\circ}\text{C}$  et pour une tension d'attaque de 40 V, la variation relative (en pour cent) de la capacité est très acceptable dans le cas de petites variations de température et de tension.



(a)



(b)

Courtoisie de Vitramon, Inc.

Le condensateur électrolytique est le plus souvent utilisé lorsque la capacité désirée se situe entre  $1\ \mu\text{F}$  et plusieurs milliers de microfarads. Il est principalement conçu pour fonctionner en courant continu. Certains condensateurs électrolytiques sont toutefois utilisés en courant alternatif (pour le démarrage des moteurs par exemple) ou encore en courant continu lorsque la tension change de polarité pendant de brèves périodes de temps.

Le condensateur électrolytique est essentiellement constitué d'une bande d'aluminium recouverte sur un côté d'une couche d'alumine, l'aluminium jouant le rôle d'armature positive et l'alumine, le rôle de diélectrique. Une feuille de papier buvard imprégné d'électrolyte est placée par-dessus l'alumine, sur l'armature positive. Une autre bande d'aluminium, non recouverte d'une couche d'alumine, est alors mise sur cette bande de papier; elle joue le rôle d'armature négative. Dans la plupart des cas, l'armature négative se raccorde directement au boîtier d'aluminium, qui joue ainsi le rôle de borne négative du condensateur. Les deux armatures et le séparateur étant bobinés ensemble et la distance entre les armatures étant très petite, en raison de l'emploi de l'alumine comme diélectrique, l'aire

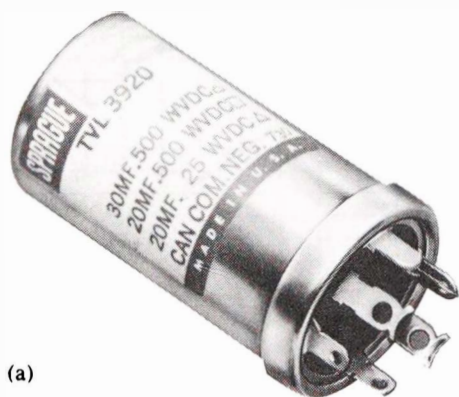
**FIG. 9.14** Effets de la température et de la tension d'attaque sur la caractéristique d'un condensateur sur puce.





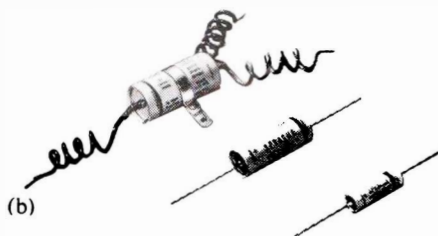
globale des armatures d'un condensateur électrolytique est très grande malgré le faible encombrement de ce dernier. La borne négative du condensateur est habituellement celle qui n'est pas repérée sur le boîtier. La borne positive est repérée par divers symboles, notamment  $+$ ,  $\Delta$ ,  $\square$ , etc. Le condensateur électrolytique polarisé est représenté par le symbole  $\text{—}^+$ .

Deux caractéristiques sont inhérentes aux condensateurs électrolytiques. L'une est la *tension de service*; il s'agit de la tension sous laquelle peut fonctionner le condensateur pendant de longues périodes de temps sans claquer. L'autre est la *tension de crête*; il s'agit de la tension continue maximale qu'on peut appliquer au condensateur pendant une courte période de temps. Les condensateurs électrolytiques sont caractérisés par de faibles tensions de claquage et par des courants de fuite élevés ( $R_{\text{fuite}}$  est d'environ  $1 \text{ M}\Omega$ ). La figure 9.15 illustre divers modèles de condensateur électrolytique. La capacité typique de tels condensateurs va de quelques microfarads à plusieurs milliers; la tension de service de certains atteint 500 V. Soulignons, enfin, que des tensions de service de plus en plus élevées sont de nos jours associées aux petites capacités.



(a)

**FIG. 9.15** Condensateurs électrolytiques.

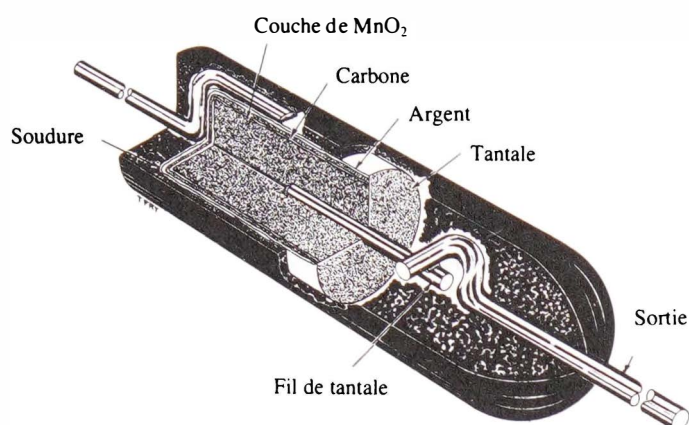


(b)

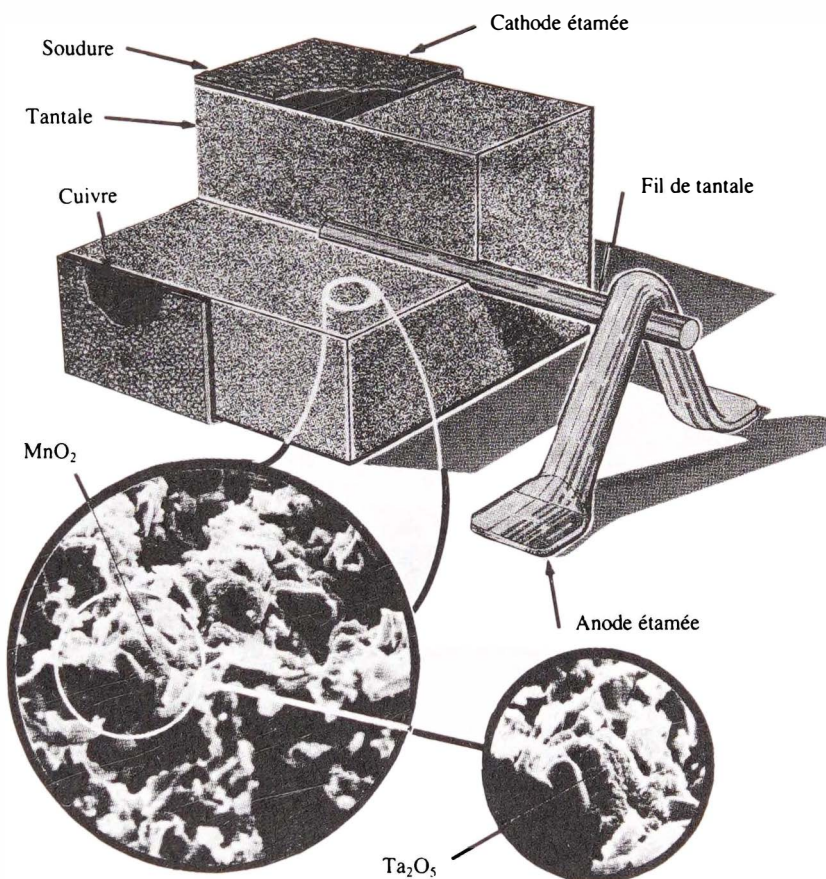
Courtoisie de Sprague Electric Co.

Les deux types fondamentaux de condensateurs au tantale sont le modèle à *électrolyte solide* et le modèle à *électrolyte liquide*. Dans les deux cas, de la poudre de tantale très pure est pressée en barreaux cylindriques ou rectangulaires (figure 9.16). L'anode est tout simplement pressée contre la pastille résultante, comme le représente la figure. Le tout est alors fritté sous vide à une très haute température pour produire un corps extrêmement poreux ayant un petit volume et une très grande superficie. Par immersion dans une solution acide, la surface du corps poreux est recouverte d'une très mince couche de pentoxyde de tantale ( $\text{Ta}_2\text{O}_5$ ) diélectrique. Ensuite, l'électrolyte est ajouté pour établir le contact entre la surface du corps et la cathode. Si le dioxyde de manganèse ( $\text{MnO}_2$ ), obtenu à partir de nitrate de manganèse, est utilisé comme électrolyte, le condensateur est appelé condensateur à électrolyte solide. Si un acide « mouillé » est utilisé comme électrolyte, le condensateur est appelé condensateur à électrolyte liquide.

Le dernier type de condensateur fixe que nous présentons est le *condensateur à film polyester* (voir la figure 9.17). Il s'agit simplement d'un bobinage de deux feuilles métalliques séparées par des bandes de polyester tel que le mylar. La couche



(a) Condensateur au tantale moulé à sorties axiales



(b) Condensateur sur puce haute température

Courtoisie d'Union Carbide Corporation.

FIG. 9.16 Condensateurs au tantale.

extérieure de polyester agit comme une chemise isolante. Chaque feuille métallique est raccordée à une sortie axiale ou radiale. L'enroulement des feuilles métalliques permet d'obtenir des armatures dont la surface est très grande et dont le volume, très petit. De plus, l'emploi du polyester diélectrique permet de réduire considérablement l'espace entre les armatures conductrices.

Divers renseignements, notamment la capacité et la tension de service, sont clairement identifiés sur l'emballage du condensateur, si ce dernier est assez gros. Les petits condensateurs sont identifiés à l'aide d'un code de couleurs (voir

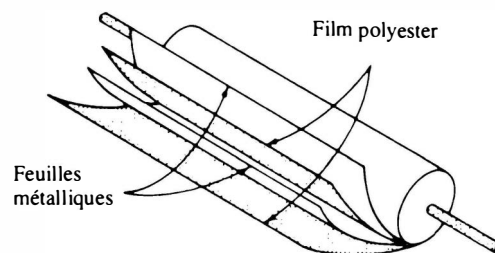
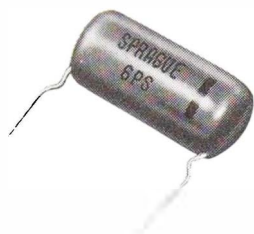


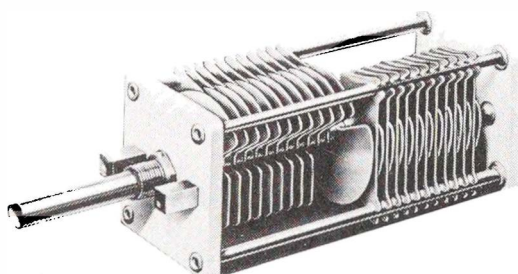
FIG. 9.17 Condensateur à film polyester.



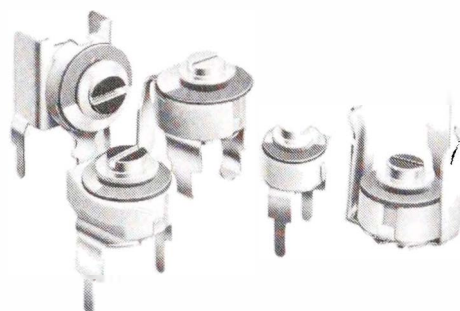
Courtoisie de Sprague Electric Co.

**FIG. 9.18** Condensateur tubulaire à film polyester.

l'annexe C). Un anneau, habituellement noir, indique la sortie raccordée à la feuille métallique extérieure. Cette sortie doit toujours être raccordée au point de potentiel le plus bas. Le condensateur à film polyester peut être utilisé en courant continu et en courant alternatif. Sa résistance de fuite est de l'ordre de  $100\text{ M}\Omega$ . La figure 9.18 illustre l'aspect typique d'un condensateur à film polyester. La capacité des condensateurs à film polyester varie de quelques centaines de picofarads à  $20\ \mu\text{F}$ . Leurs tensions de service peuvent atteindre quelques milliers de volts.



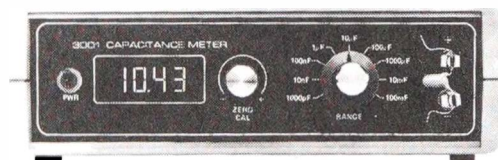
(a) Courtoisie de James Millen Manufacturing Co.



(b) Courtoisie de Johnson Manufacturing Co.

**FIG. 9.19** Condensateurs variables à air.

La figure 9.19 représente les condensateurs variables les plus usuels, dont le diélectrique est l'air. Dans le cas du condensateur illustré à la figure 9.19a, la rotation de l'arbre, auxquels sont fixées les lames mobiles, permet de faire varier la capacité. Plus grande est la surface de l'interlame (espace compris entre les lames), plus grande est la capacité du condensateur, comme l'équation (9.10) l'indique. Dans le cas des trimmers illustrés à la figure 9.19b, la rotation de la vis centrale change la distance entre les armatures, ce qui fait varier la capacité. La figure 9.20 représente un capacimètre numérique.

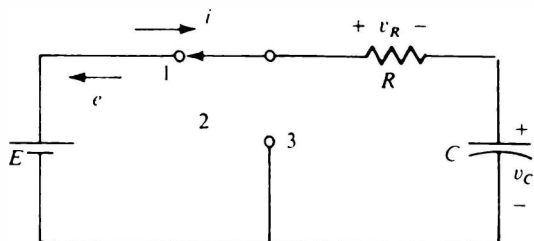


Courtoisie de Global Specialties Corp.

**FIG. 9.20** Capacimètre numérique.

## 9.7 RÉGIMES TRANSITOIRES DANS LES RÉSEAUX CAPACITIFS

Nous avons vu à la section 9.3 comment les charges s'accumulaient sur les armatures d'un condensateur. Nous allons maintenant nous intéresser à l'établissement des différences de potentiel et des courants dans un réseau capacitif. Dans tout réseau électrique, un condensateur passe par deux phases transitoires: sa charge et sa décharge.



**FIG. 9.21**

Le circuit illustré à la figure 9.21 a été conçu pour permettre la charge et la décharge du condensateur. Pendant la charge (interrupteur à la position 1), des électrons passent de l'armature supérieure à l'armature inférieure en raison de la f.é.m. qu'exerce la batterie. Cette migration se traduit par l'apparition d'une charge nette positive sur l'armature supérieure et d'une



charge nette négative sur l'armature inférieure. Le transfert d'électrons se poursuit *tant que la différence de potentiel aux bornes du condensateur n'est pas égale à la f.é.m. (E) appliquée* (voir la figure 9.23).

L'intensité du courant qui parcourt le circuit est à tout instant déterminée par la charge qui traverse une section du fil en un temps infinitésimal. Cette charge est égale à la charge qu'acquiert l'une ou l'autre des armatures pendant ce temps infinitésimal.

L'intensité instantanée du courant est donnée par la relation:

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (9.13)$$

dans laquelle le symbole  $d$  signifie que la charge et le temps varient de façon infinitésimale. L'expression  $dq/dt$  est appelée la *dérivée* de la grandeur  $q$  par rapport au temps. Dans notre cas particulier, si la charge qui s'accumule sur les armatures ou qui traverse une section du fil à un instant donné est nulle, on a  $dq = 0$ , et  $i = dq/dt = 0$ . À propos de la notation, soulignons qu'à compter de maintenant des minuscules seront employées pour représenter des grandeurs variables, notamment l'intensité du courant ( $i$ ), la charge ( $q$ ) et le temps ( $t$ ).

Une équation liant l'intensité du courant créé par le condensateur et la tension à ses bornes peut être établie par substitution de l'expression de  $q$  dans l'équation (9.13); cela donne:

$$q = Cv \text{ [Éq. (9.5)]} \quad i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} Cv$$

Puisque  $C =$  une constante (indépendante du temps), alors:

$$i_c = C \frac{dv_c}{dt} \quad (9.14)$$

L'importance de cette équation est mis en évidence à la section 9.9.

L'expression mathématique de la tension aux bornes du condensateur peut se déterminer par application de la loi des tensions au trajet fermé; on a:

$$E - v_R - v_C = 0 \quad \text{ou} \quad v_R + v_C = E \quad \text{et} \quad iR + v_C = E$$

Le courant créé par le condensateur étant le même que celui qui traverse la résistance, on a:

$$i = C \frac{dv_c}{dt} \quad \text{et} \quad C \frac{dv_c}{dt} R + v_c = E$$

ou:

$$RC \frac{dv_c}{dt} + v_c = E$$

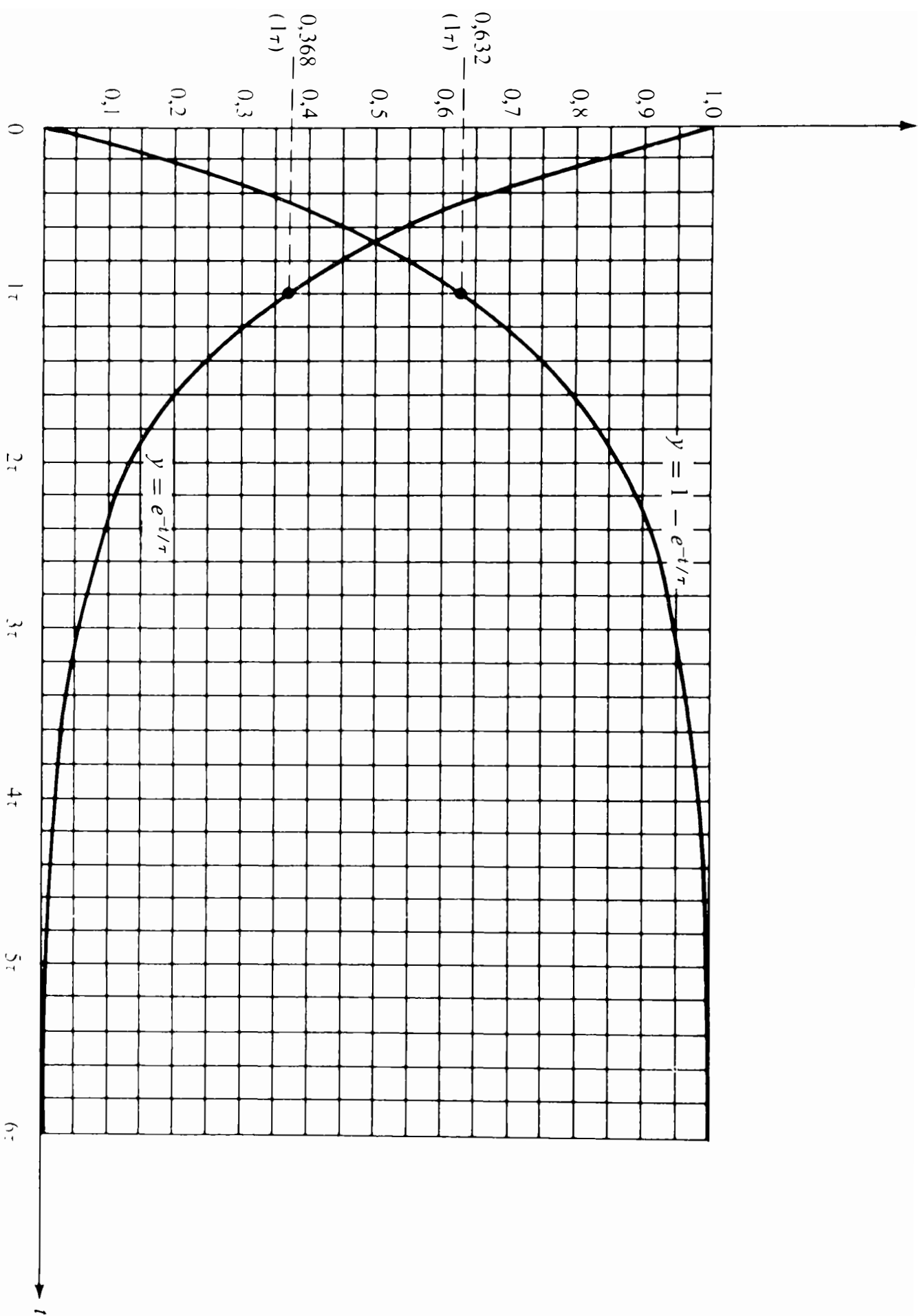
Le calcul intégral permet d'établir l'expression de la tension  $v_c$ :

$$v_c(t) = E(1 - e^{-t/RC}) \quad (9.15)$$



# CONDENSATEURS

FIG. 9.22





Dans cette équation, le produit  $RC$ :

$$R = \frac{E}{I} = \frac{\text{volts}}{\text{ampères}} = \frac{\text{volts}}{\text{coulombs/seconde}}$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\text{coulombs}}{\text{volts}}$$

$$RC = \left( \frac{\text{volts}}{\text{coulombs/seconde}} \right) \left( \frac{\text{coulombs}}{\text{volts}} \right) = \text{secondes}$$

a comme dimension le *temps* (il s'exprime en secondes); il est appelé la *constante de temps* du circuit et son symbole est la lettre grecque  $\tau$  (tau):

$$\tau = RC \quad (\text{s}) \quad (9.16)$$

On peut maintenant écrire l'équation (9.15) de la façon suivante:

$$v_C(t) = E(1 - e^{-t/\tau}) \quad \text{Charge} \quad (9.17)$$

À la figure 9.22, nous avons tracé les courbes des fonctions  $e^{-t/\tau}$  et  $(1 - e^{-t/\tau})$ , pour que soit mieux visualisée l'allure de ces fonctions. Le facteur  $(1 - e^{-t/\tau})$  se retrouve dans les équations (9.15) et (9.17). L'allure de la tension  $v_C(t)$  est illustrée à la figure 9.23. L'annexe G fournit une table de la fonction  $e^{-x}$ . Les valeurs de  $e^{-x}$  peuvent aussi être déterminées à l'aide des calculatrices scientifiques modernes.

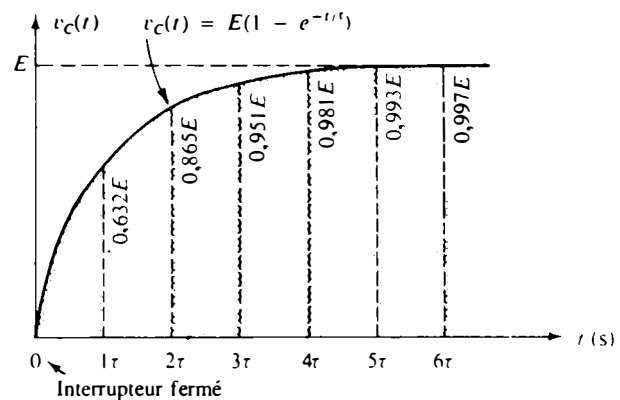


FIG. 9.23

Le tableau 9.3 permet de nous faire une idée de la vitesse de la variation de  $v_C$  (variation relative) au cours de chaque intervalle  $RC$ . À noter que le condensateur se charge à 63,2% de sa valeur finale en seulement une constante de temps, et à 86,5% de sa valeur finale en seulement deux constantes de temps. À noter également que la variation de  $v_C(t)$  au cours de la sixième constante de temps n'est que de 0,4%; la variation est infinitésimale pour les nombres croissants de constantes de temps. À toutes fins pratiques, un condensateur se charge donc à sa tension finale en *cinq constantes de temps*. La capacité  $C$  étant habituellement de quelques microfarads ou de quelques picofarads, la constante de temps  $\tau$  n'est jamais supérieure à quelques secondes, à moins que la résistance  $R$  soit extrêmement grande.



TABLEAU 9.3

$(0 \rightarrow 1)\tau$	63,2%
$(1 \rightarrow 2)\tau$	23,3%
$(2 \rightarrow 3)\tau$	8,6%
$(3 \rightarrow 4)\tau$	3,0%
$(4 \rightarrow 5)\tau$	1,2%
$(5 \rightarrow 6)\tau$	0,4%

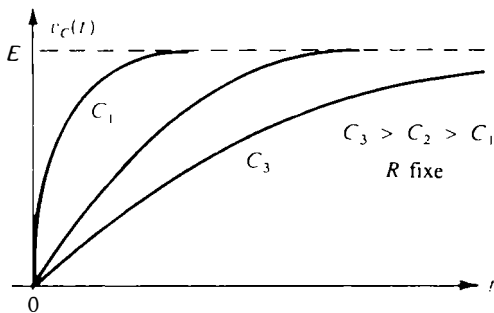


FIG. 9.24

Si nous gardons  $R$  constante et si nous réduisons  $C$ , le produit  $RC$  devient moindre et il faut alors moins de temps au condensateur pour se charger à sa tension finale. La variation de l'allure transitoire de la tension  $v_C$  est illustrée à la figure 9.24 pour trois valeurs différentes de  $C$ . Le produit  $RC$  ne pouvant jamais être nul, même s'il est parfois extrêmement petit, *la tension aux bornes d'un condensateur ne peut pas changer instantanément*. De fait, la capacité d'un réseau est aussi une mesure de son opposition à toute variation de la tension à ses bornes. Plus grande est la capacité, plus grande est la constante de temps et plus grand est le temps de charge du condensateur à sa tension finale (courbe de  $C_3$  à la figure 9.24). Une capacité moindre permet à la tension d'augmenter plus rapidement, la constante de temps étant également moindre (courbe de  $C_1$  à la figure 9.24).

La vitesse à laquelle la charge s'accumule sur les armatures du condensateur pendant la phase de charge peut se trouver par substitution de l'expression suivante de  $v_C(t)$  dans l'équation (9.17):

$$v_C(t) = \frac{q(t)}{C}$$

ce qui donne:

$$q(t) = Cv_C(t) = CE(1 - e^{-t/\tau}) \quad \text{Charge (9.18)}$$

Cette relation indique que la vitesse de charge est très grande au cours des quelques premières constantes de temps et inférieure à 1% après cinq constantes de temps.

Voyons maintenant comment varie l'intensité du courant qui parcourt le circuit pendant la charge du condensateur. Lorsque l'interrupteur est fermé (instant  $t = 0$ ), l'équation (9.17) nous indique que  $v_C(t) = 0$  V. *Le condensateur agit donc comme un court-circuit à l'instant de la fermeture de l'interrupteur ( $t = 0$ )*. À ce même instant, l'intensité du courant dans le réseau est  $E/R$ , d'après la loi d'Ohm. L'équation (9.18) nous indique par ailleurs que la vitesse à laquelle les charges s'accumulent sur les armatures chute rapidement avec le nombre de constantes de temps; l'intensité du courant  $i_C(t)$  décroîtra aussi exponentiellement; elle sera de zéro ampère, lorsque  $v_C(t) = E$ . L'expression mathématique de  $i_C(t)$  est



déterminée par la dérivée de  $q(t)$  par rapport au temps; ce calcul donne:

$$i_C(t) = \frac{d}{dt} q(t) = \frac{d}{dt} CE(1 - e^{-t/\tau})$$

et:

$$i_C(t) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau} \quad \text{Charge (9.19)}$$

À noter la présence du facteur  $e^{-t/\tau}$  dans cette équation. La figure 9.21 illustre l'allure de la variation de l'intensité du courant.

Quant à la tension aux bornes de la résistance, elle est déterminée par la loi d'Ohm:

$$v_R(t) = Ri_C(t) = R \frac{E}{R} e^{-t/\tau}$$

ou:

$$v_R(t) = E e^{-t/\tau} \quad \text{Charge (9.20)}$$

L'allure de  $v_R(t)$  est aussi illustrée à la figure 9.25.

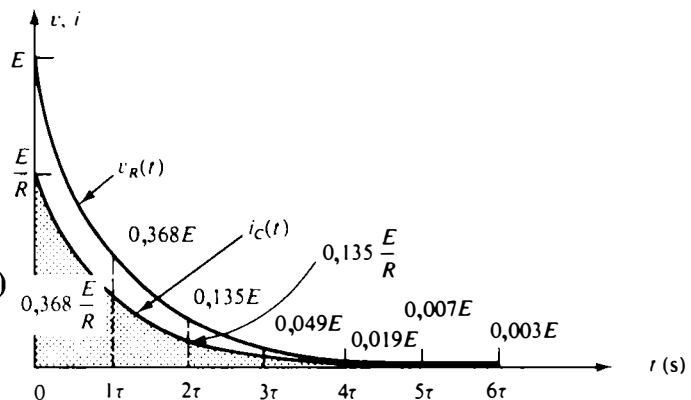


FIG. 9.25

Le condensateur étant un court-circuit à l'instant  $t = 0$ , la tension  $v_R$  est instantanément égale à la tension d'entrée  $E$  et décroît ensuite progressivement jusqu'à zéro à la vitesse à laquelle  $v_C$  s'approche de  $E$  (figure 9.25). La tension  $v_R$  et l'intensité  $i_C$  atteindront donc zéro à l'instant où  $v_C$  sera égale à  $E$ . Ces caractéristiques de sortie, illustrées à la figure 9.26, indiquent que le condensateur chargé à sa tension finale dans un réseau en courant continu peut, à toutes fins pratiques, être remplacé par un circuit ouvert. Dans la plupart des applications, cette substitution peut se faire après une période de temps égale à cinq constantes de temps. Le condensateur est bien sûr passablement différent d'un simple circuit ouvert puisqu'il emmagasine une charge mesurable sur ses deux armatures situées aux extrémités opposées du circuit ouvert.

Le condensateur est entièrement chargé lorsque la tension à ses bornes a atteint la tension d'entrée  $E$ ; il demeure alors dans cet état si aucun changement ne survient dans le circuit.

Si, comme à la figure 9.27a, le commutateur est placé à la position 2, le condensateur retient sa charge pendant une période de temps déterminée par l'intensité de son courant de fuite. Dans les condensateurs au mica et dans les condensateurs en céramique, le courant de fuite est extrêmement petit; ces condensateurs conservent par conséquent leur charge longtemps, et la différence de potentiel entre leurs armatures ne varie pas rapidement. À cause d'un courant de fuite très grand, le condensateur électrolytique se décharge rapidement, comme l'indique la figure 9.27b. S'ils ne sont pas utilisés, les condensateurs doivent être complètement déchargés; un moyen simple

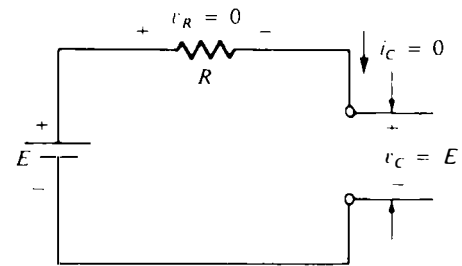


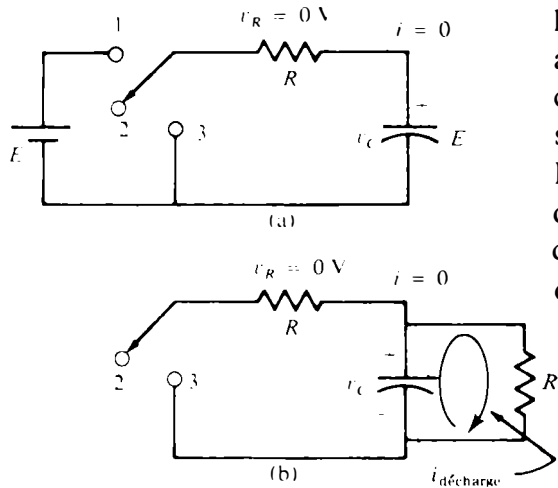
FIG. 9.26





de le faire, c'est de les court-circuiter à l'aide d'un fil ou d'un tournevis.

Lorsque le commutateur est placé à la position 3, le condensateur commence à se décharger (figure 9.28). Instantanément, des électrons de l'armature négative se déplacent vers l'armature positive. Cette migration réduit la charge nette des armatures et par conséquent la différence de potentiel entre celles-ci ( $V = Q/C$ ). Le condensateur agit alors comme une source de f.é.m. qui décroît progressivement jusqu'à zéro. Les expressions mathématiques de l'intensité  $i_C$  du courant et des tensions  $v_C$  et  $v_R$  peuvent s'établir au moyen du calcul différentiel. Chacune des expressions, que nous donnons ci-dessous, est une fonction exponentielle décroissante:



$$v_C(t) = Ee^{-t/\tau} \quad \text{Décharge (9.21)}$$

$$i_C(t) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau} \quad \text{Décharge (9.22)}$$

$$v_R(t) = Ee^{-t/\tau} = v_C(t) \quad \text{Décharge (9.23)}$$

FIG. 9.27

En pratique le condensateur se décharge complètement en cinq constantes de temps. À noter que le courant  $i_C$  est de sens opposé au courant de charge et que la polarité de la tension  $v_R$  est inversée.

La figure 9.29 représente l'allure du courant  $i_C$  et des tensions  $v_C$  et  $v_R$  lorsque le commutateur du circuit illustré à la figure 9.21 est placé à diverses positions toutes les cinq constantes de temps.

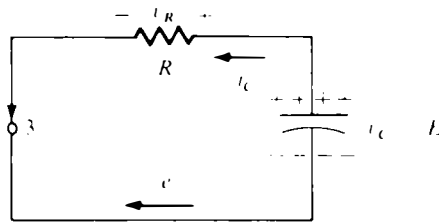


FIG. 9.28

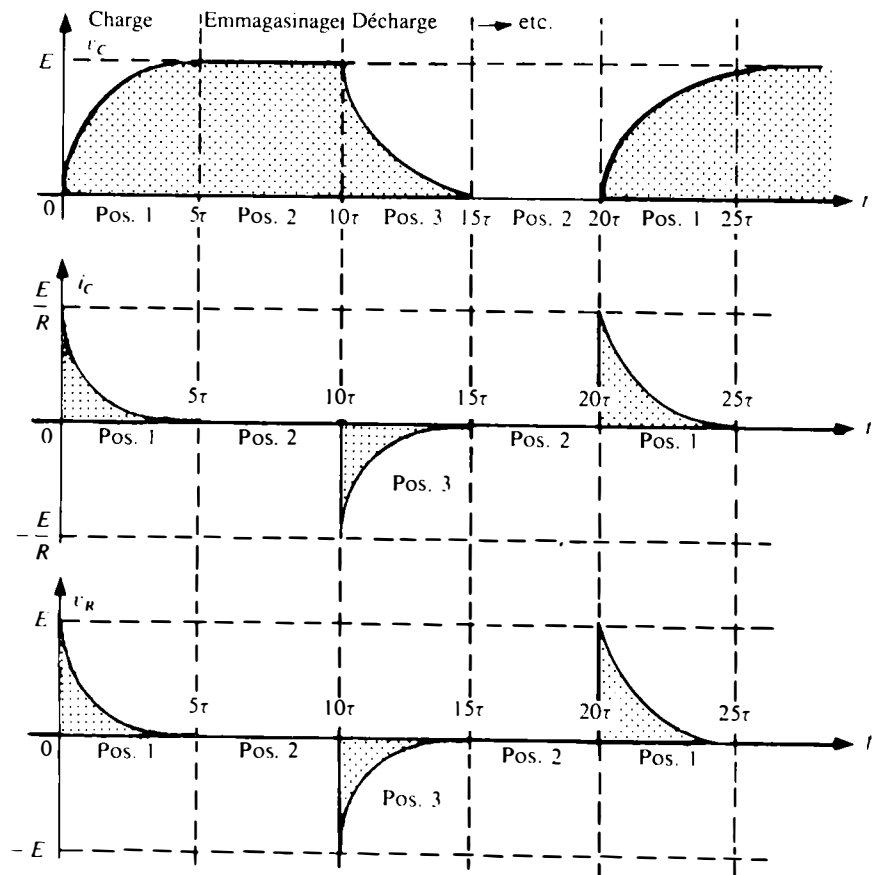


FIG. 9.29



**EXEMPLE 9.5** Trouver les expressions mathématiques de  $v_C$ ,  $i_C$  et  $v_R$  du circuit illustré à la figure 9.30 et en tracer les courbes, l'interrupteur étant fermé à l'instant  $t = 0$ .

*Solution:*

$$\tau = RC = (8 \times 10^3)(4 \times 10^{-6}) = 32 \times 10^{-3} = 32 \text{ ms}$$

L'équation (9.17) donne:

$$v_C = E(1 - e^{-t/\tau}) = 40(1 - e^{-t/32 \times 10^{-3}})$$

L'équation (9.19) donne:

$$i_C = \frac{E}{R} e^{-t/\tau} = \frac{40}{8 \text{ k}\Omega} e^{-t/32 \times 10^{-3}} = 5 \times 10^{-3} e^{-t/32 \times 10^{-3}}$$

L'équation (9.20) donne:

$$v_R = E e^{-t/\tau} = 40 e^{-t/32 \times 10^{-3}}$$

Les courbes sont représentées à la figure 9.31.

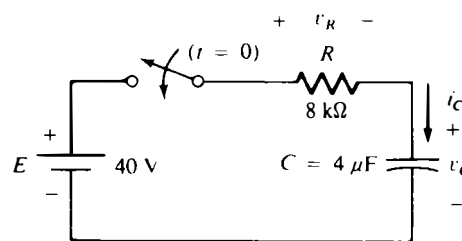


FIG. 9.30

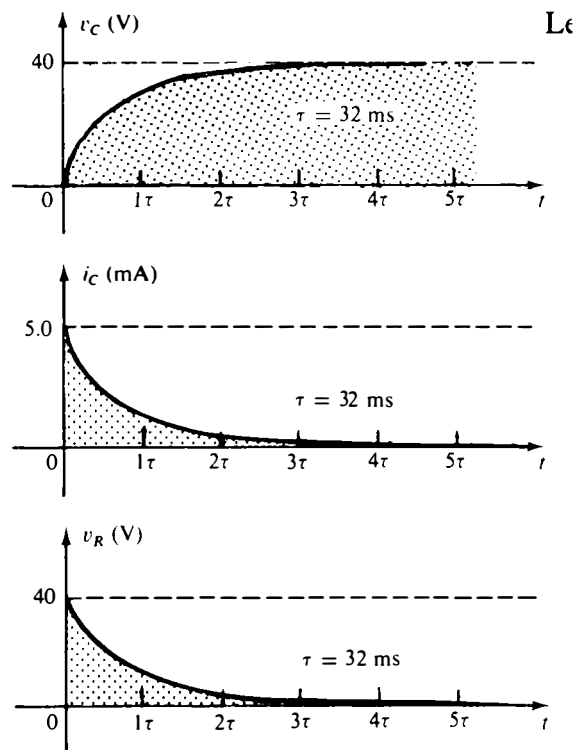


FIG. 9.31

**EXEMPLE 9.6** Lorsque  $v_C$  a atteint sa valeur finale de 40 V, la source de tension du circuit illustré à la figure 9.30 est remplacée par un court-circuit, comme le représente la figure 9.32. Trouver les expressions mathématiques de  $v_C$ ,  $i_C$  et  $v_R$  et en tracer les courbes.

*Solution:*

$$\tau = 32 \text{ ms}$$

L'équation (9.21) donne:

$$v_C = E e^{-t/\tau} = 40 e^{-t/32 \times 10^{-3}}$$

L'équation (9.22) donne:

$$i_C = \frac{E}{R} e^{-t/\tau} = 5 \times 10^{-3} e^{-t/32 \times 10^{-3}}$$

L'équation (9.23) donne:

$$v_R = E e^{-t/\tau} = 40 e^{-t/32 \times 10^{-3}}$$

FIG. 9.27

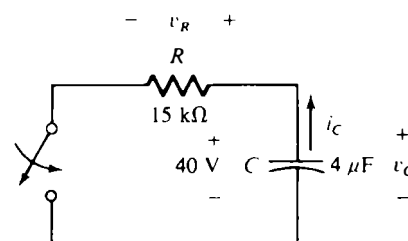
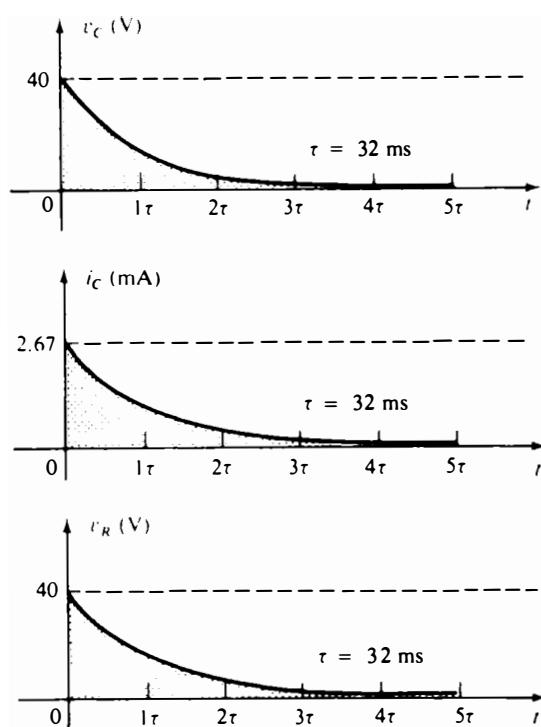


FIG. 9.32



Les courbes sont représentées à la figure 9.33.

FIG. 9.33

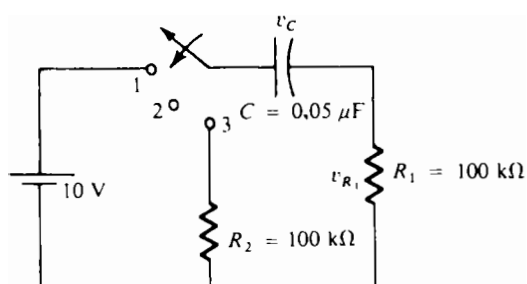


FIG. 9.34

#### EXEMPLE 9.7

- Trouver l'expression mathématique de la tension aux bornes du condensateur du circuit illustré à la figure 9.34, si le commutateur est placé à la position 1 à l'instant  $t = 0$ . Calculer la tension  $v_C$  à l'instant  $t = 10$  ms.
- Faire de même pour le courant  $i_C$  et la tension  $v_{R_1}$ .
- Trouver l'expression mathématique des tensions  $v_C$  et  $v_{R_1}$  et du courant  $i_C$ , à compter de l'instant  $t = 30$  ms où le commutateur est alors placé à la position 2. (Supposer que la résistance de fuite du condensateur soit infinie.)
- Trouver l'expression mathématique des tensions  $v_C$  et  $v_{R_1} + v_{R_2}$  ainsi que du courant  $i_C$ , à compter de l'instant  $t = 48$  ms où le commutateur est placé à la position 3.
- Sur le même axe des temps, tracer les courbes de chacune des tensions et de chacun des courants obtenus en (a) et (d).

*Solution:*

$$\text{a. } v_C(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$$

$$\tau = RC = (100 \times 10^3)(0,05 \times 10^{-6}) = 5 \times 10^{-3} \\ = 5 \text{ ms}$$

$$\therefore v_C(t) = 10(1 - e^{-t/5 \times 10^{-3}})$$

à  $t = 10$  ms.

À noter que:

$$\tau = RC = 5 \text{ ms}$$

$$\therefore t = 10 \text{ ms} = 2\tau$$



La figure 9.22 indique que:

$$v_C = 0,865E \text{ en } 2\tau$$

$$\therefore v_C = (0,865)(10) = \mathbf{8,65 \text{ V}}$$

ou:

$$\begin{aligned} v_C(t) &= 10[1 - e^{-(10 \times 10^{-3})/(5 \times 10^{-3})}] \\ &= 10[1 - e^{-2}] = 10(1 - 0,135) = 10(0,865) \\ &= \mathbf{8,65 \text{ V}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } i_C(t) &= \frac{E}{R} e^{-t/\tau} \\ &= \left( \frac{10}{100 \times 10^3} \right) e^{-t/5 \times 10^{-3}} \\ &= \mathbf{0,1 \times 10^{-3} e^{-t/5 \times 10^{-3}}} \end{aligned}$$

À  $t = 10 \text{ ms}$ :

$$\begin{aligned} i_C(t) &= 10^{-4} e^{-10 \times 10^{-3}/5 \times 10^{-3}} \\ &= (10^{-4})(e^{-2}) = (10^{-4})(0,135) \\ &= \mathbf{13,5 \mu\text{A}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{R_1}(t) &= E e^{-t/RC} \\ &= \mathbf{10 e^{-t/5 \times 10^{-3}}} \end{aligned}$$

À  $t = 10 \text{ ms}$ :

$$\begin{aligned} v_{R_1}(t) &= 10(e^{-2}) = 10(0,135) \\ &= \mathbf{1,35 \text{ V}} \end{aligned}$$

$$\text{c. } v_C(t) = E = \mathbf{10 \text{ V}}$$

$$i_C(t) = \mathbf{0}$$

$$v_R(t) = \mathbf{0}$$

$$\text{d. } v_C(t) = E e^{-t/\tau'}$$

$$\begin{aligned} \tau' &= (R_1 + R_2)C = R_T C \\ &= (100 \text{ k}\Omega + 100 \text{ k}\Omega)(0,005 \times 10^{-6}) \\ &= (200 \times 10^3)(0,05 \times 10^{-6}) \\ &= (2 \times 10^5)(5 \times 10^{-8}) \\ &= 10 \times 10^{-3} \\ &= \mathbf{10 \text{ ms}} \text{ (le double de la valeur} \\ &\quad \text{originale de } \tau) \end{aligned}$$

$$v_C(t) = \mathbf{10 e^{-t/10 \times 10^{-3}}}$$

$$\begin{aligned} i_C(t) &= \frac{E}{R} e^{-t/\tau'} \\ &= \frac{10}{200 \text{ k}\Omega} e^{-t/10 \times 10^{-3}} \end{aligned}$$

$$i_C(t) = \mathbf{0,5 \times 10^{-4} e^{-t/10 \times 10^{-3}}}$$

$$\begin{aligned} v_{R_T}(t) &= E e^{-t/\tau'} \\ &= \mathbf{10 e^{-t/10 \times 10^{-3}}} \end{aligned}$$



e. Voir la figure 9.35. Noter l'inversion de  $i_C$  et de  $v_R$  mais non pas celle de  $v_C$ .

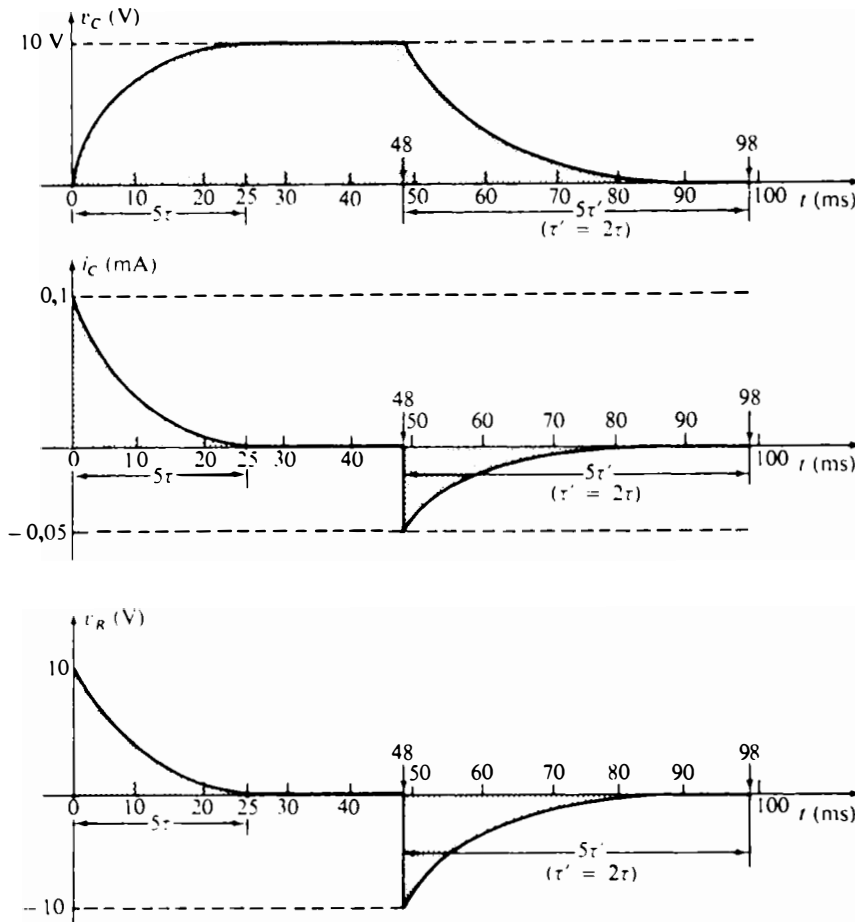


FIG. 9.35

### 9.8 $\tau = R_{Th}C$

Il peut arriver que les éléments d'un réseau ne soient pas tous montés en série comme à la figure 9.21. La marche à suivre est alors de déterminer d'abord le générateur de Thévenin du réseau extérieur au condensateur. La tension  $E_{Th}$  constitue la tension  $E$  de la source dans les équations (9.15) à (9.23) et  $R_{Th}$  la résistance  $R$ . La constante de temps devient par suite  $\tau = R_{Th}C$ .

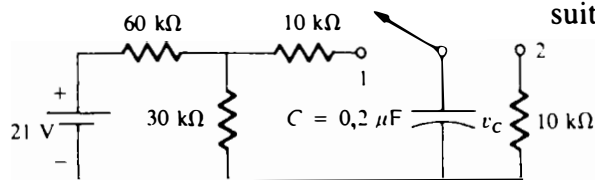


FIG. 9.36

**EXEMPLE 9.8** Voir le réseau illustré à la figure 9.36.

- Trouver l'expression de  $v_C$  en fonction du temps, si le commutateur est placé à la position 1 à l'instant  $t = 0$ .
- Trouver l'expression de la tension  $v_C$  en fonction du temps à compter de l'instant  $t = 15$  ms où le commutateur est placé à la position 2.
- Tracer la courbe des fonctions trouvées en (a) et (b), sur le même axe des temps.



$$\tau = R_{Th}C$$

Solution:

- a. Par application du théorème de Thévenin au circuit extérieur au condensateur de  $0,2 \mu\text{F}$ , on obtient le réseau équivalent illustré à la figure 9.37:

$$\begin{aligned} R_{Th} &= \frac{(60 \text{ k}\Omega)(30 \text{ k}\Omega)}{90 \text{ k}\Omega} + 10 \text{ k}\Omega \\ &= 20 \text{ k}\Omega + 10 \text{ k}\Omega \\ &= 30 \text{ k}\Omega \\ E_{Th} &= \frac{(30 \text{ k}\Omega)(21)}{30 \text{ k}\Omega + 60 \text{ k}\Omega} = \frac{1}{3}(21) = 7 \text{ V} \end{aligned}$$

La figure 9.38 illustre le générateur de Thévenin branché aux bornes du condensateur:

$$\begin{aligned} v_C(t) &= E(1 - e^{-t/\tau}) \\ \tau &= RC = (30 \text{ k}\Omega)(0,2 \mu\text{F}) \\ &= (30 \times 10^3)(0,2 \times 10^{-6}) = 6 \times 10^{-3} \\ &= 6 \text{ ms} \\ v_C(t) &= 7(1 - e^{-t/6 \times 10^{-3}}) \end{aligned}$$

- b. À  $t = 15 \text{ ms}$ :

$$\begin{aligned} v_C(t) &= 7[1 - e^{-15 \times 10^{-3}/6 \times 10^{-3}}] \\ &= 7(1 - e^{-2,5}) = 7(1 - 0,082) = 7(0,918) \\ &= \mathbf{6,426 \text{ V}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_C(t) &= Ee^{-t/\tau'} \\ \tau' &= RC = 10 \text{ k}\Omega(0,2 \mu\text{F}) \\ &= (10 \times 10^3)(0,2 \times 10^{-6}) = 2 \times 10^{-3} \\ &= 2 \text{ ms} \end{aligned}$$

$$v_C(t) = \mathbf{6,426e^{-t/2 \times 10^{-3}}}$$

- c. Voir la figure 9.39.

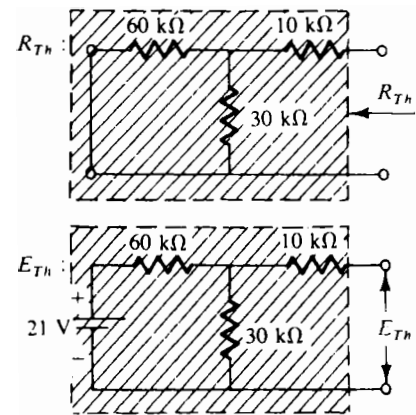


FIG. 9.37

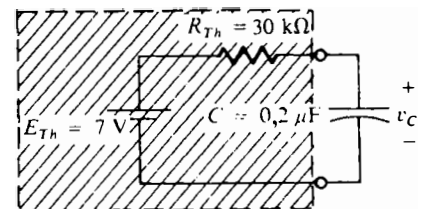


FIG. 9.38

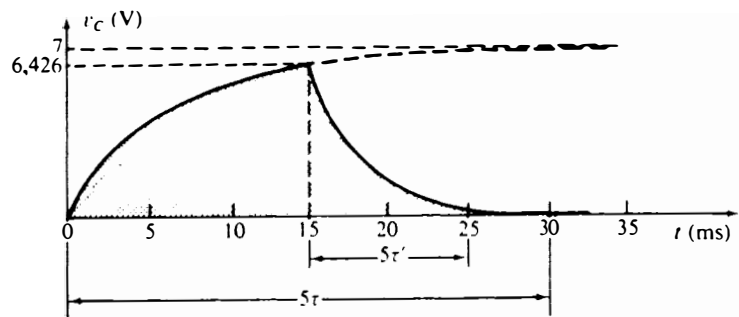


FIG. 9.39

**EXEMPLE 9.9** Le condensateur du circuit illustré à la figure 9.40 est initialement chargé à 80 V. Trouver l'expression de la tension  $v_C$  à compter de l'instant où l'interrupteur est fermé.

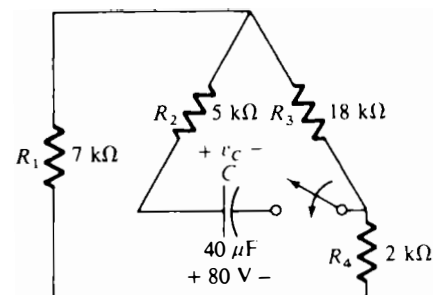


FIG. 9.40

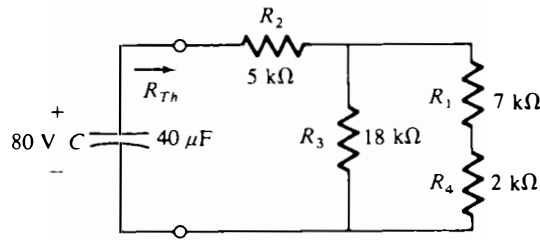


FIG. 9.41

*Solution:* Le circuit est redessiné à la figure 9.41; on a:

$$\begin{aligned} R_{Th} &= 5 \text{ k}\Omega + 18 \text{ k}\Omega \parallel (7 \text{ k}\Omega + 2 \text{ k}\Omega) \\ &= 5 \text{ k}\Omega + 18 \text{ k}\Omega \parallel 9 \text{ k}\Omega = 5 \text{ k}\Omega + 6 \text{ k}\Omega = 11 \text{ k}\Omega \\ \tau &= R_{Th}C = (11 \times 10^3)(40 \times 10^{-6}) \\ &= 440 \times 10^{-3} = 0,44 \text{ s} \end{aligned}$$

et:

$$v_C(t) = Ee^{-t/\tau} = 80e^{-t/0,44}$$

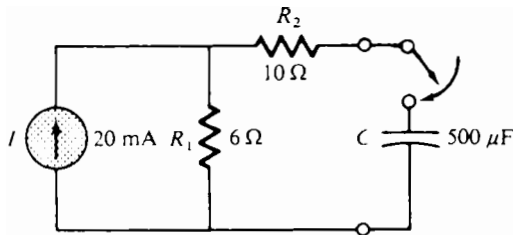


FIG. 9.42

**EXEMPLE 9.10** Voir le réseau illustré à la figure 9.42. Trouver l'expression de la tension  $v_C$  en fonction du temps à compter de l'instant  $t = 0$  où l'interrupteur est fermé.

*Solution:*

$$\begin{aligned} R_{Th} &= 6 + 10 = 16 \Omega \\ E_{Th} &= V_{6\Omega} + V_{10\Omega} = IR_1 + 0 \\ &= (20 \times 10^{-3})(6) = 120 \times 10^{-3} = 0,12 \text{ V} \end{aligned}$$

et:

$$\tau = R_{Th}C = (16)(500 \times 10^{-6}) = 8 \text{ ms}$$

de sorte que:

$$v_C(t) = 0,12(1 - e^{-t/8 \times 10^{-3}})$$

## 9.9 L'INTENSITÉ $i_C$ DU COURANT

À la section précédente, nous avons établi que l'intensité  $i_C$  du courant associé à la capacité  $C$  était liée à la tension aux bornes du condensateur par la relation:

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt}$$

Autrement dit, l'intensité du courant associé à un condensateur est à tout instant déterminée par la capacité  $C$  et la variation instantanée de la tension aux bornes. Si, à un instant particulier, la tension ne varie pas, on a:

$$dv_C = 0 \quad \text{et} \quad i_C = C \frac{dv_C}{dt} = 0$$

Tentons de mieux comprendre l'essence de l'équation (9.14); pour ce faire, calculons l'intensité moyenne du courant associé à un condensateur pour diverses tensions à ses bornes.

L'intensité moyenne du courant est définie par l'équation:

$$I_{Cm} = \frac{\Delta q}{\Delta t} = C \frac{\Delta v_C}{\Delta t} \quad (9.24)$$

dans laquelle  $\Delta$  indique une variation finie de la charge, de la



tension ou du temps. On peut obtenir l'intensité instantanée du courant de l'équation (9.24) en posant que  $\Delta t$  devient infinitésimal; cela donne:

$$i_{C\text{inst}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} C \frac{\Delta v_C}{\Delta t} = C \frac{dv_C}{dt}$$

Dans l'exemple qui suit, nous tiendrons compte de la variation  $\Delta v_C$  de la tension pour chaque partie de la forme d'onde de tension. Si la tension augmente avec le temps, l'intensité moyenne du courant est alors le rapport de la variation de la tension et de la variation du temps, et elle est affectée du signe plus. Si par contre la tension décroît avec le temps, elle est affectée du signe moins, sa valeur étant encore donnée par le même rapport.

**EXEMPLE 9.11** Dessiner la forme d'onde de l'intensité moyenne du courant, si la forme d'onde de la tension aux bornes d'un condensateur de  $2 \mu\text{F}$  est celle illustrée à la figure 9.43.

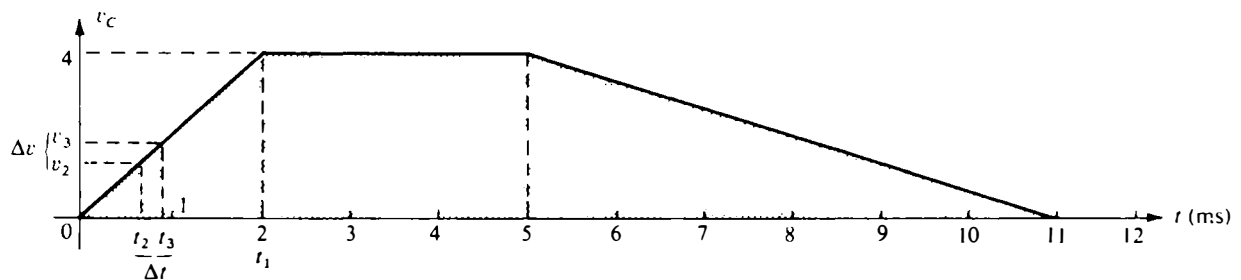


FIG. 9.43

*Solution:*

- a. Entre 0 ms et 2 ms, la tension passe linéairement de 0 V à 4 V; la variation de la tension est donc  $\Delta v = 4 - 0 = 4$  V (affecté d'un signe plus puisque la tension croît avec le temps). La variation du temps est  $\Delta t = 2 - 0 = 2$  ms; on a donc:

$$\begin{aligned} i_C &= C \frac{\Delta v_C}{\Delta t} = (2 \times 10^{-6}) \left( \frac{4}{2 \times 10^{-3}} \right) \\ &= 4 \times 10^{-3} = 4 \text{ mA} \end{aligned}$$

- b. Entre 2 ms et 5 ms, la tension demeure constante à 4 V; la variation de la tension est donc  $\Delta v = 0$ . La variation du temps est  $\Delta t = 3$  ms; on a donc:

$$i_C = C \frac{\Delta v_C}{\Delta t} = C \frac{0}{\Delta t} = 0$$

- c. Entre 5 ms et 11 ms, la tension décroît et passe de 4 V à 0 V. La variation de la tension est donc  $\Delta v = 0 - 4 = -4$  V (affecté d'un signe moins, car la tension décroît avec le





temps). La variation du temps est  $\Delta t = 11 - 5 = 6$  ms; on a donc:

$$i_C = C \frac{\Delta v_C}{\Delta t} = (2 \times 10^{-6}) \left( \frac{-4}{6 \times 10^{-3}} \right) \\ = -1,33 \times 10^{-3} = -1,33 \text{ mA}$$

- d. Après l'instant  $t = 11$  ms, la tension demeure constamment nulle; la variation de la tension est  $\Delta v = 0$ , de sorte que  $i_C = 0$ . La forme d'onde résultante de l'intensité moyenne du courant est illustrée à la figure 9.44.

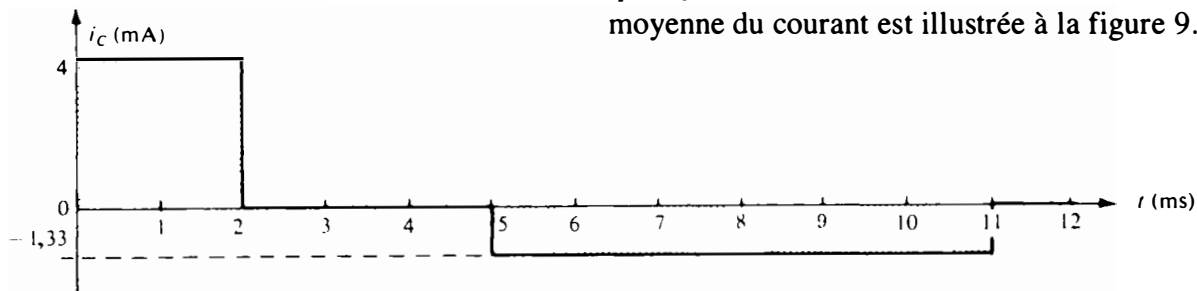


FIG. 9.44

Dans l'exemple précédent, l'intensité moyenne du courant est en réalité égale à sa valeur instantanée. Ainsi, la valeur du rapport  $\Delta v / \Delta t$  est la même peu importe l'intervalle  $\Delta t$  (par exemple, pour l'intervalle de 0 à  $t_1$  et pour l'intervalle de  $t_2$  à  $t_3$  comme à la figure 9.33). De fait, le rapport ne varie pas même si l'intervalle  $D_t$  devient infinitésimal, la pente de la courbe de la tension étant constante; par conséquent, l'intensité moyenne  $i_{Cm}$  est la même pour toute partie de la droite. Même si  $\Delta t$  tend vers 0, la pente demeure la même et  $i_{Cm} = i_{Cinst}$  à tout instant entre 0 et  $t_1$ . Il en est de même pour toutes les parties de la forme d'onde de tension, chacune des parties étant une droite.

Deux points essentiels sont donc à retenir. D'abord, le courant associé à un condensateur est nul si la tension aux bornes du condensateur ne varie pas dans le temps. Ensuite, *plus grande est la variation de la tension aux bornes d'un condensateur, plus grande est l'intensité du courant* associé à ce condensateur.

La méthode décrite ci-dessus n'est valable que pour les formes d'onde constituées de segments de droite. Pour les formes d'onde curvilignes, il faut avoir recours au calcul différentiel.

## 9.10 CONDENSATEURS EN SÉRIE ET EN PARALLÈLE

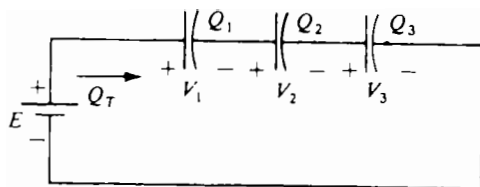


FIG. 9.45

Tout comme les résistances, les condensateurs se montent en série et en parallèle. Dans un montage de condensateurs en série, la charge est la même pour chacun des condensateurs (figure 9.45); on a donc:

$$Q_T = Q_1 = Q_2 = Q_3 \quad (9.25)$$



L'application de la loi des tensions pour le trajet fermé donne:

$$E = V_1 + V_2 + V_3$$

mais:

$$V = \frac{Q}{C}$$

de sorte que:

$$\frac{Q_T}{C_T} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3}$$

L'équation (9.25) nous permet de diviser les deux membres de cette dernière équation par  $Q$ , ce qui donne:

$$\boxed{\frac{1}{C_T} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}} \quad (9.26)$$

Cette relation est identique par sa forme à la relation qui permet de calculer la résistance totale d'un montage de résistances en parallèle. La capacité totale de deux condensateurs en série est:

$$\boxed{C_T = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}} \quad (9.27)$$

Dans un montage de condensateurs en parallèle comme celui illustré à la figure 9.46, la tension est la même aux bornes de chaque condensateur, et la charge totale est la somme des charges de chaque condensateur:

$$\boxed{Q_T = Q_1 + Q_2 + Q_3} \quad (9.28)$$

mais:

$$Q = CV, \quad \therefore C_T E = C_1 V_1 + C_2 V_2 + C_3 V_3$$

et:

$$E = V_1 = V_2 = V_3$$

Donc:

$$\boxed{C_T = C_1 + C_2 + C_3} \quad (9.29)$$

Cette relation est identique par sa forme à la relation qui permet de calculer la résistance totale d'un montage de résistances en série.

**EXEMPLE 9.12** Voir le circuit illustré à la figure 9.47.

- Calculer la capacité totale du circuit.
- Déterminer la charge présente sur chaque armature.
- Calculer la tension aux bornes de chaque condensateur.

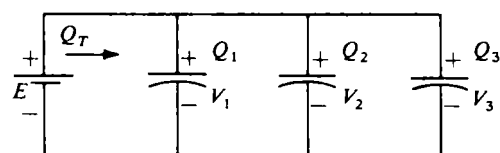


FIG. 9.46

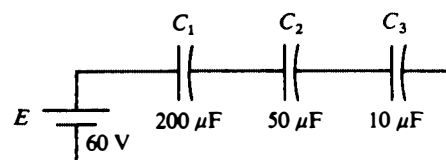


FIG. 9.47



*Solution:*

$$\begin{aligned} \text{a. } \frac{1}{C_T} &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{200 \times 10^{-6}} \\ &+ \frac{1}{50 \times 10^{-6}} + \frac{1}{10 \times 10^{-6}} \\ &= 0,005 \times 10^6 + 0,02 \times 10^6 \\ &+ 0,1 \times 10^6 \\ &= 0,125 \times 10^6 \end{aligned}$$

et

$$C_T = \frac{1}{0,125 \times 10^6} = 8 \mu\text{F}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } Q_T &= Q_1 = Q_2 = Q_3, \\ Q_T &= C_T E = (8 \times 10^{-6})(60) = 480 \mu\text{C} \end{aligned}$$

$$\text{c. } V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{480 \times 10^{-6}}{200 \times 10^{-6}} = 2,4 \text{ V}$$

$$V_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{480 \times 10^{-6}}{50 \times 10^{-6}} = 9,6 \text{ V}$$

$$V_3 = \frac{Q_3}{C_3} = \frac{480 \times 10^{-6}}{10 \times 10^{-6}} = 48,0 \text{ V}$$

Vérifions ces résultats:

$$\begin{aligned} E &= V_1 + V_2 + V_3 = 2,4 + 9,6 + 48 \\ &= 60 \text{ V} \end{aligned}$$

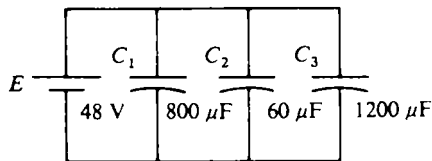


FIG. 9.48

**EXEMPLE 9.13** Voir le réseau illustré à la figure 9.48.

- Calculer la capacité totale du réseau.
- Déterminer la charge présente sur chaque armature.
- Calculer la charge totale.

*Solution:*

$$\begin{aligned} \text{a. } C_T &= C_1 + C_2 + C_3 = 800 \mu\text{F} + 60 \mu\text{F} + 1200 \mu\text{F} \\ &= 2060 \mu\text{F} \end{aligned}$$

$$\text{b. } Q_1 = C_1 E = (800 \times 10^{-6})(48) = 0,038 \text{ C}$$

$$Q_2 = C_2 E = (60 \times 10^{-6})(48) = 0,002 88 \text{ C}$$

$$Q_3 = C_3 E = (1200 \times 10^{-6})(48) = 0,0576 \text{ C}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } Q_T &= Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0,038 + 0,002 88 + 0,0576 \\ &= 0,09848 \text{ C} \end{aligned}$$

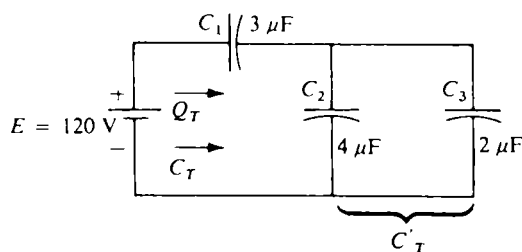


FIG. 9.49

**EXEMPLE 9.14** Dans le réseau illustré à la figure 9.49, déterminer la charge et la tension aux bornes de chaque condensateur.



Solution:

$$C'_T = C_2 + C_3 = 4 + 2 = 6 \mu\text{F}$$

$$C_T = \frac{C_1 C'_T}{C_1 + C'_T} = \frac{3 \times 6}{3 + 6} = 2 \mu\text{F}$$

$$Q_T = C_T E = (2 \times 10^{-6})(120)$$

$$Q_T = 240 \mu\text{C}$$

FIG. 9.45

Dans le circuit équivalent illustré à la figure 9.50, on a:

$$Q_T = Q_1 = Q'_T$$

$$\therefore Q_1 = 240 \mu\text{C}$$

et:

$$V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{240 \times 10^{-6}}{3 \times 10^{-6}} = 80 \text{ V}$$

$$Q'_T = 240 \mu\text{C}$$

$$\therefore V'_T = \frac{Q'_T}{C'_T} = \frac{240 \times 10^{-6}}{6 \times 10^{-6}} = 40 \text{ V}$$

et:

$$Q_2 = C_2 V'_T = (4 \times 10^{-6})(40) = 160 \mu\text{C}$$

$$Q_3 = C_3 V'_T = (2 \times 10^{-6})(40) = 80 \mu\text{C}$$

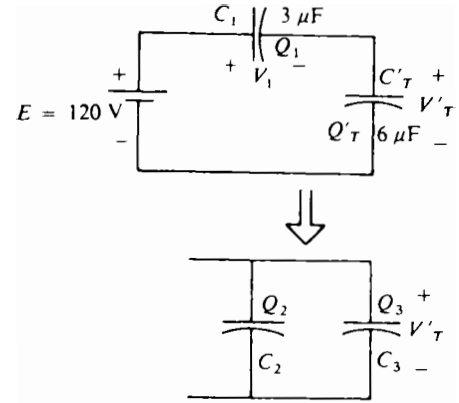


FIG. 9.50

**EXEMPLE 9.15** Calculer la charge et la tension aux bornes du condensateur  $C$  illustré à la figure 9.51, s'il a été chargé à sa tension finale.

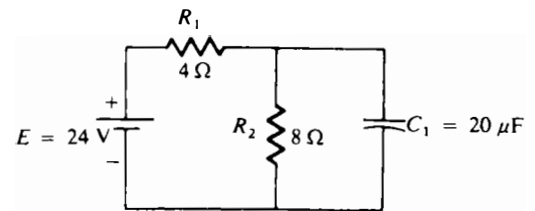


FIG. 9.51

*Solution:* Nous avons déjà appris qu'un condensateur complètement chargé dans un circuit en courant continu est l'équivalent d'un circuit ouvert (figure 9.52), de sorte que:

$$V_C = \frac{(8)(24)}{4 + 8} = 16 \text{ V}$$

$$Q_1 = C_1 V_C = (20 \times 10^{-6})(16)$$

$$Q_1 = 320 \mu\text{C}$$

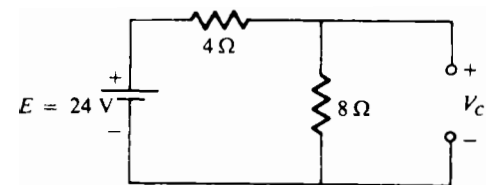


FIG. 9.52

**EXEMPLE 9.16** Calculer la charge et la tension aux bornes de chacun des condensateurs du réseau illustré à la figure 9.53, si chacun d'entre eux est chargé à sa tension finale.

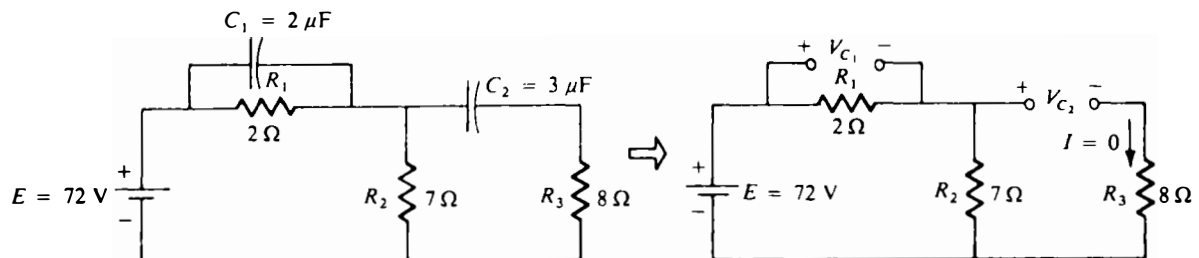


FIG. 9.53

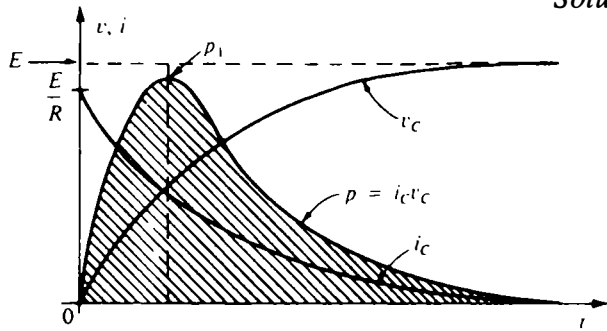


FIG. 9.54

Solution:

$$V_{C_2} = \frac{(7)(72)}{7 + 2} = 56 \text{ V}$$

$$V_{C_1} = \frac{(2)(72)}{2 + 7} = 16 \text{ V}$$

$$Q_1 = C_1 V_{C_1} = (2 \times 10^{-6})(16) = 32 \mu\text{C}$$

$$Q_2 = C_2 V_{C_2} = (3 \times 10^{-6})(56) = 168 \mu\text{C}$$

### 9.11 ÉNERGIE EMMAGASINÉE DANS UN CONDENSATEUR

Le condensateur idéal ne dissipe même pas une parcelle de l'énergie qu'il reçoit. Il l'emmagasine plutôt sous la forme d'un champ électrique. La figure 9.54 représente les courbes de la tension, de l'intensité du courant et de la puissance pendant la charge d'un condensateur. On détermine la courbe de la puissance en portant sur le graphique les valeurs du produit de la tension et de l'intensité pour des instants choisis. (À noter l'endroit où se produit le maximum  $P_1$  de la courbe à la figure 9.54). L'énergie emmagasinée dans le condensateur est représentée par la surface hachurée située sous la courbe de la puissance. À l'aide du calcul intégral, il est possible de déterminer l'aire de cette surface; le résultat est:

$$W_C = \frac{1}{2} C E^2 \quad (\text{joules}) \quad (9.30)$$

En termes de  $Q$  et de  $C$ , on a:

$$W_C = \frac{1}{2} C \left( \frac{Q}{C} \right)^2$$

$$W_C = \frac{Q^2}{2C} \quad (\text{joules}) \quad (9.31)$$

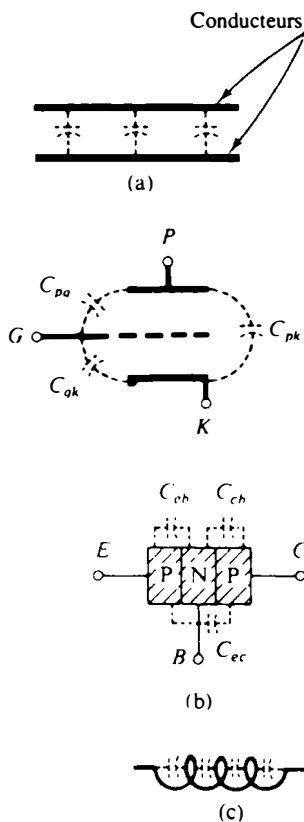


FIG. 9.55

### 9.12 CAPACITÉ PARASITE

Dans un circuit, il n'y a pas que les condensateurs qui sont le siège d'une capacité; il existe également des capacités parasites causées par la proximité de surfaces conductrices. Il peut ainsi exister un effet capacitif entre deux fils conducteurs d'un même circuit, comme l'illustre la figure 9.55a. Dans les circuits électroniques, il peut exister des capacités parasites entre les surfaces conductrices d'un tube ou d'un transistor, comme le représente la figure 9.55b. Au chapitre 11, nous étudierons un autre composant, la bobine, qui présente aussi un effet



capacitif entre ses spires (figure 9.55). Les capacités parasites peuvent souvent donner lieu à des problèmes sérieux dans un système, si on n'en tient pas compte à la conception.

## PROBLÈMES

### Section 9.2

1. Déterminez l'intensité du champ électrique à un point situé à 2 m d'une charge de  $4 \mu\text{C}$ .
2. L'intensité d'un champ électrique est de  $36 \text{ N/C}$  (newtons par coulomb) à un point situé à une distance  $r$  d'une charge de  $0,064 \mu\text{C}$ . Calculez la distance  $r$ .

### Section 9.3

3. Calculez la capacité d'un condensateur à armatures parallèles, sachant qu'une charge de  $1400 \mu\text{C}$  est présente sur les armatures sous une tension de  $20 \text{ V}$ .
4. Quelle est la charge présente sur les armatures d'un condensateur de  $0,05 \mu\text{F}$ , si la tension aux bornes du condensateur est de  $45 \text{ V}$ ?
5. Calculez l'intensité du champ électrique existant entre les armatures d'un condensateur à armatures parallèles, sachant que les armatures sont éloignées de  $2 \text{ mm}$  et que la différence de potentiel entre elles est de  $100 \text{ mV}$ .
6. Refaites le problème 5 dans le cas d'un condensateur dont les armatures sont à  $0,1 \text{ mm}$  l'une de l'autre.
7. Un condensateur à armatures parallèles de  $4 \mu\text{F}$  porte une charge de  $160 \mu\text{C}$ . Sachant que la distance entre les armatures est de  $5 \text{ mm}$ , calculez l'intensité du champ électrique entre les armatures.
8. L'aire de chacune des armatures parallèles d'un condensateur à l'air est de  $0,075 \text{ m}^2$ , et la distance entre les armatures, de  $1,77 \text{ mm}$ . Calculez la capacité du condensateur.
9. Refaites le problème 8 dans le cas d'un condensateur en papier paraffiné de mêmes caractéristiques.
10. Calculez la distance en mils entre les armatures d'un condensateur de  $2 \mu\text{F}$ , sachant que l'aire de chacune des armatures est de  $0,09 \text{ m}^2$  et que le diélectrique est de l'huile pour transformateur.
11. La capacité d'un condensateur à l'air est de  $1200 \text{ pF}$ . On glisse un diélectrique entre les armatures et on constate que la capacité passe à  $0,006 \mu\text{F}$ . De quel matériau est fait le diélectrique?
12. Les armatures parallèles d'un condensateur sont éloignées de  $0,2 \text{ mm}$  et leur aire est de  $0,08 \text{ m}^2$ .
  - a. Calculez la capacité du condensateur.
  - b. Calculez l'intensité du champ électrique existant entre les armatures.
  - c. Calculez la charge sur chacune des armatures, sachant que leur différence de potentiel est de  $200 \text{ V}$  et que le diélectrique est l'air.



13. Une feuille de bakélite d'une épaisseur de 0,2 mm et d'une aire de 0,08 m<sup>2</sup> est placée entre les armatures du condensateur décrit au problème 12.
- Calculez l'intensité du champ électrique existant entre les armatures.
  - Calculez la charge sur chaque armature.
  - Calculez la capacité du condensateur.

## Section 9.4

14. Calculez la tension nominale maximale des condensateurs étudiés aux problèmes 12 et 13. On suppose que la tension de claquage augmente linéairement avec l'épaisseur du diélectrique.
15. Calculez la tension maximale qu'on peut appliquer aux bornes d'un condensateur à armatures parallèles de 0,006 μF. L'aire de chaque armature est de 0,02 m<sup>2</sup> et le diélectrique est le mica. On supposera que la tension de claquage augmente linéairement avec l'épaisseur du diélectrique.
16. Calculez la distance en millimètres entre les armatures parallèles d'un condensateur, sachant que la tension maximale qu'on peut appliquer aux bornes de ce dernier est de 1250 V. Le diélectrique est le mica. On supposera que la tension de claquage augmente linéairement avec l'épaisseur du diélectrique.

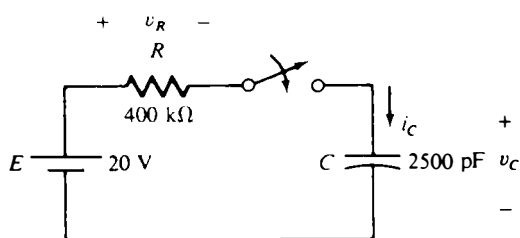


FIG. 9.56

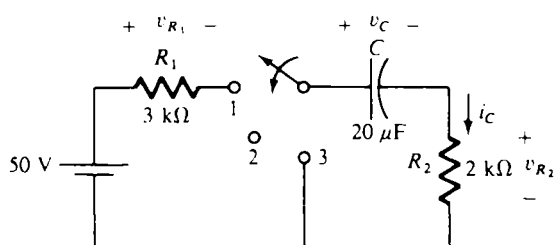


FIG. 9.57

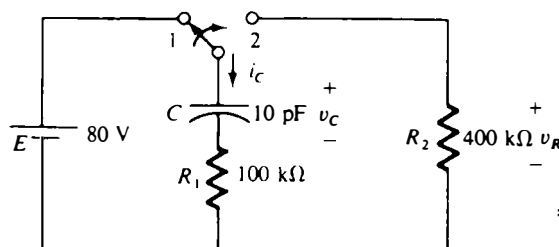


FIG. 9.58

## Section 9.7

17. Voir le circuit illustré à la figure 9.56.
- Trouvez l'expression mathématique de la tension aux bornes du condensateur, l'interrupteur étant fermé à l'instant  $t = 0$ .
  - Déterminez la tension  $v_C$  après 1, 3 et 5 constantes de temps.
  - Écrivez les équations de l'intensité du courant  $i_C$  et de la tension  $v_R$ .
  - Calculez  $i_C$  et  $v_R$  après 1, 3 et 5 constantes de temps.
  - Tracez les formes d'onde de  $v_C$ ,  $i_C$  et  $v_R$ .
18. Voir le circuit illustré à la figure 9.57.
- Exprimez la tension aux bornes du condensateur en fonction du temps, sachant que le commutateur est placé à la position 1 à l'instant  $t = 0$ .
  - Faites de même pour  $i_C$  et  $v_{R_2}$ .
  - Exprimez les tensions  $v_C$  et  $v_{R_2}$  et l'intensité  $i_C$  en fonction du temps, à compter de l'instant  $t = 500$  ms où le commutateur est placé à la position 2. (Supposer que la résistance de fuite du condensateur est infinie.)
  - Exprimez les tensions  $v_C$  et  $v_{R_2}$  et l'intensité  $i_C$  en fonction du temps, à compter de l'instant  $t = 1000$  ms (1 s) où le commutateur est placé à la position 3.
  - Tracez sur le même axe des temps les formes d'onde obtenues.
19. Refaites le problème 18 en prenant  $R_2 = 20$  kΩ. Comparez les résultats obtenus avec ceux ci-dessus.
- \*20. Voir le circuit illustré à la figure 9.58.
- Exprimez la tension  $v_C$  en fonction du temps, à compter de l'instant  $t = 0$  où le commutateur est placé à la position 1.



- b. Faites de même pour la tension  $v_{R_2}$  et l'intensité  $i_C$  en fonction du temps, à compter de l'instant  $t = 6$  constantes de temps où le commutateur est placé à la position 2.
  - d. Tracez sur le même axe des temps les formes d'onde obtenues.
21. Refaites le problème 20 dans le cas du circuit illustré à la figure 9.59 et remplacez, dans l'énoncé du problème, la tension  $v_{R_2}$  par la tension  $v_{R_1}$ .

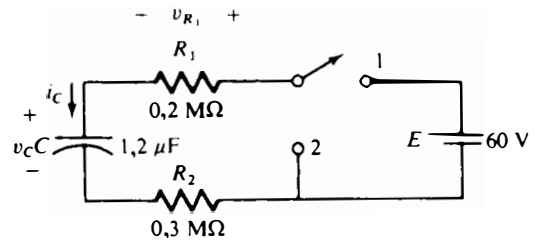


FIG. 9.59

Section 9.8

22. Voir le circuit illustré à la figure 9.60.
- a. Exprimez la tension  $v_C$  et l'intensité  $i_C$  en fonction du temps, à compter de l'instant  $t = 0$  où l'interrupteur est fermé.
  - b. Tracez les formes d'onde de  $v_C$  et  $i_C$ .

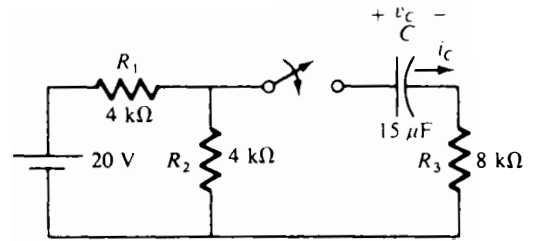


FIG. 9.60

- \*23. Refaites le problème 22 dans le cas du circuit illustré à la figure 9.61.

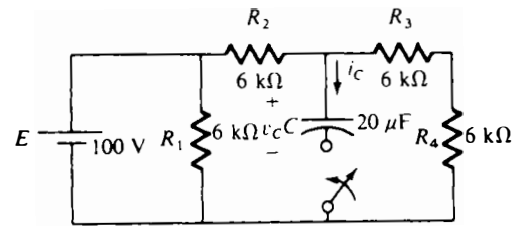


FIG. 9.61

Section 9.9

24. Tracez la forme d'onde de l'intensité moyenne du courant associé à un condensateur de  $0,06 \mu\text{F}$  auquel on applique la tension dont la forme d'onde est illustrée à la figure 9.62.

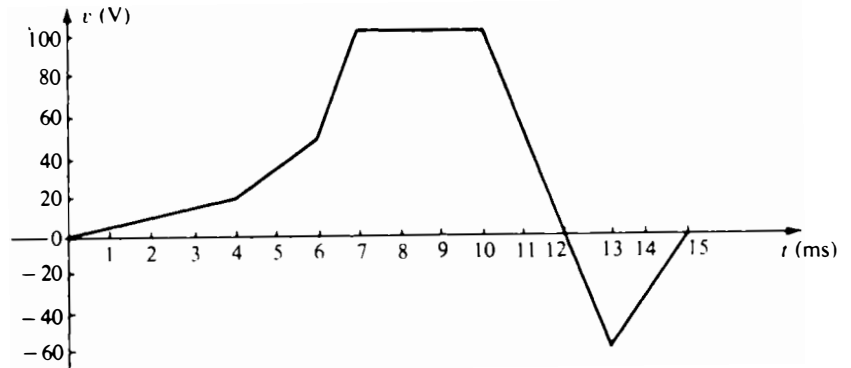


FIG. 9.62

25. Refaites le problème 24 dans le cas de la forme d'onde illustrée à la figure 9.63.

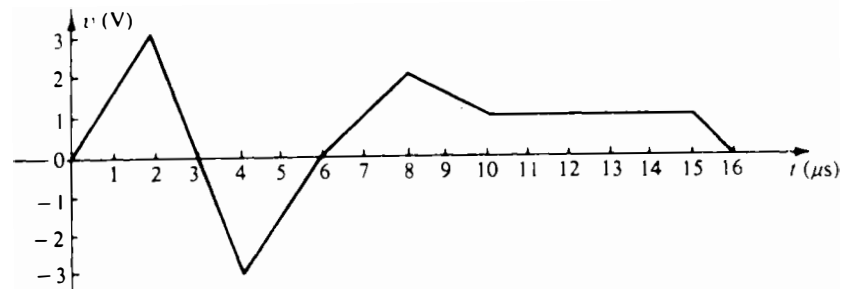


FIG. 9.63



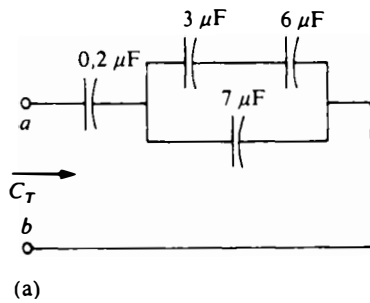


FIG. 9.64

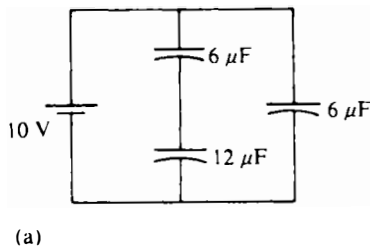


FIG. 9.65

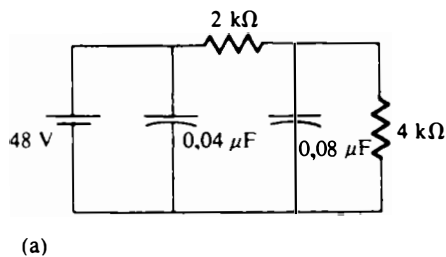
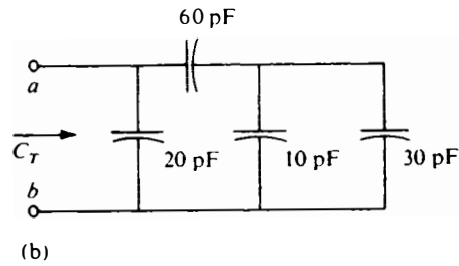


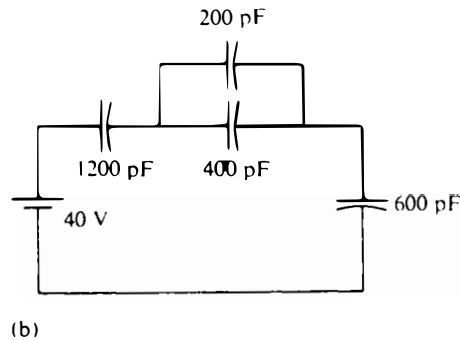
FIG. 9.66

## Section 9.10

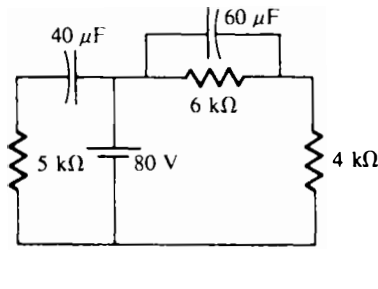
26. Calculez la capacité totale  $C_T$  entre les points  $a$  et  $b$  des circuits illustrés à la figure 9.64.



27. Calculez la charge et la tension aux bornes de chacun des condensateurs des circuits illustrés à la figure 9.65.



28. Voir les circuits illustrés à la figure 9.66. Calculez la charge et la tension aux bornes de chacun des condensateurs, lorsque ceux-ci sont chargés à leur tension finale.



## Section 9.11

29. Calculez l'énergie emmagasinée dans un condensateur de 120 pF sous une tension de 12 V.

30. L'énergie emmagasinée par un condensateur de 6 μF est de 1200 J. Calculez la charge  $Q$  présente sur chacune des armatures du condensateur.

\*31. Un flash électronique comprend un condensateur de 1000 μF chargé sous 100 V.

- Quelle est l'énergie emmagasinée dans le condensateur?
- Quelle est la charge du condensateur?
- Lorsque le photographe prend une photo, le flash s'allume pendant 0,0005 s. Quelle est l'intensité moyenne du courant parcourant l'ampoule du flash?
- Calculez la puissance fournie à l'ampoule du flash.
- Une fois une photo prise, le condensateur doit être rechargé par une alimentation qui fournit un courant d'une intensité maximale de 10 mA. Quelle est la durée de la charge?



## GLOSSAIRE

**Capacité** Mesure de l'aptitude du condensateur à emmagasiner des charges sur ses armatures.

**Capacité parasite** Capacité indésirée créée par deux surfaces conductrices situées l'une près de l'autre.

**Condensateur** Composant électrique fondamental constitué de deux surfaces conductrices séparées par un matériau isolant, sur lesquelles des charges peuvent s'accumuler.

**Constante de temps** Temps au bout duquel une grandeur variant de manière exponentielle est égale à  $1/e$  de sa valeur initiale.

**Constante diélectrique** Synonyme de *permittivité relative*.

**Courant de fuite** Courant créé par les électrons libres du diélectrique qui passent d'une armature à l'autre du condensateur et qui, si ce dernier était débranché de son circuit de charge, finirait par le décharger.

**Diélectrique** Matériau isolant séparant les armatures du condensateur et déterminant de façon marquée la charge qui peut être emmagasinée sur celles-ci.

**Effet des bords** Effet des lignes de force débordant l'espace compris entre les armatures du condensateur.

**Intensité de champ électrique** Force agissant sur une charge unitaire positive à un point donné de l'espace.

**Lignes de force électrique** Représentation d'un champ électrique qui en indique l'intensité et le sens.

**Permittivité** Mesure de la facilité avec laquelle les lignes de force s'établissent dans un diélectrique.

**Permittivité relative** Permittivité d'un matériau comparée à celle du vide.

**Rigidité diélectrique** Caractéristique indiquant la tension par unité de longueur sous laquelle un diélectrique claque.

**Tension de claquage** Tension sous laquelle se produit le claquage et qui est une indication de la rigidité diélectrique.

**Tension de pointe** Tension maximale sous laquelle peut fonctionner le condensateur durant de très courtes périodes de temps.

**Tension de service** Tension sous laquelle le condensateur peut fonctionner sans claquer durant de longues périodes de temps.



# CIRCUITS MAGNÉTIQUES

## 10.1 INTRODUCTION

Le magnétisme joue un rôle important dans la plupart des dispositifs électriques aujourd'hui utilisés dans les usines, dans les laboratoires de recherche et même à la maison. Les génératrices, les moteurs, les transformateurs, les disjoncteurs, les téléviseurs, les radios et les téléphones font tous appel à l'*électromagnétisme*, c'est-à-dire à des effets magnétiques induits par un déplacement de charges (courant). Dans de nombreux ordinateurs, le stockage des données se fait sur support magnétique: soit des bandes, soit des disques, soit des bulles.

La boussole, utilisée par les marins chinois dès le II<sup>e</sup> siècle avant l'ère chrétienne, est un instrument qui indique le Nord grâce à un *aimant permanent*. Ce dernier est fait d'un matériau, du fer par exemple, qui demeure aimanté longtemps sans apport d'énergie extérieure comme c'est le cas des dispositifs électromagnétiques.

En 1820, le physicien danois Hans Christian Oersted a découvert que l'aiguille d'une boussole déviait si on approchait l'instrument d'un conducteur porteur de courant. Il a démontré ainsi pour la première fois l'existence d'un lien entre l'électricité et le magnétisme. La même année, le physicien français André Marie Ampère a élaboré, consécutivement à de longues expériences, le principe maintenant appelé *loi d'Ampère*. Dans les années qui suivirent, plusieurs physiciens et mathématiciens, notamment Michael Faraday, Karl Friedrich Gauss et James Clerk Maxwell, ont exploré expérimentalement le domaine et ont énoncé de nombreux principes fondamentaux de l'électromagnétisme.

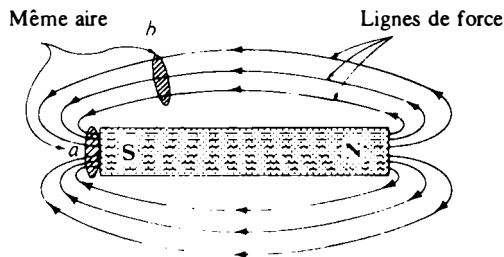


FIG. 10.1

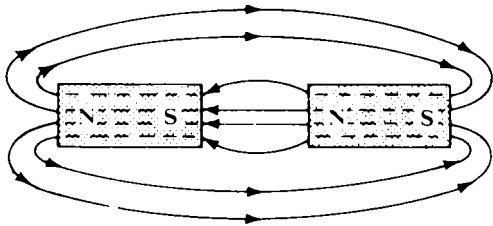


FIG. 10.2

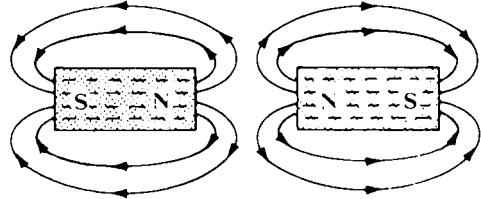


FIG. 10.3

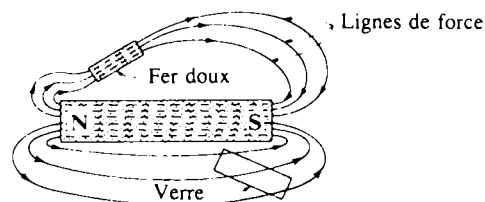


FIG. 10.4

Il existe de nombreuses similitudes entre l'étude des circuits électriques et celle des circuits magnétiques. Nous les verrons plus loin dans le présent chapitre lorsque nous comparerons les équations et les méthodes de base employées pour analyser les circuits magnétiques et électriques.

Il est souvent difficile de comprendre les méthodes d'analyse des circuits magnétiques non pas à cause de la complexité des équations, mais tout simplement parce que le choix des unités à employer n'est pas évident. Il existe actuellement trois systèmes d'unités différents utilisés dans l'analyse des circuits magnétiques. Par souci de clarté, nous employons dans le présent chapitre les unités SI. L'annexe F donne toutefois les facteurs de conversion entre les unités SI, les unités du système CGS et les unités anglo-saxonnes.

## 10.2 CHAMPS MAGNÉTIQUES

Dans la région autour d'un aimant permanent, il existe un champ magnétique qu'on peut représenter au moyen de lignes de force magnétique semblables aux lignes de force électrique. Contrairement à ces dernières, les lignes de force magnétique ne partent d'aucun point et n'arrivent à aucun point; elles se présentent plutôt sous la forme de boucles, comme l'illustre la figure 10.1. Le symbole du flux magnétique est la lettre grecque  $\Phi$  (phi).

Les lignes de force magnétique vont du pôle nord au pôle sud à l'extérieur du barreau aimanté, et du pôle sud au pôle nord à l'intérieur. De plus, elles sont également espacées dans le barreau et symétriquement distribuées autour de celui-ci. Ces propriétés supplémentaires sont celles des substances homogènes (dont la structure et la composition sont uniformes partout). Il importe aussi de comprendre que les lignes de force occupent la plus petite superficie possible et qu'en conséquence, leur longueur interpolaire est minimale, comme l'illustre la figure 10.2. La force du champ magnétique d'une région quelconque dépend directement du nombre de lignes de force par aire unitaire. Ainsi, à la figure 10.1, l'intensité du champ est deux fois plus grande au point *a* qu'au point *b*, puisque le nombre de lignes de force traversant une section d'aire unitaire à ce point est le double de celui au point *b*.

Les pôles opposés de deux aimants permanents s'attirent; le spectre des lignes de force est alors semblable à celui de la figure 10.2. Les pôles identiques de deux aimants permanents se repoussent; le spectre de lignes de force est alors semblable à celui illustré à la figure 10.3.

Si un matériau non magnétique, du verre par exemple, est placé sur le trajet des lignes de force entourant un aimant permanent, le spectre des lignes subit un changement presque imperceptible (figure 10.4). Par contre, si un matériau magné-



tique, du fer doux par exemple, est placé sur le trajet des lignes de force, le spectre est considérablement modifié, car les lignes de force passent avec plus de facilité dans un matériau magnétique que dans l'air. Ce phénomène est exploité pour blinder des éléments et des instruments électriques sensibles dont le fonctionnement peut être gêné par des champs magnétiques parasites (figure 10.5).

Ainsi que nous l'indiquons dans l'introduction, un champ magnétique (représenté par des lignes de force concentriques comme à la figure 10.6) est également présent autour de tout fil porteur d'un courant électrique.

Un moyen simple permet de déterminer le sens des lignes de force magnétique. On saisit le conducteur de la main droite, en plaçant le pouce dans le sens du courant conventionnel; les doigts de la main pointent alors dans le sens des lignes de force. Si le conducteur forme une boucle (figure 10.7), le flux magnétique résultant passe par le centre de la boucle.

Une bobine constituée de plusieurs spires produit ainsi un champ magnétique continu semblable à celui que produit un barreau aimanté (figure 10.8).

Les lignes de force sortent de la bobine du côté gauche et y entrent du côté droit, donnant ainsi à la bobine un pôle nord et un pôle sud. Il existe toutefois une différence majeure entre le spectre d'une bobine et celui d'un barreau aimanté: les lignes de force de ce dernier sont plus concentrées. En outre, l'intensité du champ magnétique étant déterminée par la densité des lignes de force, la bobine a un champ plus faible que le barreau aimanté. Par contre, on peut augmenter l'intensité du champ magnétique d'une bobine en plaçant au centre de ses spires un noyau constitué d'un matériau magnétique (du fer, de l'acier ou du cobalt); puisque le flux magnétique passe plus facilement dans un tel matériau que dans l'air, toutes les lignes de force tendent à passer par le noyau, ce qui augmente leur densité et, par conséquent, l'intensité du champ. Une bobine dotée d'un noyau magnétique est appelé *électro-aimant* (figure 10.9). L'électro-aimant possède toutes les propriétés d'un aimant permanent. On peut faire varier l'intensité du champ en modifiant une de ses caractéristiques (intensité du courant qui parcourt les spires, nombre de spires, etc.). Bien sûr, il faut qu'un courant passe dans la bobine de l'électro-aimant pour qu'un champ magnétique s'établisse, alors qu'en comparaison, le champ est toujours présent dans l'aimant permanent. Il existe aussi un moyen simple de déterminer le sens des lignes de force du champ d'un électro-aimant (ou de tout dispositif constitué d'un noyau et d'un bobinage de fil). Il s'agit de placer les doigts de la main droite dans le sens du courant qui parcourt les spires; le pouce pointe alors vers le pôle nord du champ magnétique induit (voir la figure 10.10). Cette dernière figure illustre une coupe d'un électro-aimant; nous présentons sur cette coupe les signes conventionnels utilisés pour indiquer les

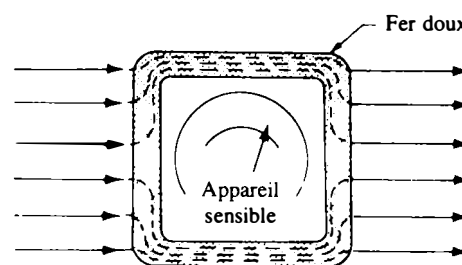


FIG. 10.5

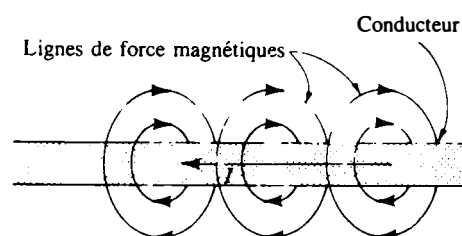


FIG. 10.6

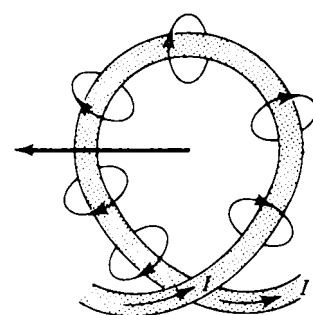


FIG. 10.7

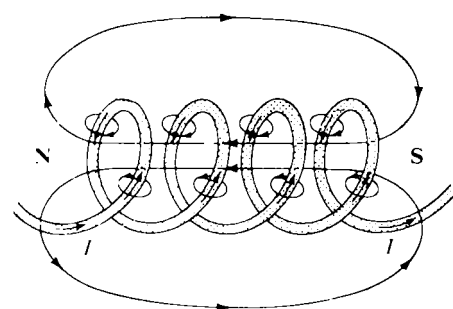


FIG. 10.8

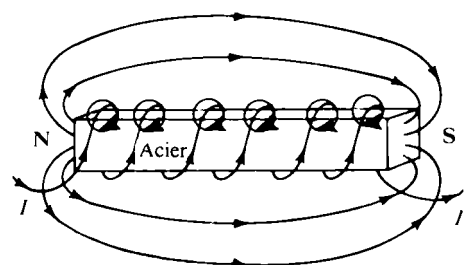


FIG. 10.9

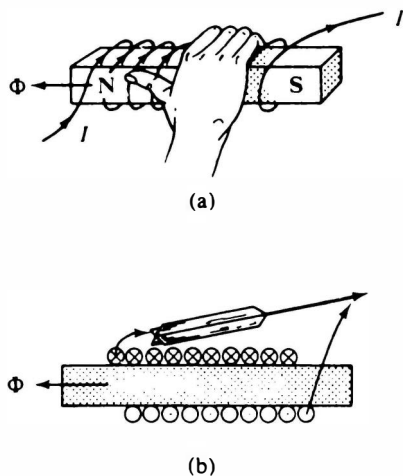


FIG. 10.10

deux sens possibles d'une droite perpendiculaire à la feuille. Manifestement, la croix ⊗ et le point ⊙ représentent respectivement l'empenne et la pointe de la flèche illustrée.

La figure 10.11 illustre divers domaines d'utilisation de l'électromagnétisme. le trajet qu'emprunte le flux magnétique est indiqué sur chaque dessin.

### 10.3 INDUCTION MAGNÉTIQUE

Dans le SI, le flux magnétique se mesure en webers (Wb) et est représenté par le symbole Φ. Le nombre de lignes

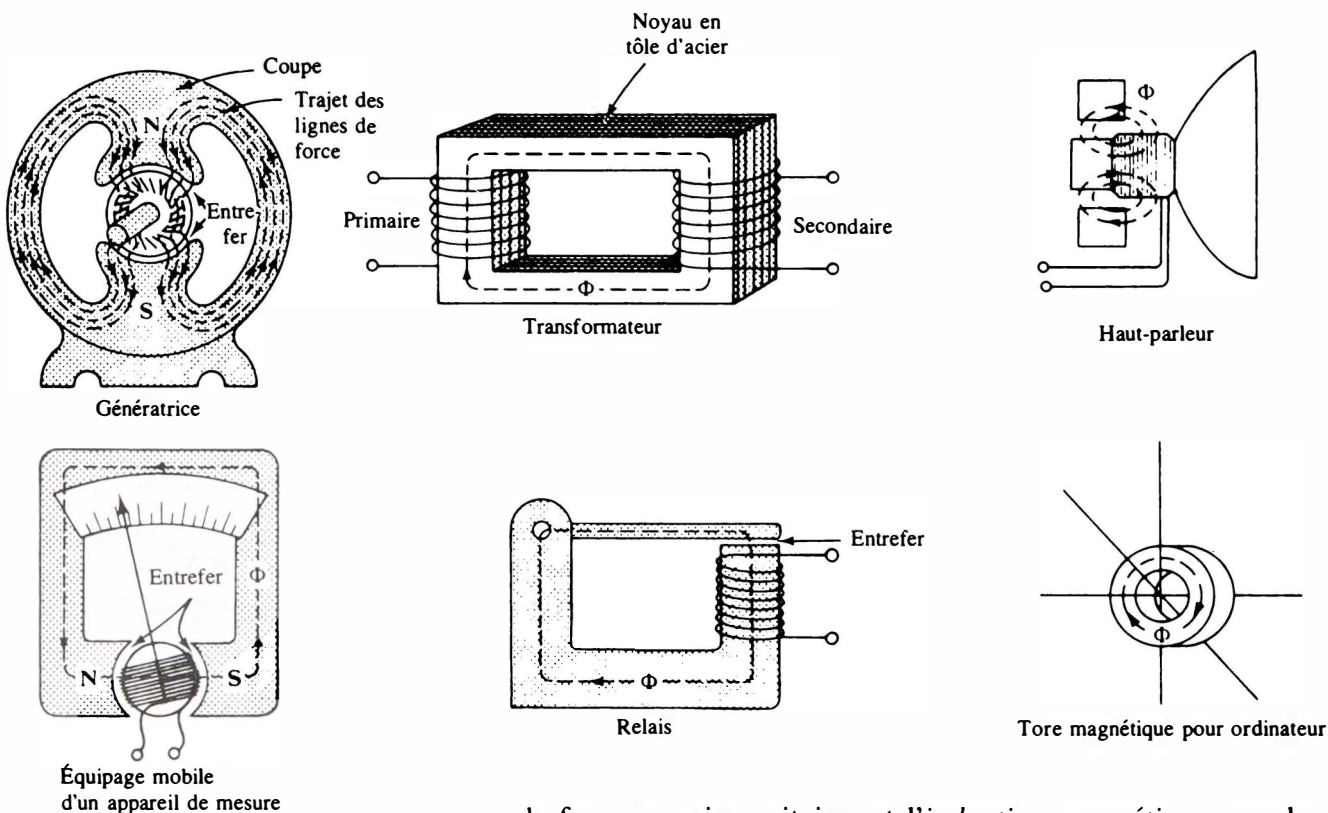


FIG. 10.11

de force par aire unitaire est l'induction magnétique, symbolisée par la lettre *B*. Sa grandeur est déterminée par l'équation:

$$B = \frac{\Phi}{A} \quad \begin{matrix} B = \text{T} \\ \Phi = \text{Wb} \\ A = \text{m}^2 \end{matrix} \quad (10.1)$$

dans laquelle Φ est le nombre de lignes traversant une section d'aire *A* (figure 10.12). L'induction magnétique au point *a* à la figure 10.1 est le double de celle au point *b*, deux fois plus de lignes traversant une surface de même aire au premier point qu'au second.

Dans le SI, l'induction magnétique se mesure en *teslas*, dont le symbole est T. Par définition:

$$1 \text{ T} = 1 \text{ Wb/m}^2$$

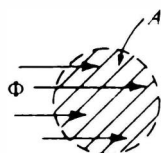


FIG. 10.12



**EXEMPLE 10.1** Déterminer l'induction magnétique  $B$  en teslas dans le noyau illustré à la figure 10.13.

*Solution:*

$$B = \frac{\Phi}{A} = \frac{6 \times 10^{-5}}{1,2} = 5 \times 10^{-5} \text{ T}$$

**EXEMPLE 10.2** Déterminer le flux magnétique dans le noyau illustré à la figure 10.13, si l'induction magnétique est de 1,2 T et que l'aire soit de 0,25 po<sup>2</sup>.

*Solution:* L'équation (10.1) donne:

$$\Phi = BA$$

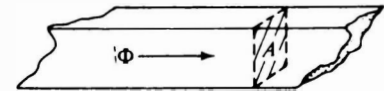
On a:

$$0,25 \text{ po}^2 \left[ \frac{1 \text{ m}}{39,37 \text{ po}} \right] \left[ \frac{1 \text{ m}}{39,37 \text{ po}} \right] = 1,613 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

et:

$$\Phi = (1,2)(1,613 \times 10^{-4})$$

$$\Phi = 1,936 \times 10^{-4} \text{ Wb}$$



$$\Phi = 6 \times 10^{-5} \text{ Wb}$$

$$A = 1,2 \text{ m}^2$$

FIG. 10.13



Courtoisie de LDJ Electronics, Inc.

FIG. 10.14 Gaussmètre numérique.

La figure 10.14 représente un appareil, le gaussmètre, qui permet de mesurer l'induction magnétique. Puisque l'unité de mesure de cet appareil est le gauss (système CGS), ses lectures doivent être corrigées par un facteur  $10^{-4}$  (voir l'annexe F:  $1 \text{ T} = 10^4 \text{ gauss}$ ) pour être exprimées en teslas.

L'appareil numérique illustré mesure aussi bien l'induction magnétique statique (en courant continu) que la *valeur efficace* du champ magnétique sinusoïdal (la terminologie sera expliquée au chapitre 13) jusqu'à 1 kHz.

## 10.4 PERMÉABILITÉ

Si pour réaliser l'électro-aimant décrit à la section 10.2 on utilisait des noyaux constitués de matériaux différents mais possédant les mêmes dimensions, l'intensité du champ magnétique varierait selon la nature du matériau employé. Cette variation de l'intensité serait due au nombre plus ou moins grand de lignes de force passant dans le noyau. Les matériaux qui laissent passer facilement les lignes de force sont dits *magnétiques* et sont caractérisés par une *perméabilité élevée*. La perméabilité ( $\mu$ ) d'un matériau est par conséquent une mesure de la facilité avec laquelle les lignes de force magnétique peuvent s'établir dans le matériau. Cette propriété est semblable à de nombreux égards à la conductivité électrique. La perméabilité du vide est donnée par la relation ci-dessous.

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Wb/A}\cdot\text{m}$$





À toutes fins pratiques, la perméabilité des matériaux non magnétiques, comme le cuivre, l'aluminium, le bois, le verre et l'air, est la même que celle du vide. Les matériaux dont la perméabilité est légèrement inférieure à celle du vide sont dits *diamagnétiques*, et ceux dont la perméabilité est légèrement supérieure à celle du vide sont dits *paramagnétiques*. Les matériaux magnétiques, notamment le fer, le nickel, l'acier, le cobalt et les alliages de ces métaux, sont de perméabilité de centaines de fois et même de milliers de fois supérieure à celle du vide. Les matériaux possédant une perméabilité extrêmement élevée sont dits *ferromagnétiques*.

Le quotient de la perméabilité d'un matériau par celle du vide est la *perméabilité relative*:

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} \quad (10.2)$$

En règle générale,  $\mu_r$  est plus grand ou égal à 100 pour les matériaux ferromagnétiques et égal à 1 pour les matériaux non magnétiques.

Soulignons que  $\mu_r$  est une variable qui dépend des autres caractéristiques du circuit magnétique. Les façons de calculer  $\mu_r$  à partir des données fournies par les fabricants sont expliquées dans une section suivante.

## 10.5 RÉLUCTANCE

Dans les circuits électriques, la résistance qu'oppose un conducteur au passage des charges, c'est-à-dire du courant, est déterminée par la relation:

$$R = \rho \frac{l}{A} \quad (\Omega)$$

La *réductance* d'un matériau est l'opposition que ce dernier offre à l'établissement des lignes de force magnétiques; elle est déterminée par la relation:

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu A} \quad (\text{H}^{-1}) \quad (10.3)$$

dans laquelle  $\mathcal{R}$  est la réductance,  $l$  est la longueur du trajet magnétique et  $A$  est l'aire de la section. À noter que la résistance et la réductance sont inversement proportionnelles à l'aire de la section, toute augmentation de l'aire se traduisant par une réduction de chacune et une *augmentation* du courant et du flux. C'est cependant le contraire qui se produit si on augmente la longueur. Par contre, la réductance est inversement proportionnelle à la perméabilité, alors que la résistance est directement proportionnelle à la résistivité. Plus grande est la perméabilité  $\mu$  ou plus petite est la résistivité  $\rho$ , plus petites



sont respectivement la réluctance et la résistance. Manifestement, les matériaux de perméabilité très grande, notamment les matériaux ferromagnétiques, sont par conséquent de réluctance très petite et laissent passer un flux important. L'unité SI de la réluctance est l'inverse du henry ( $H^{-1}$ ).

## 10.6 LOI D'OHM DES CIRCUITS MAGNÉTIQUES

Rappelons l'équation:

$$\text{Effet} = \frac{\text{cause}}{\text{opposition}}$$

introduite au chapitre 4 pour présenter la loi d'Ohm des circuits électriques. Dans les circuits magnétiques, l'effet désiré est le flux  $\Phi$ . La cause est la force magnétomotrice (f.m.m.) symbolisée par  $\mathcal{F}$ ; il s'agit de la force externe (ou de la « pression ») nécessaire à l'établissement de lignes de force magnétique dans le matériau magnétique. L'opposition à l'établissement du flux  $\Phi$  est la réluctance  $\mathcal{R}$ .

Par substitution, nous avons:

$$\Phi = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}} \quad (10.4)$$

La force magnétomotrice  $\mathcal{F}$  est proportionnelle au produit du nombre de spires autour du noyau (dans lequel le flux sera établi) par l'intensité du courant qui parcourt les spires de fil (figure 10.15). On a donc:

$$\mathcal{F} = NI \quad (\text{ampères, A}) \quad (10.5)$$

Cette équation indique sans ambiguïté qu'une augmentation du nombre de spires ou de l'intensité du courant qui parcourt le fil se traduit par une augmentation de la « pression » qui établit les lignes de force dans le noyau. Soulignons que l'ampère-tour (At) est couramment employé comme unité de  $\mathcal{F}$ : il équivaut à l'ampère.

Malgré la grande similitude entre les circuits électriques et magnétiques, le flux  $\Phi$  n'est absolument pas assimilable au courant passant dans un circuit électrique. Le flux est établi dans un matériau grâce à l'altération de la structure atomique par une pression extérieure. Il *n'est pas* un écoulement quelconque de particules chargées à l'intérieur du matériau.

## 10.7 FORCE D'AIMANTATION

La force magnétomotrice par unité de longueur est appelée *force d'aimantation* ( $H$ ). L'équation générale permettant de déterminer cette force est:

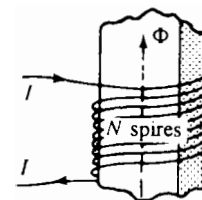


FIG. 10.15

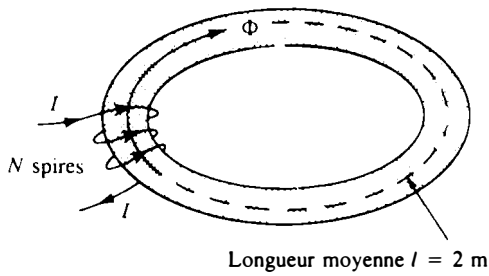


FIG. 10.16

$$H = \frac{\mathcal{F}}{l} \quad (\text{A/m}) \quad (10.6)$$

En remplaçant  $\mathcal{F}$  par  $NI$ , on obtient:

$$H = \frac{NI}{l} \quad (\text{A/m}) \quad (10.7)$$

Ainsi, dans le circuit magnétique illustré à la figure 10.16, si  $NI = 40 \text{ A}$  et  $l = 0,2 \text{ m}$ , on a:

$$H = \frac{NI}{l} = \frac{40}{0,2} = 200 \text{ A/m}$$

Il faut donc, pour le circuit illustré à la figure 10.16, une force d'alimentation de 200 A/m pour établir le flux  $\Phi$  indiqué. À noter que la force d'aimantation est indépendante de la nature du matériau dont est fait le noyau; elle dépend uniquement du nombre de spires, de l'intensité du courant et de la longueur du noyau.

La force d'aimantation appliquée a un important effet sur la perméabilité d'un matériau magnétique. Lorsqu'elle croît progressivement, la perméabilité augmente, passe par un maximum, puis chute et tend vers un minimum, comme l'illustre la figure 10.17 pour trois matériaux magnétiques usuels.

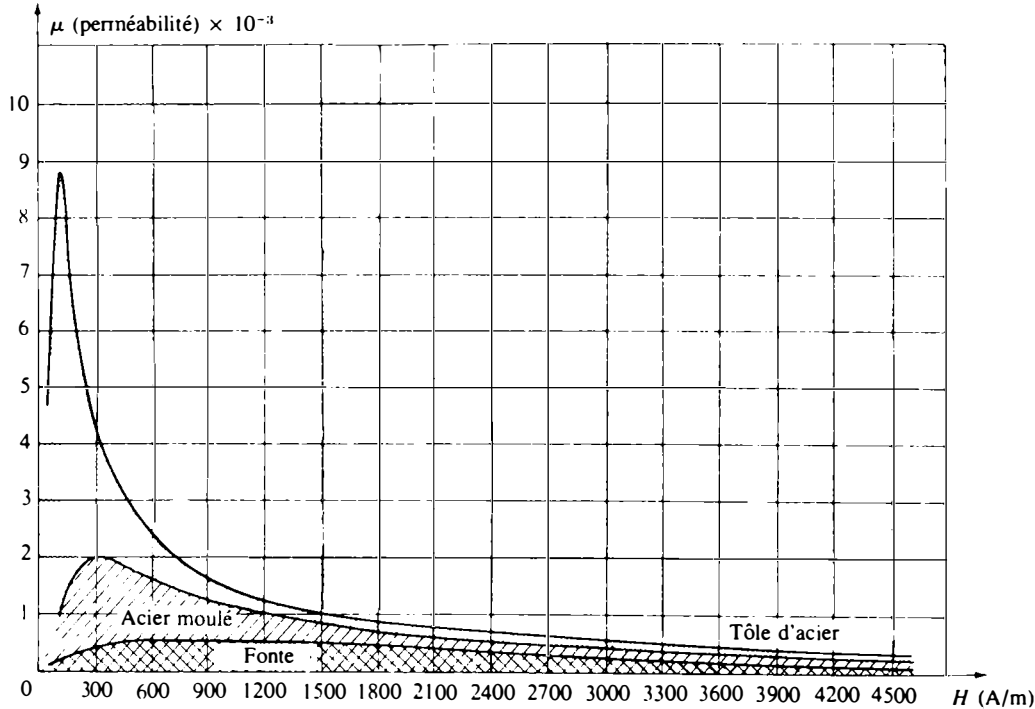


FIG. 10.17

On peut établir une équation liant l'induction magnétique  $B$  à la force d'aimantation en substituant à la réluctance  $\mathcal{R}$  apparaissant dans l'équation 10.4 son expression donnée par l'équation 10.3:

$$\Phi = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}} = \frac{\mathcal{F}}{l/\mu A} \quad \text{d'où} \quad \Phi = \frac{\mathcal{F} \mu A}{l}$$



Mais:

$$B = \frac{\Phi}{A} = \frac{\mathcal{F} \mu A}{lA} = \frac{\mu \mathcal{F}}{l} \quad \text{ou} \quad l = \frac{\mu \mathcal{F}}{B}$$

et:

$$H = \frac{\mathcal{F}}{l} = \frac{\mathcal{F}}{\mu \mathcal{F} / B}$$

de sorte que:

$$H = \frac{B}{\mu}$$

ou:

$$\boxed{B = \mu H} \quad (10.8)$$

Cette dernière équation indique que pour une force d'aimantation donnée, plus grande est la perméabilité, plus grande est l'induction magnétique. Elle a servi à établir les unités de la perméabilité à la section 10.4:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{B}{H} = \frac{B}{NI/l} \\ &= \frac{\text{Wb/m}^2}{\text{A/m}} \quad (\text{pour } N = 1) \\ &= \frac{\text{Wb}}{\text{A} \cdot \text{m}} \end{aligned}$$

### 10.8 HYSTÉRÉSIS

L'ingénieur a souvent besoin dans son travail de la courbe de l'induction magnétique  $B$  en fonction de la force d'aimantation  $H$ . Les courbes de ce genre se trouvent habituellement dans les manuels et les notices publiées par les fabricants de matériaux magnétiques. Le montage illustré à la figure 10.18 permet d'établir une courbe  $B-H$  typique d'un matériau ferromagnétique.

Au départ, le noyau n'est pas aimanté et l'intensité  $I$  du courant est nulle. Lorsque l'intensité augmente et devient non nulle, la force d'aimantation  $H$  augmente également et passe à une valeur déterminée par la relation:

$$H \uparrow = \frac{NI \uparrow}{l}$$

Le flux  $\Phi$  et l'induction  $B$  ( $B = \Phi/A$ ) augmentent également avec l'intensité  $I$  du courant (ou avec  $H$ ). Lorsque la force d'aimantation  $H$  augmente jusqu'à une certaine valeur  $H_a$ , la courbe  $B-H$  prend l'allure de la courbe illustrée à la figure 10.19 entre les points  $o$  et  $a$ . Si la force d'aimantation  $H$

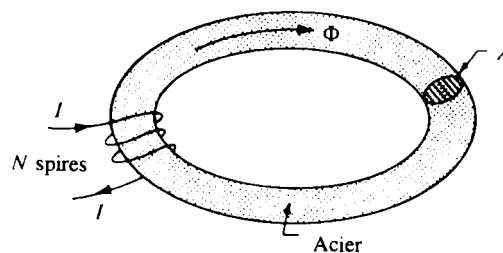


FIG. 10.18

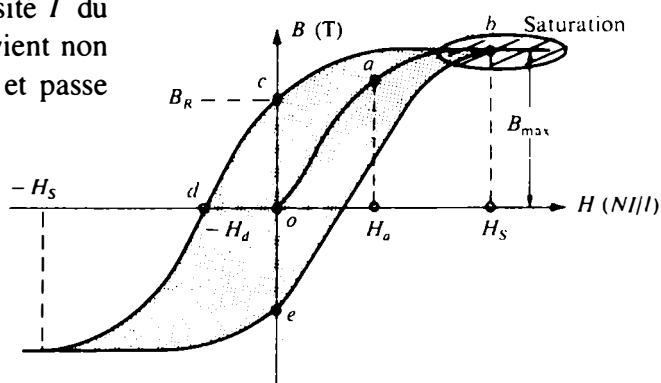


FIG. 10.19



augmente jusqu'à sa valeur de saturation ( $H_s$ ), la courbe se prolonge de la façon indiquée à la figure jusqu'au point  $b$ . À saturation, l'induction magnétique  $a$ , à toutes fins pratiques, atteint sa valeur maximale. Toute augmentation supplémentaire de l'intensité du courant passant dans la bobine fait augmenter  $H = NI/l$ , mais se traduit par une très petite augmentation de l'induction  $B$ .

Lorsque le courant décroît à zéro, la force d'aimantation décroît aussi à zéro en suivant le trajet de  $b$  à  $c$  illustré à la figure. La valeur ( $B_R$ ) que prend l'induction magnétique lorsque la force d'aimantation redevient nulle est l'*induction magnétique résiduelle*. Le fait que cette valeur ne soit pas nulle rend possible la fabrication des aimants permanents. En effet, même si la bobine est maintenant retirée du montage illustré à la figure 10.18, le noyau conserve ses propriétés magnétiques; l'induction magnétique résiduelle est ainsi une mesure de sa *rémanence*. L'inversion du courant  $I$  donne naissance à une force d'aimantation  $-H$ ; l'induction magnétique  $B$  décroît alors à mesure qu'augmente l'intensité  $I$  du courant. Pour une certaine valeur de la force d'aimantation ( $-H_d$ ), l'induction magnétique est nulle (la courbe adopte le trajet entre les points  $c$  et  $d$ ). La force d'aimantation  $H_d$  nécessaire pour annuler l'induction magnétique est la *force coercitive*; elle est une mesure de la coercitivité du matériau magnétique. Puisque la force  $-H$  continue d'augmenter, un point de saturation est atteint. Si, à partir de ce point, la force d'aimantation est inversée et ramenée à zéro, la courbe adopte alors le trajet entre les points  $d$  et  $e$ . À mesure que la force d'aimantation augmente dans le sens positif ( $+H$ ), la courbe décrit le trajet illustré entre les points  $e$  et  $b$ . L'ensemble de la courbe passant par les points  $bcded$  est appelé *cycle d'hystérésis* d'un matériau ferromagnétique. Pendant ce cycle, l'induction magnétique  $B$  est *en retard* sur la force d'aimantation  $H$ . Lorsque  $H$  est nulle au point  $c$ ,  $B$  n'est pas nulle mais commence seulement à décroître. L'induction  $B$  ne devient en effet nulle que bien après le passage de  $H$  par zéro, lorsque la valeur  $-H_d$  est atteinte.

Pour un matériau donné, l'amplitude du cycle dépend de la valeur maximale de la force d'aimantation  $H$  appliquée. La figure 10.20 illustre trois cycles d'hystérésis d'un même matériau pour trois valeurs différentes de  $H$  inférieures à la valeur de saturation. Aux fins de comparaison, le cycle de saturation apparaît aussi à cette figure.

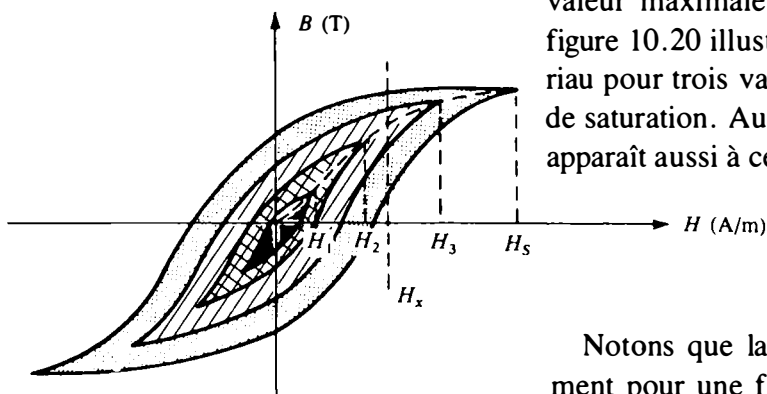


FIG. 10.20

Notons que la valeur de l'induction  $B$  peut varier énormément pour une force d'aimantation donnée (disons  $H_x$ ) selon le cycle considéré. De façon à attribuer une seule valeur à

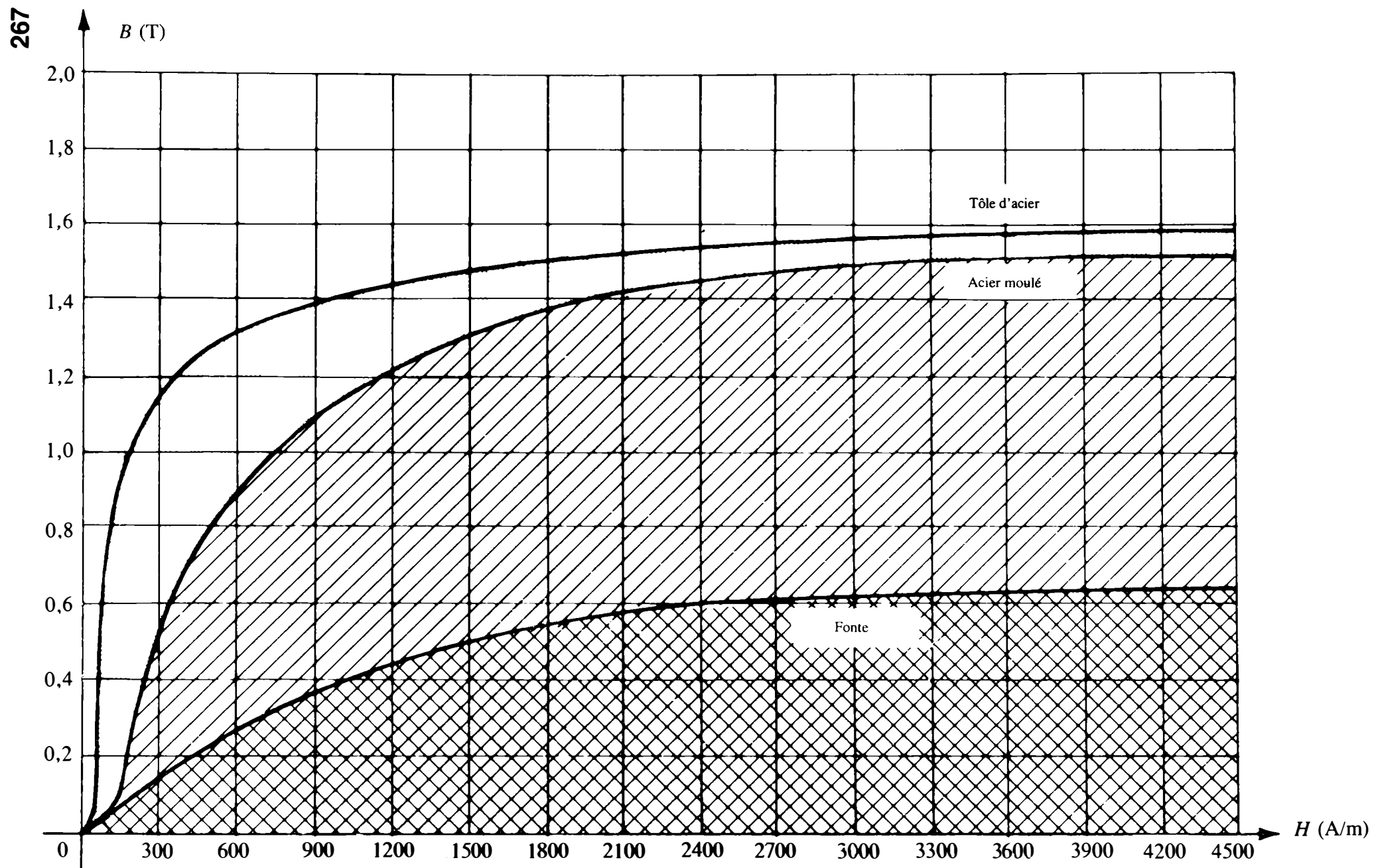


FIG. 10.21



l'induction  $B$  pour chaque valeur donnée de  $H$ , on trace habituellement une courbe passant par les pointes des cycles d'hystérésis. La courbe résultante, tracée en tirets à la figure 10.20 et illustrée pour divers matériaux à la figure 10.21, est appelée *courbe d'aimantation normale*. La figure 10.22 représente un agrandissement d'une région de la figure 10.21.

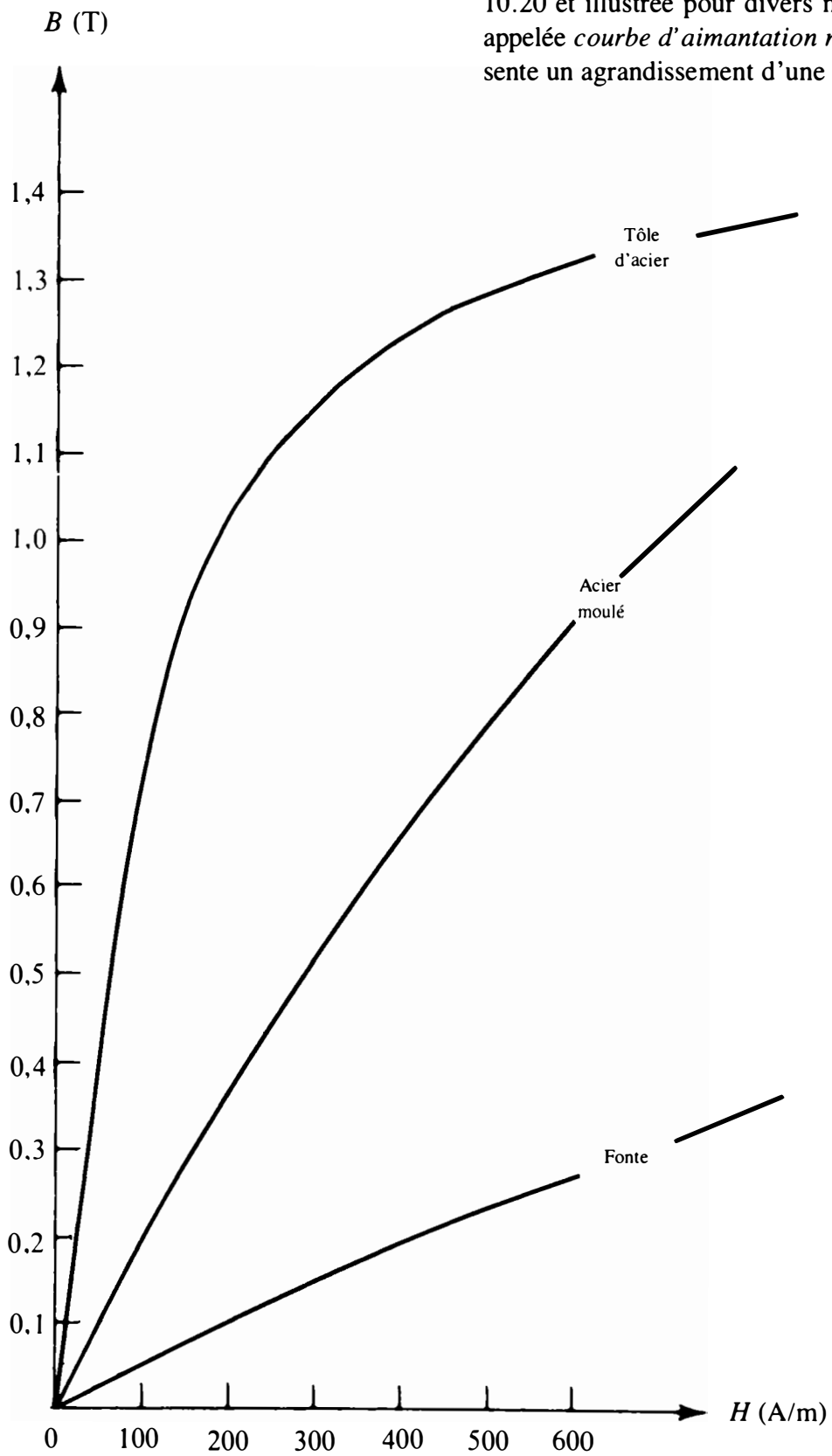
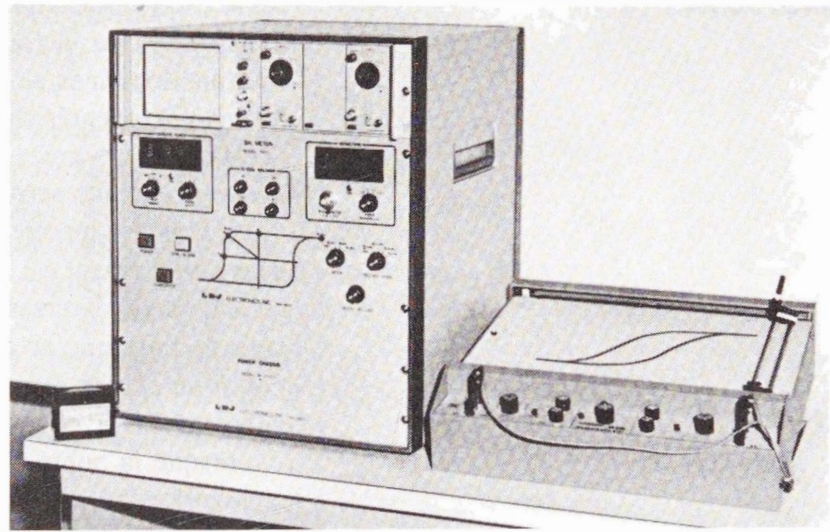


FIG. 10.22



La figure 10.23 représente un appareil qui trace la courbe  $B-H$  des matériaux magnétiques.

Soulignons que les cycles d'hystérésis illustrés à la figure 10.20 sont à symétrie centrale (par rapport à l'origine): la forme de la partie du cycle à gauche de la verticale est identique à celle de la partie à droite. Soulignons aussi que toute nouvelle application des forces d'aimantation donne les mêmes cycles. Pour tout courant  $I$  dans la relation  $H = NI/l$ , qui oscille entre des maximums négatif et positif à une vitesse constante, la courbe  $B-H$  est la même à chaque alternance. Il en sera ainsi dans le cas des réseaux en courant alternatif sinusoïdal qui seront étudiés plus tard. L'inversion du champ ( $\Phi$ ) créée par le changement de sens du courant produit une perte d'énergie qui s'explique le mieux grâce à la *théorie du champ moléculaire*.



Courtoisie de LDJ Electronics, Inc.

FIG. 10.23

Au sein de chaque atome, les électrons orbitaux (voir le chapitre 2) tournent autour du noyau et tournent aussi sur eux-mêmes. L'atome possède de ce fait un champ magnétique. Dans les matériaux non magnétiques, le champ magnétique net est nul, car les champs magnétiques des atomes s'opposent les uns aux autres. Dans les matériaux magnétiques comme le fer et l'acier, les champs magnétiques d'un groupe d'atomes (jusqu'à  $10^{12}$  atomes) s'alignent et donnent naissance à de minuscules barreaux aimantés. Des groupes d'atomes présentant le même alignement magnétique sont appelés *domaines*. Chaque domaine est une entité distincte, c'est-à-dire qu'il est indépendant des domaines voisins. Dans un matériau magnétique non aimanté, les domaines sont orientés au hasard, comme l'illustre la figure 10.24a, de sorte que le champ magnétique net est nul.

Lors de l'application d'une force d'aimantation externe, les domaines, qui sont déjà presque alignés suivant le champ appliqué, croissent aux dépens des autres domaines, comme





l'illustre la figure 10.24b. Si le champ appliqué est suffisamment intense, il arrive un point où tous les domaines sont alignés suivant la force d'aimantation: toute augmentation subséquente de l'intensité du champ appliqué n'entraîne pas l'accroissement du flux magnétique dans le matériau. Ce phénomène est appelé *saturation*. Le matériau possède une certaine élasticité. Lorsque la force d'aimantation est supprimée,

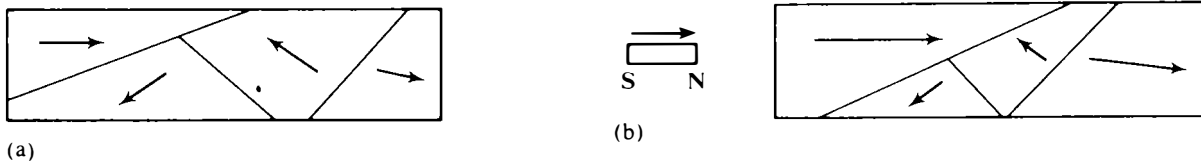


FIG. 10.24

les domaines tendent à reprendre leur orientation originelle, de sorte l'induction chute à la valeur  $B_R$ . En d'autres termes, l'annulation de la force d'aimantation a comme résultat que certains domaines se réorientent au hasard mais que d'autres demeurent orientés suivant la direction de la force supprimée. C'est d'ailleurs grâce à ces derniers qu'il est possible de fabriquer des aimants permanents.

Juste avant que ne soit atteinte la saturation, les domaines, dont l'alignement est opposé à la force, sont réduits à de petits cylindres de diverses formes qu'on appelle *bulles*. Il est possible de faire migrer ces bulles dans le matériau par l'application d'un champ magnétique de commande. Ces bulles sont à la base des nouvelles mémoires à bulles des ordinateurs.

Lorsque la bobine d'aimantation est attaquée par un signal alternatif comme celui que nous avons décrit ci-dessus, les domaines doivent inverser leur alignement à chacune des alternances du signal. L'opposition naturelle (par frottement) des domaines à cette inversion a pour effet d'échauffer le matériau. Les cycles d'hystérésis de trois matériaux ferromagnétiques sont illustrés à la figure 10.25. Il a été déterminé mathématiquement et expérimentalement que le transfert d'énergie sous forme de chaleur est directement proportionnel à l'aire délimitée par le cycle d'hystérésis. Il est maximal pour les matériaux

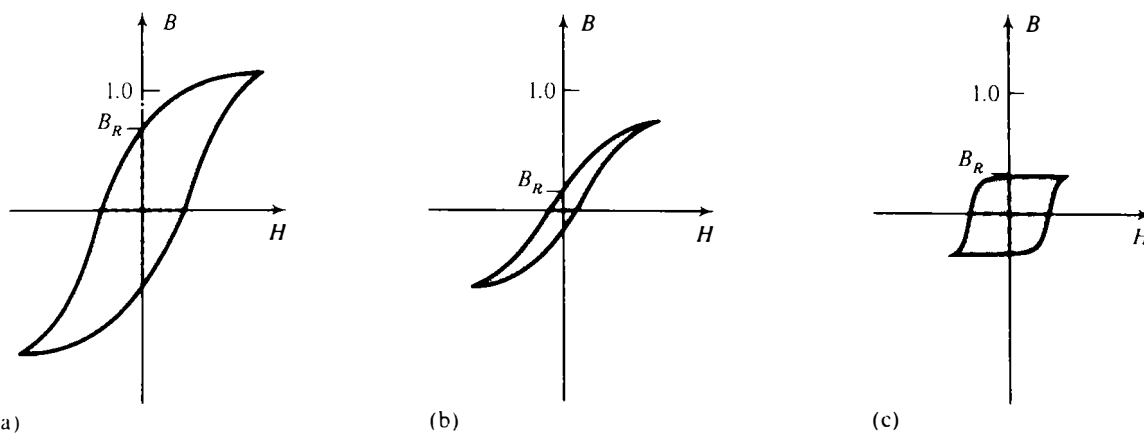
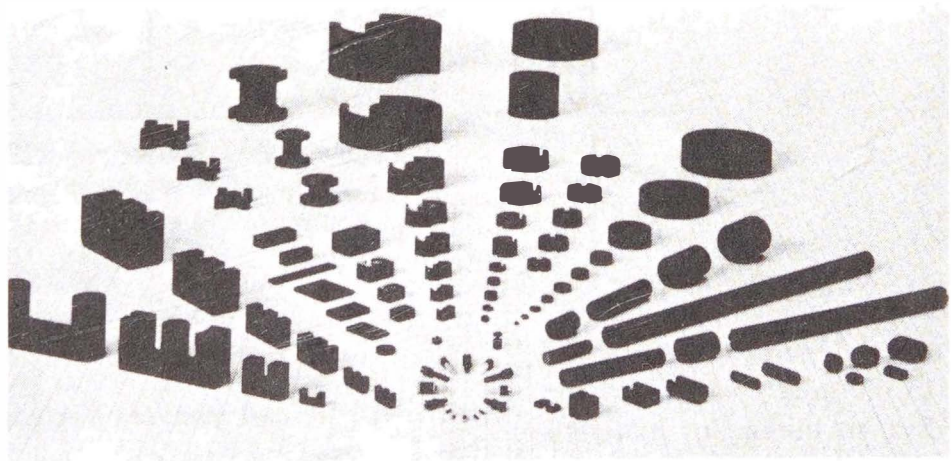


FIG. 10.25 Cycles d'hystérésis. (a) Tôle d'acier; (b) fer doux; (c) ferrites.



de grande rémanence (figure 10.25a) comme ceux dont sont constitués les aimants permanents des moteurs, des alternateurs et des appareils de mesure. L'énergie transférée au matériau est aussi directement proportionnelle à la fréquence du signal d'attaque (vitesse à laquelle le courant oscille entre ses maximums positif et négatif). Cette proportionnalité s'explique par le fait que le transfert d'énergie doit être le même à chacune des alternances. Plus il y a d'alternances en une seconde (plus la fréquence est grande), plus l'énergie absorbée par le matériau est grande. Cependant, le réalignement des domaines de façon continue n'est pas indispensable dans les aimants permanents; ce facteur est sans grande importance. Les fabricants prennent bien soin par contre de choisir des matériaux, comme le fer doux (figure 10.25b), dont l'aire du cycle d'hystérésis est minimale, pour toutes les utilisations à haute vitesse de commutation (appareils de commande magnétiques, relais, etc.). Fort heureusement, ces utilisations exigent rarement des matériaux à grande rémanence.

Le cycle illustré à la figure 10.25c est celui d'un matériau constitué d'un mélange d'oxydes métalliques. La figure 10.26 représente des noyaux de ferrite utilisés dans les bobines et les transformateurs (dispositifs que nous étudierons plus tard), dans les antennes et dans les blindages magnétiques. Le tore illustré à la figure 10.11 sert d'unité de mémoire dans les ordinateurs. Son diamètre extérieur peut être aussi petit que 0,5 mm et comporte en son centre un trou à peine visible à l'oeil nu. Les noyaux de ferrite parviennent à saturation plus



Courtoisie de Siemens Corp.

FIG. 10.26 Noyaux de ferrite.

rapidement que les autres matériaux et présentent une courbe  $B-H$  extrêmement sensible à la force d'aimantation  $H$ : l'induction  $B$  (et par conséquent le flux  $\Phi$ ) demeure essentiellement constant tant que  $H$  n'atteint pas une certaine valeur, puis, au-delà de cette valeur, varie brusquement. La variation est si brusque qu'elle est assimilable à un changement d'état. À cause de ces caractéristiques, les noyaux de ferrite sont très utiles dans la construction des mémoires d'ordinateurs. Le sens du



flux  $\Phi$  sert de convention pour l'attribution des valeurs 0 et 1. Enfin, l'aire délimitée par le cycle est petite; les noyaux peuvent donc être employés en commutation à haute vitesse.

Les pertes par hystérésis sont essentiellement déterminées par la relation:

$$P_h = k \text{ Vol. } f \cdot B_{\max}^n \quad (\text{W}) \quad (10.9)$$

Comme on peut le constater, les pertes sont aussi fonction du volume du matériau dans lequel se produit l'inversion du flux. Autrement dit, plus gros est un noyau plus grand est le transfert d'énergie. Le facteur  $B_{\max}^n$  est fonction de l'aire du cycle. Le facteur  $n$  est déterminé par la nature du matériau utilisé. La valeur de  $B_{\max}^n$  se situe habituellement entre 1,4 et 2,6. Les pertes sont aussi fonction de la fréquence  $f$ . Quant au facteur  $k$ , il dépend de la nature du matériau utilisé.

## 10.9 PERMÉABILITÉ DIFFÉRENTIELLE ET PERMÉABILITÉ MOYENNE

L'équation (10.8) peut servir à déterminer la perméabilité  $\mu$  à un point donné de la courbe d'aimantation normale, lorsqu'elle est écrite sous la forme:

$$\mu_s = \frac{B}{H} \quad (10.10)$$

Cette valeur est souvent appelée *perméabilité statique*, car elle n'est définie que si  $B$  et  $H$  sont fixes, comme c'est le cas pour  $\mu_1$  à la figure 10.27a.

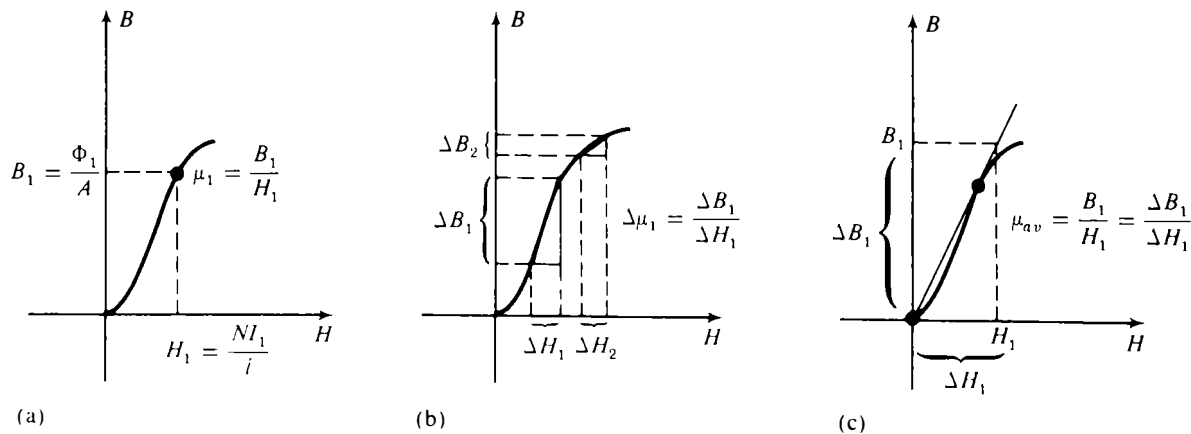


FIG. 10.27 Perméabilités: (a) statique, (b) différentielle et (c) moyenne.



Parfois le signal appliqué peut donner toute une gamme de valeurs de  $\mu$ , comme l'illustre la figure 10.27b. Dans ces cas, la *perméabilité différentielle* est définie par la relation:

$$\mu_{\Delta} = \frac{\Delta B}{\Delta H} \tag{10.11}$$

À la figure 10.27b, la valeur de  $\mu$  est maximale (comparez la variation de  $B$  à la même variation de  $H$  dans chaque région) vers le milieu de la courbe, ce qui indique que les grandes variations de  $\Phi$  ( $B = \Phi/A$ ) pour de petites variations du courant  $I$  ( $H = NI/l$ ) sont obtenues dans cette région. Cette caractéristique est souhaitable notamment dans les matériels de télécommunications (haut-parleurs, récepteurs téléphoniques, etc.).

Puisque la valeur de  $\mu$  varie d'un point à l'autre et qu'elle n'est pas constante, comme c'est le cas de  $\rho$  pour les éléments résistants et de  $\epsilon$  pour les éléments capacitifs, la détermination de la valeur de  $B$  ou de  $H$  dans l'analyse des circuits magnétiques exige habituellement l'emploi des courbes d'aimantation normale. Il est toutefois possible d'obtenir une valeur approximative par détermination de la valeur moyenne de  $\mu$  à l'aide de l'équation suivante et de la figure 10.27c:

$$\mu_m = \frac{\Delta B}{\Delta H} = \frac{B_1}{H_1} \tag{10.12}$$

La perméabilité moyenne ne permet de résoudre approximativement que les problèmes de circuit magnétique, dans lesquels  $B$  se situe au-dessous du seuil de saturation. On constate que la valeur de  $\mu$  est définie par l'origine et l'inflexion de la courbe. Toute combinaison quelconque d'une valeur de  $B$  et d'une valeur de  $H$ , les deux valeurs étant situées sur le segment de droite, donne la même valeur de  $\mu$ .

**EXEMPLE 10.3** Dans le cas de l'acier (voir la courbe illustrée à la figure 10.21), déterminer:

- a.  $\mu_s$  à  $B = 1,0$  T;
- b.  $\mu_{\Delta}$  dans la région de  $B = 1,0$  T;
- c.  $\mu_m$ .

*Solution:*

a.  $\mu_s = \frac{B}{H} = \frac{1,0 \text{ Wb/m}^2}{750 \text{ A/m}} = 1,33 \times 10^{-3} \text{ Wb/A}\cdot\text{m}$

b. Comme il est indiqué à la figure 10.28, nous avons:

$$\begin{aligned} \mu_{\Delta} &= \frac{\Delta B}{\Delta H} = \frac{1,1 - 0,9}{900 - 600} = \frac{0,2}{300} \\ &= 0,667 \times 10^{-3} \text{ Wb/A}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

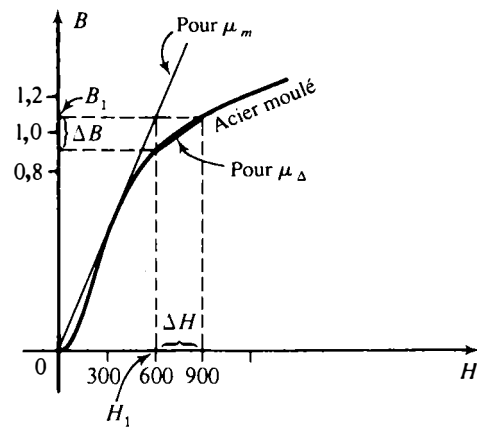


FIG. 10.28



c. La figure indique aussi que:

$$\mu_m = \frac{B_1}{H_1} = \frac{1,0}{600} = 1,67 \times 10^{-3} \text{ Wb/A}\cdot\text{m}$$

## 10.10 LOI D'AMPÈRE

Nous avons souligné dans l'introduction au présent chapitre qu'il existait une grande similitude entre les circuits électriques et les circuits magnétiques. Dans une certaine mesure, cette similitude a déjà été établie dans le cas des grandeurs apparaissant au tableau 10.1.

**TABLEAU 10.1**

	Circuits électriques	Circuits magnétiques
Cause	$E$	$\mathcal{F}$
Effet	$I$	$\Phi$
Opposition	$R$	$\mathcal{R}$

L'analogie de la loi des tensions ( $\sum_{\circlearrowleft} V = 0$ ) pour les circuits magnétiques est:

$$\sum_{\circlearrowleft} \mathcal{F} = 0 \quad (10.13)$$

En d'autres termes, la somme algébrique des élévations et des chutes de la f.m.m. sur un trajet fermé dans un circuit magnétique est nulle; on peut également dire que la somme des élévations de la f.m.m. est égale à la somme des chutes de la f.m.m. sur un trajet fermé.

L'équation 10.13 est appelée *loi d'Ampère*. Dans les circuits magnétiques, la grandeur des sources de f.m.m. est déterminée par la relation:

$$\mathcal{F} = NI \quad (\text{A}) \quad (10.14)$$

La relation permettant de déterminer la chute de la f.m.m. dans une partie d'un circuit magnétique peut s'obtenir à l'aide de l'analogie établie au tableau 10.1. Dans les circuits électriques, on a:

$$V = IR$$

et dans les circuits magnétiques:

$$\mathcal{F} = \Phi \mathcal{R} \quad (\text{A}) \quad (10.15)$$

Dans cette équation,  $\Phi$  est le flux passant à travers une section du circuit magnétique et  $\mathcal{R}$  est la réluctance de cette section.



La réluctance étant toutefois une grandeur rarement calculée dans l'analyse des circuits magnétiques, on utilise une relation plus commode pour déterminer la chute de la f.m.m.; cette relation est:

$$\boxed{\mathcal{F} = Hl} \quad (\text{A}) \quad (10.16)$$

Cette relation découle de l'équation (10.6). Le symbole  $H$  désigne la force d'aimantation appliquée à une portion du circuit magnétique et  $l$ , la longueur de cette portion. À titre d'exemple d'application de l'équation 10.13, considérons le circuit magnétique illustré à la figure 10.29. Celui-ci est constitué de trois matériaux ferromagnétiques différents.

La loi d'Ampère permet d'écrire:

$$\sum \circ \mathcal{F} = 0$$

$$+ \underbrace{NI}_{\text{élévation}} - \underbrace{H_{ab}l_{ab}}_{\text{chute}} - \underbrace{H_{bc}l_{bc}}_{\text{chute}} - \underbrace{H_{ca}l_{ca}}_{\text{chute}} = 0$$

OU:

$$\underbrace{NI}_{\substack{\text{f.m.m.} \\ \text{appliquée}}} = \underbrace{H_{ab}l_{ab} + H_{bc}l_{bc} + H_{ca}l_{ca}}_{\substack{\text{chutes de} \\ \text{la f.m.m.}}}$$

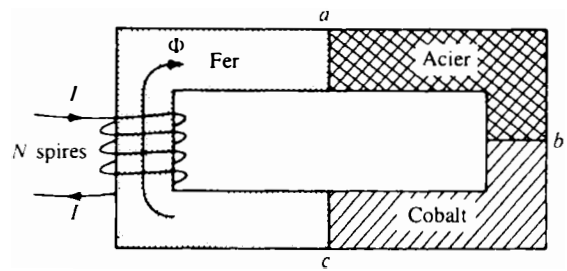


FIG. 10.29

Tous les termes de cette dernière équation sont connus, à l'exception de la force d'aimantation pour chacune des portions du circuit magnétique; cette force peut être déterminée au moyen de la courbe  $B-H$ , si l'induction magnétique  $B$  est connue.

### 10.11 LE FLUX $\Phi$

L'analogue de la loi des courants des circuits électriques devient: la somme des flux arrivant à une jonction est égale à la somme des flux en partant. Pour le circuit illustré à la figure 10.30, on peut donc écrire:

$$\Phi_a = \Phi_b + \Phi_c \quad (\text{jonction } a)$$

ou:

$$\Phi_b + \Phi_c = \Phi_a \quad (\text{jonction } b)$$

ces deux relations étant équivalentes.

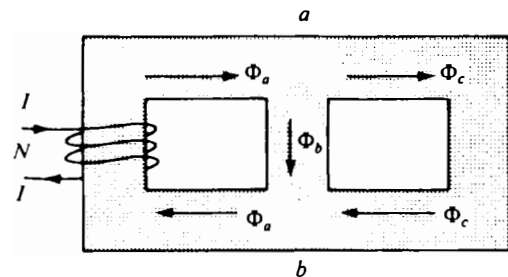


FIG. 10.30

### 10.12 CIRCUITS MAGNÉTIQUES EN SÉRIE: DÉTERMINATION DE $NI$

Nous sommes maintenant en mesure de résoudre quelques problèmes ayant trait aux circuits magnétiques, qui essentiellement appartiennent à deux grands types. Dans les pro-



blèmes du premier type, il s'agit de calculer la f.m.m. appliquée ( $NI$ ) à partir d'un flux  $\Phi$  connu. Ces problèmes se posent lors de la conception des moteurs, des génératrices et des transformateurs. Dans les problèmes du second type, il s'agit de calculer le flux magnétique du circuit à partir d'une f.m.m. ( $NI$ ) connue. Ces problèmes se posent principalement dans la conception des amplificateurs magnétiques; ils sont plus difficiles à résoudre que ceux du premier type, car la seule approche possible est celle de la méthode par tâtonnement.

Comme nous l'avons précisé plus tôt, la valeur de  $\mu$  varie d'un point à l'autre sur la courbe d'aimantation. Il est donc impossible de déterminer la réluctance de chaque « branche » ou encore la « réluctance totale » d'un réseau, comme cela est fait dans les circuits électriques où  $\rho$  est fixe peu importe l'intensité du courant ou la tension. S'il était possible de déterminer la réluctance totale, nous pourrions calculer  $\Phi$  à l'aide de l'analogie de la loi d'Ohm pour les circuits magnétiques.

Pour les circuits magnétiques, la valeur de  $B$  est déterminée à partir de  $H$  à l'aide de la courbe  $B-H$  et vice-versa; on a rarement à calculer  $\mu$ , à moins que cela ne soit exigé. On peut toujours, si une solution approximative est acceptable, déterminer  $\mu_m$ , puis la réluctance totale et, ainsi, résoudre le problème. Comme cette méthode n'a que des applications très limitées, le chapitre met l'accent sur l'emploi des courbes d'aimantation normale.

La méthode des *tableaux* est fréquemment employée pour l'analyse des circuits magnétiques. Il s'agit, avant même d'analyser en détail un problème, de dresser un tableau où sont inscrites dans la colonne gauche les diverses sections du circuit magnétique. Les autres colonnes du tableau sont réservées aux grandeurs à calculer pour chaque section. De cette façon, on dispose d'un moyen visuel indiquant quelles sont les grandeurs encore à calculer et quelle doit être la prochaine étape des calculs. Quelques exemples permettront de nous convaincre de l'utilité de cette méthode.

Nous ne considérerons dans la présente section que des circuits magnétiques en série dans lesquels le flux  $\Phi$  est uniforme. Dans chacun des exemples, il s'agira de calculer la force magnétomotrice.

**EXEMPLE 10.4** Déterminer l'intensité  $I$  du courant nécessaire pour établir un flux de  $2,5 \times 10^{-4}$  Wb dans le noyau du transformateur illustré à la figure 10.31. Comme le secondaire est en circuit ouvert, il n'a aucune incidence sur le flux dans le noyau.

*Solution:* Les données sont fournies au tableau 10.2.

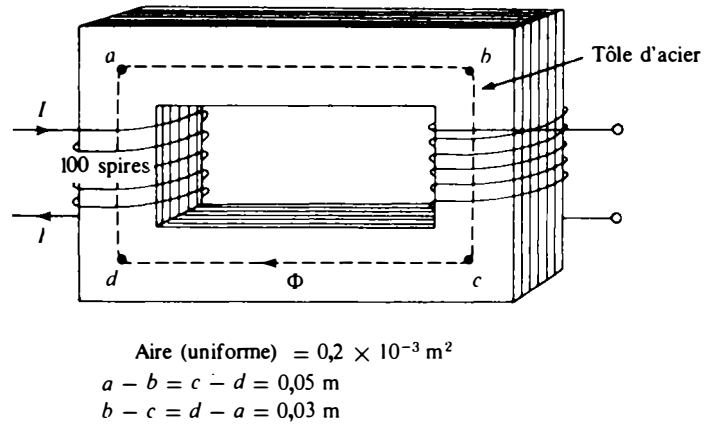


FIG. 10.31

TABLEAU 10.2

Section	$\Phi$	$A$	$B$	$H$	$l$	$HI$
$a-b = c-d$	$2,5 \times 10^{-4} \text{ Wb}$	$0,2 \times 10^{-3} \text{ m}^2$			0,05 m	
$b-c = d-a$	$2,5 \times 10^{-4} \text{ Wb}$	$0,2 \times 10^{-3} \text{ m}^2$			0,03 m	

Il nous faut maintenant remplir les espaces vides du tableau, de sorte qu'il nous soit possible de déterminer la valeur de  $HI$  pour chaque section. Lorsque cela sera fait, nous pourrons appliquer la loi d'Ampère pour obtenir la solution.

$$B \text{ (dans tout le noyau)} = \frac{\Phi}{A} = \frac{2,5 \times 10^{-4}}{0,2 \times 10^{-3}} = 1,25 \text{ T}$$

$$H \text{ (dans tout le noyau)} \cong 420 \text{ A/m}$$

(valeur obtenue de la figure 10.21).

La loi d'Ampère donne maintenant:

$$\sum \oint \mathcal{F} = 0$$

$$NI = HI$$

et:

$$NI = 2Hl_{a-b} + 2Hl_{b-c}$$

$$= 2H(l_{a-b} + l_{b-c})$$

$$= 2(420)(0,05 + 0,03)$$

$$100I = 67,20$$

$$I = \mathbf{0,672 \text{ A}}$$

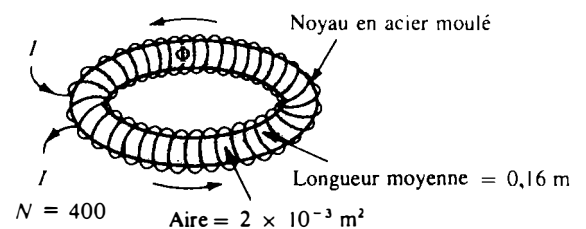


FIG. 10.32 Tore de l'exemple 10.5.

**EXEMPLE 10.5** Voir le circuit magnétique en série illustré à la figure 10.32.

- Calculer l'intensité  $I$  nécessaire pour que s'établisse un flux magnétique  $\Phi$  de  $4 \times 10^{-4} \text{ Wb}$ .
- Déterminer la perméabilité du matériau dans ces conditions.



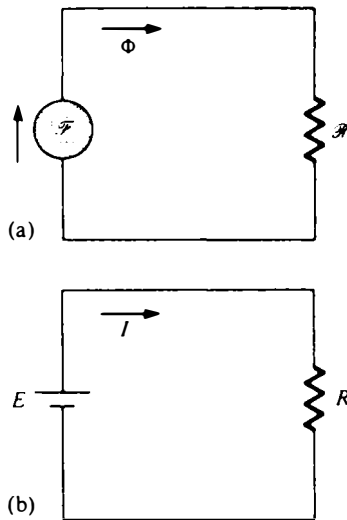


FIG. 10.33 (a) Circuit magnétique équivalent et (b) circuit électrique analogue.

Solution: Le circuit magnétique peut être représenté par le circuit illustré à la figure 10.33a. Le circuit électrique analogue est illustré à la figure 10.33b. Soulignons que des analogies de ce genre peuvent être extrêmement utiles dans la résolution des problèmes ayant trait aux circuits magnétiques. Le tableau 10.3 ci-dessous constitue la première étape de la résolution du problème.

TABLEAU 10.3

Section	Φ (Wb)	A (m <sup>2</sup> )	B (T)	H (A/m)	l (m)	HI (A)
Une section continue	4 × 10 <sup>-4</sup>	2 × 10 <sup>-3</sup>			0,16	

a. L'induction magnétique B est:

$$B = \frac{\Phi}{A} = \frac{4 \times 10^{-4}}{2 \times 10^{-3}} = 2 \times 10^{-1} = 0,2 \text{ T}$$

À l'aide des courbes B-H illustrées à la figure 10:22, il est possible de déterminer la force d'aimantation H:

$$H \text{ (acier moulé)} = 110 \text{ A/m}$$

La loi d'Ampère donne alors:

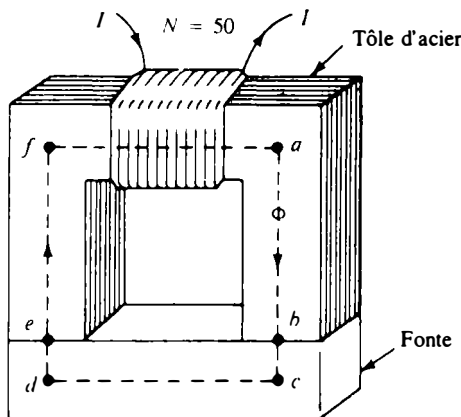
$$NI = HI$$

et:

$$I = \frac{HI}{N} = \frac{(110)(0,16)}{400} = 0,044 = 44 \text{ mA}$$

b. L'équation (10.10) permet d'autre part de calculer la perméabilité du matériau:

$$\mu = \frac{B}{H} = \frac{0,2}{110} = 1,818 \times 10^{-3} \text{ Wb/A}\cdot\text{m}$$



$l_{a,b} = l_{c,f} = 3,5 \text{ po}$   
 $l_{b,c} = l_{d,e} = 0,5 \text{ po}$   
 $l_{c,d} = l_{f,a} = 4 \text{ po}$   
 Aire (uniforme) = 1 po<sup>2</sup>  
 $\Phi = 3,5 \times 10^{-4} \text{ Wb}$

FIG. 10.34 Électro-aimant de l'exemple 10.6.

EXEMPLE 10.6 L'électro-aimant illustré à la figure 10.34 a attiré un morceau de fonte qui s'est collé à lui. Déterminer l'intensité I du courant nécessaire à l'établissement du flux indiqué.



*Solution:* Il nous faut d'abord exprimer toutes les dimensions à l'aide des unités SI pour qu'il nous soit possible d'utiliser les courbes des figures 10.20 et 10.21. Cela donne:

$$3.5 \mu\sigma \left[ \frac{1 \text{ m}}{39.37 \mu\sigma} \right] = 88.9 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$4 \mu\sigma \left[ \frac{1 \text{ m}}{39.37 \mu\sigma} \right] = 102 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$0.5 \mu\sigma \left[ \frac{1 \text{ m}}{39.37 \mu\sigma} \right] = 12.7 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$1 \mu\sigma^2 \left[ \frac{1 \text{ m}}{39.37 \mu\sigma} \right] \left[ \frac{1 \text{ m}}{39.37 \mu\sigma} \right] = 6.45 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

L'équivalent du circuit magnétique et son analogue électrique apparaissent à la figure 10.35. À noter qu'il s'agit toujours d'un montage en série malgré la présence de divers éléments.

Les données sont fournies au tableau 10.4.

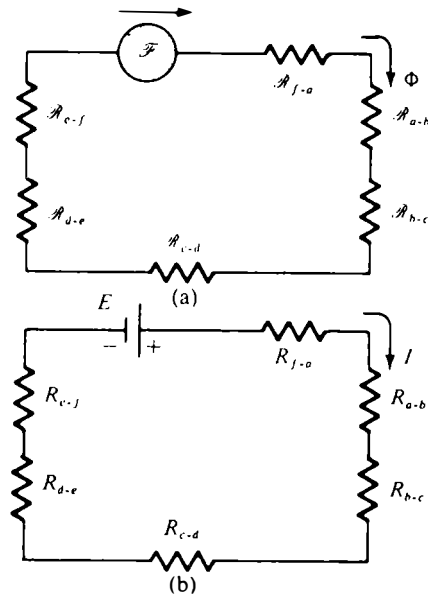


FIG. 10.35 (a) Circuit magnétique équivalent et (b) circuit électrique analogue de l'exemple 10.6.

TABLEAU 10.4

Section	Φ (Wb)	A (m <sup>2</sup> )	B (T)	H (A/m)	l (m)	HI (A)
a-b = e-f	3.5 × 10 <sup>-4</sup>	6.45 × 10 <sup>-4</sup>			88,9 × 10 <sup>-3</sup>	
c-d	3.5 × 10 <sup>-4</sup>	6.45 × 10 <sup>-4</sup>			102 × 10 <sup>-3</sup>	
b-c = d-e	3.5 × 10 <sup>-4</sup>	6.45 × 10 <sup>-4</sup>			12,7 × 10 <sup>-3</sup>	
f-a	3.5 × 10 <sup>-4</sup>	6.45 × 10 <sup>-4</sup>			102 × 10 <sup>-3</sup>	

Les données fournies dans l'énoncé du problème apparaissent déjà au tableau. Lorsque le problème sera résolu, chacun des espaces vides du tableau contiendra des données. Pour résoudre le problème, il nous faut remplir progressivement les espaces vides de chaque colonne, à partir de la gauche. Une fois une grandeur calculée, elle sera inscrite au tableau (voir le tableau 10.5).

L'induction magnétique pour chaque section est:

$$B = \frac{\Phi}{A} = \frac{3,5 \times 10^{-4}}{6,45 \times 10^{-4}} = 0,543 \text{ T}$$

La force d'aimantation est:

$$H \text{ (tôle d'acier, figure 10.22)}$$

$$H \text{ (fonte, figure 10.21)}$$

À noter l'écart considérable des forces d'aimantation nécessaires pour établir dans chaque matériau l'induction magnétique voulue. De fait, en appliquant la loi d'Ampère nous constaterons qu'il aurait été possible de ne pas tenir



compte de la section en tôle d'acier sans introduire d'erreur appréciable dans notre solution.

Déterminons maintenant  $Hl$  pour chaque section et inscrivons les résultats au tableau (le tableau résultant est donné ci-dessous). Cela donne:

$$H_{a-b}l_{a-b} = (60)(88,9 \times 10^{-3}) \\ = 5334 \times 10^{-3} = 5,334 \text{ A} = H_{e-f}l_{e-f}$$

$$H_{c-d}l_{c-d} = (1600)(102 \times 10^{-3}) = 163,2 \text{ A}$$

$$H_{b-c}l_{b-c} = (1600)(12,7 \times 10^{-3}) = 20,32 \text{ A} = H_{d-e}l_{d-e}$$

$$H_{f-a}l_{f-a} = (60)(102 \times 10^{-3}) = 6,12 \text{ A}$$

**TABLEAU 10.5**

Section	$\Phi$ (Wb)	$A$ (m <sup>2</sup> )	$B$ (T)	$H$ (A/m)	$l$ (m)	$Hl$ (A)
$a-b = e-f$	$3,5 \times 10^{-4}$	$6,45 \times 10^{-4}$	0,543	60	$88,9 \times 10^{-3}$	5,334
$c-d$	$3,5 \times 10^{-4}$	$6,45 \times 10^{-4}$	0,543	1600	$102 \times 10^{-3}$	163,2
$b-c = d-e$	$3,5 \times 10^{-4}$	$6,45 \times 10^{-4}$	0,543	1600	$12,7 \times 10^{-3}$	20,32
$f-a$	$3,5 \times 10^{-4}$	$6,45 \times 10^{-4}$	0,543	60	$102 \times 10^{-3}$	6,12

La loi d'Ampère donne:

$$NI = H_{a-b}l_{a-b} + H_{b-c}l_{b-c} + H_{c-d}l_{c-d} + H_{d-e}l_{d-e} \\ + H_{e-f}l_{e-f} + H_{f-a}l_{f-a}$$

Puisque:

$$H_{a-b}l_{a-b} = H_{e-f}l_{e-f}$$

et:

$$H_{b-c}l_{b-c} = H_{d-e}l_{d-e}$$

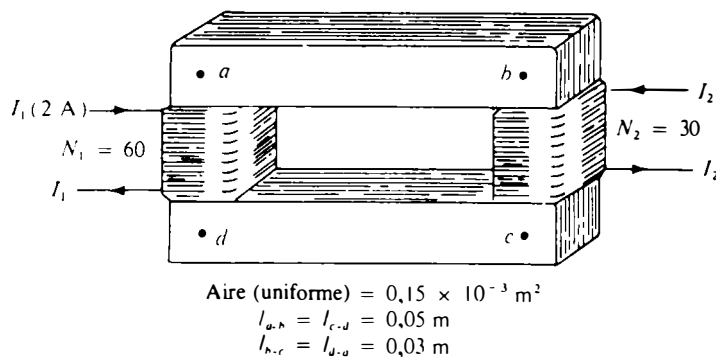
alors:

$$NI = 2(H_{a-b}l_{a-b}) + 2(H_{b-c}l_{b-c}) + H_{c-d}l_{c-d} + H_{f-a}l_{f-a} \\ = 2(5,334) + 2(20,32) + 163,2 + 6,12 \\ = 10,668 + 40,64 + 163,2 + 6,12$$

$$50I = 220,63$$

$$I = \frac{220,63}{50} = 4,41 \text{ A}$$

**EXEMPLE 10.7** Déterminer l'intensité  $I_2$  du courant secondaire du transformateur illustré à la figure 10.36, si le flux magnétique dans le noyau est de  $1,5 \times 10^{-5}$  Wb.



**FIG. 10.36** Transformateur de l'exemple 10.7.

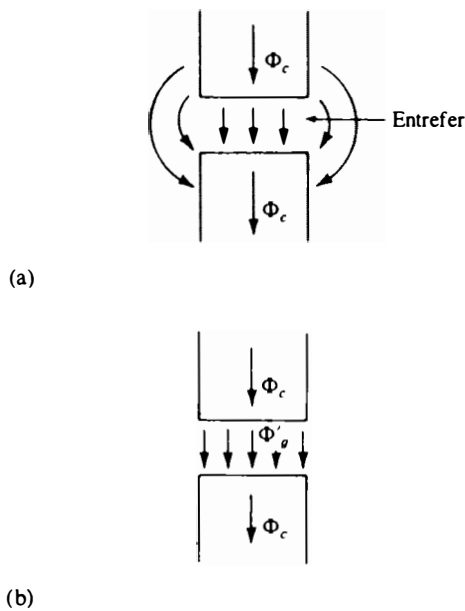


FIG. 10.38

trefer est la diffusion des lignes de force à l'extérieur du volume prolongeant le noyau; cet effet (voir la figure 10.38a) est appelé *effet des bords*. Nous négligeons toutefois cet effet dans notre étude et nous supposons donc que les lignes de force soient entièrement contenues dans le volume prolongeant le noyau comme l'illustre la figure 10.38b.

L'induction magnétique dans l'entrefer est alors donnée par l'équation:

$$B_e = \frac{\Phi_e}{A_e} \tag{10.17}$$

dans laquelle, aux fins de notre étude:

$$\Phi_e = \Phi_{noyau}$$

et:

$$A_e = A_{noyau}$$

Dans la plupart des applications, on suppose que la perméabilité de l'air soit égale à celle du vide. La force d'aimantation dans l'entrefer est alors déterminée par la relation:

$$H_e = \frac{B_e}{\mu_0} \tag{10.18}$$

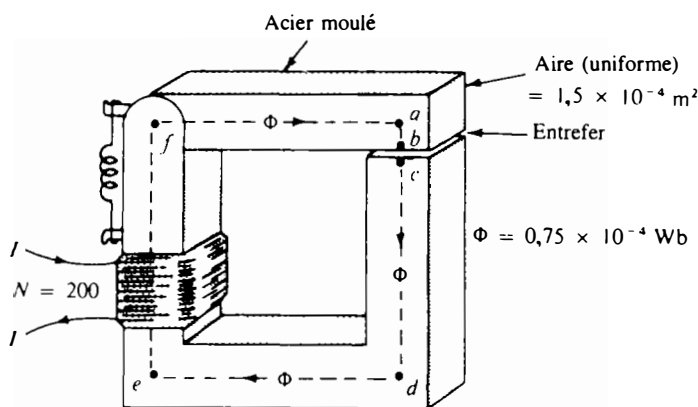
et la chute de la f.m.m. dans l'entrefer est égale à  $H_e l_e$ . La force d'aimantation  $H_e$  est donc:

$$H_e = \frac{B_e}{\mu_0} = \frac{B_e}{4\pi \times 10^{-7}}$$

et:

$$H_e = 7,97 \times 10^5 B_e \quad (\text{A/m}) \tag{10.19}$$

**EXEMPLE 10.8** Déterminer l'intensité  $I$  du courant nécessaire à l'établissement d'un flux magnétique  $\Phi = 0,75 \times 10^{-4}$  Wb dans le circuit magnétique en série illustré à la figure 10.39.



$$l_{a,b} = 3,4 \times 10^{-3} \text{ m} \quad l_{d,c} = l_{c,f} = l_{f,a} = 50 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$l_{b,c} = 1,6 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$l_{c,d} = 45 \times 10^{-3} \text{ m}$$

FIG. 10.39 Relais de l'exemple 10.8.



*Solution:* Il s'agit du premier exemple où il nous faut considérer deux forces d'aimantation. Dans l'analogie faite à la figure 10.37, on constate que le flux résultant d'une force s'oppose au flux de l'autre, comme l'indiquent les deux sources de f.é.m. opposées du circuit électrique analogue.

Les données obtenues de l'énoncé du problème apparaissent au tableau 10.6.

L'induction magnétique dans tout le circuit est:

$$B = \frac{\Phi}{A} = \frac{1,5 \times 10^{-5}}{0,15 \times 10^{-3}} = 10 \times 10^{-2} = 0,1 \text{ T}$$

et:

$$H \text{ (de l'équation 10.22)} \cong 7 \text{ A/m}$$

La loi d'Ampère donne:

$$\begin{aligned} N_1 I_1 - N_2 I_2 &= 2(H_{a-b} l_{a-b}) + 2(H_{b-c} l_{b-c}) \\ 60(2) - 30(I_2) &= 2(7)(0,05) + 2(7)(0,03) \\ 120 - 30I_2 &= 0,7 + 0,42 \end{aligned}$$

et:

$$30I_2 = 120 - 1,12$$

ou:

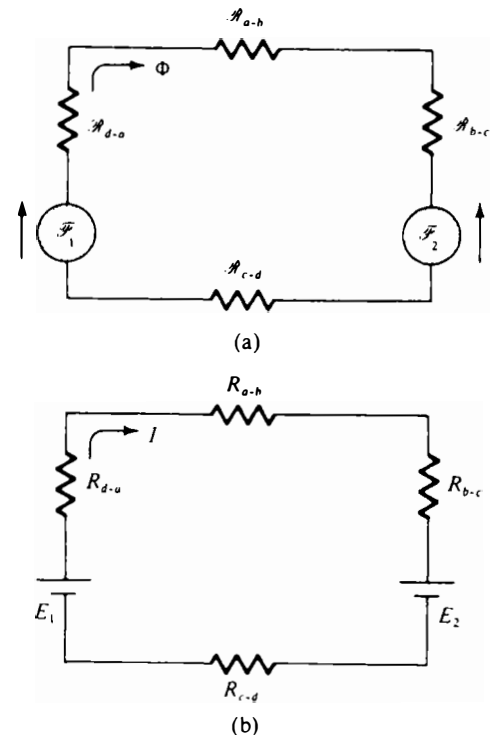
$$I_2 = \frac{118,88}{30} = 3,96 \text{ A}$$

L'équation  $N_1 I_1 = N_2 I_2$  est employée pour l'analyse de la plupart des systèmes transformateurs. Le résultat obtenu de cette équation aurait été de 4 A, en comparaison du résultat de 3,96 A obtenu ci-dessus. Habituellement, on ne tient pas compte de cette différence et on considère l'équation susmentionnée comme exacte.

En raison de la non-linéarité de la courbe  $B-H$ , il n'est pas possible d'appliquer le principe de superposition aux circuits magnétiques. Ainsi, dans l'exemple précédent, on ne peut pas déterminer les effets de chaque source indépendamment et ensuite en arriver à un effet global à l'aide du principe de superposition.

### 10.13 ENTREFERS

Voyons maintenant ce qui se passe lorsqu'un entrefer est présent dans un circuit magnétique (le circuit magnétique du moteur et de l'appareil de mesure illustrés à la figure 10.11 comprend un entrefer). Un des premiers effets causés par l'en-



**FIG. 10.37** (a) Circuit magnétique équivalent et (b) circuit électrique analogue du transformateur de la figure 10.36.

**TABLEAU 10.6**

Section	Φ (Wb)	A (m <sup>2</sup> )	B (T)	H (A/m)	l (m)	Hl (A)
a-b = c-d	1,5 × 10 <sup>-5</sup>	0,15 × 10 <sup>-3</sup>			0,05	
b-c = d-a	1,5 × 10 <sup>-5</sup>	0,15 × 10 <sup>-3</sup>			0,03	



*Solution:* Le circuit magnétique équivalent et son analogue électrique sont illustrés à la figure 10.40. Les données contenues dans l'énoncé du problème apparaissent au tableau 10.7.

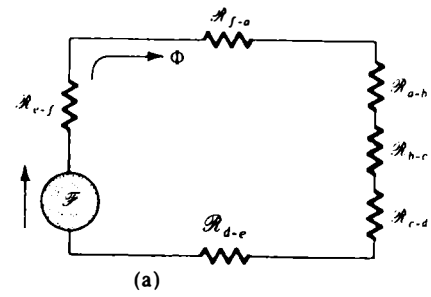
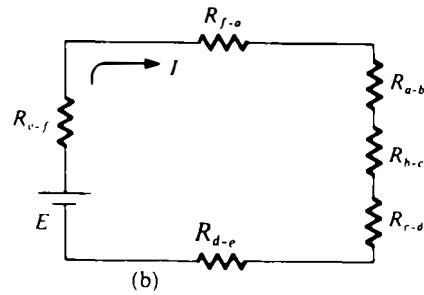


FIG. 10.40 (a) Circuit magnétique équivalent et (b) circuit électrique analogue du relais illustré à la figure

L'induction magnétique pour chaque section est:

$$B = \frac{\Phi}{A} = \frac{0,75 \times 10^{-4}}{1,5 \times 10^{-4}} = 0,5 \text{ T}$$

Les courbes  $B-H$  illustrées à la figure 10.22 permettent de déterminer  $H$ :

$$H \text{ (acier moulé)} \cong 280 \text{ A/m}$$

L'équation (10.19) donne:

$$H_e = 7,97 \times 10^5 B_e = 7,97 \times 10^5 (0,5) = 3,985 \times 10^5 \text{ A/m}$$

Les chutes de f.m.m. sont:

$$H_{a-b} l_{a-b} = (280)(3,4 \times 10^{-3}) = 0,9520 \text{ A}$$

$$H_{b-c} l_{b-c} = (3,985 \times 10^5)(1,6 \times 10^{-3}) = 637,60 \text{ A}$$

$$H_{c-d} l_{c-d} = (280)(45 \times 10^{-3}) = 12,60 \text{ A}$$

$$H_{d-e} l_{d-e} = H_{f-a} l_{f-a} = H_{e-f} l_{e-f} = (280)(50 \times 10^{-3}) = 14,0 \text{ A}$$

Ces résultats sont inscrits au tableau 10.7.

TABLEAU 10.7

Section	$\Phi$ (Wb)	$A$ (m <sup>2</sup> )	$B$ (T)	$H$ (A/m)	$l$ (m)	$HI$ (A)
$a-b$	$0,75 \times 10^{-4}$	$1,5 \times 10^{-4}$	0,5	280	$3,4 \times 10^{-3}$	0,9520
$b-c$	$0,75 \times 10^{-4}$	$1,5 \times 10^{-4}$	0,5	$3,985 \times 10^5$	$1,6 \times 10^{-3}$	637,60
$c-d$	$0,75 \times 10^{-4}$	$1,5 \times 10^{-4}$	0,5	280	$45 \times 10^{-3}$	12,60
$d-e = e-f$ $= f-a$	$0,75 \times 10^{-4}$	$1,5 \times 10^{-4}$	0,5	280	$50 \times 10^{-3}$	14,0

La loi d'Ampère donne:

$$NI = 3(H_{d-e} l_{d-e}) + H_{a-b} l_{a-b} + H_{b-c} l_{b-c} + H_{c-d} l_{c-d} = 3(14,0) + 0,9520 + 637,60 + 12,60$$

$$200I = 693,152$$

$$I = 3,466 \text{ A}$$

On constate au tableau que c'est dans l'entrefer que la f.m.m. ( $NI$ ) est la plus grande, et de beaucoup; cela s'explique par le fait que l'air est un matériau non magnétique.



### 10.14 CIRCUITS MAGNÉTIQUES SÉRIE-PARALLÈLE

L'étroite analogie qui existe entre les circuits électriques et magnétiques nous amène maintenant à considérer les circuits magnétiques série-parallèle comme semblables à de nombreux égards aux circuits électriques étudiés au chapitre 6. Dans la présente section, nous allons faire appel dans toute sa puissance à la méthode des tableaux. Sans elle, il serait extrêmement difficile de savoir à tout instant quelles grandeurs sont connues et lesquelles sont encore à déterminer.

**EXEMPLE 10.9** Déterminer l'intensité  $I$  du courant nécessaire à l'établissement d'un flux de  $4 \times 10^{-4}$  Wb dans le noyau illustré à la figure 10.41.

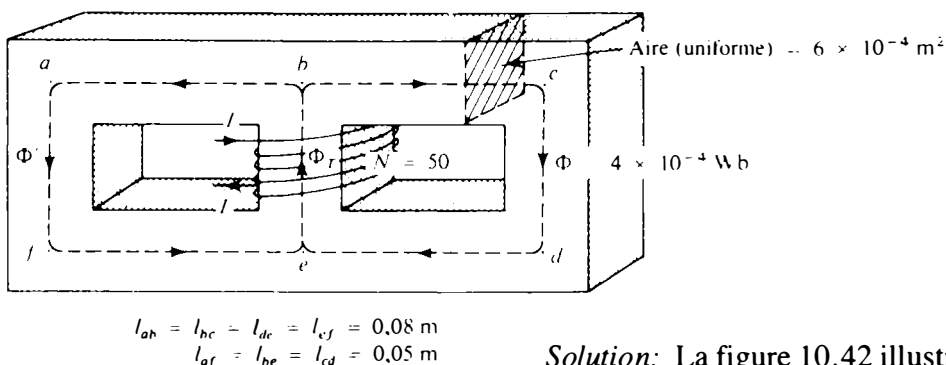


FIG. 10.41

*Solution:* La figure 10.42 illustre le circuit magnétique équivalent et son analogue électrique.

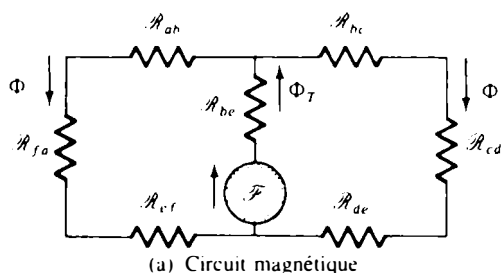
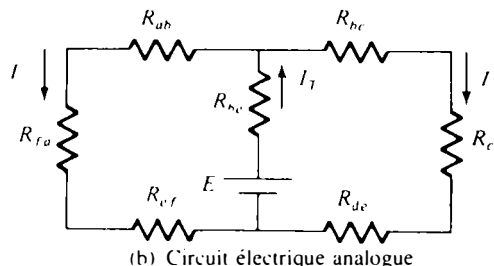


FIG. 10.42



Par symétrie, on a:

$$\Phi' = \Phi = 4 \times 10^{-4} \text{ Wb}$$

et:

$$\Phi_T = \Phi' + \Phi = 2\Phi = 8 \times 10^{-4} \text{ Wb}$$

On peut écrire pour chacune des branches extérieures:

$$B = \frac{\Phi}{A} = \frac{4 \times 10^{-4}}{6 \times 10^{-4}} = 0,667 \text{ T}$$

et pour la branche centrale:

$$B = \frac{\Phi}{A} = \frac{8 \times 10^{-4}}{6 \times 10^{-4}} = 1,333 \text{ T}$$



Les résultats obtenus apparaissent au tableau 10.8.

TABLEAU 10.8

Section	$\Phi$ (Wb)	$A$ (m <sup>2</sup> )	$B$ (T)	$H$	$l$ (m)	$HI$
<i>bcd</i> ou <i>efab</i>	$4 \times 10^{-4}$	$6 \times 10^{-4}$	0,667		0,21	
<i>b-e</i>	$8 \times 10^{-4}$	$6 \times 10^{-4}$	1,333		0,05	

À l'aide de la figure 10.21, nous pouvons écrire:

$$H_{bcde} \cong 100 \text{ A/m}$$

$$H_{be} \cong 650 \text{ A/m}$$

Avant d'appliquer la loi d'Ampère, considérons le circuit électrique analogue illustré à la figure 10.42. L'application de la loi des tensions à la boucle droite donne:

$$E - I_T R_{be} - I(R_{bc} + R_{cd} + R_{de}) = 0$$

ou:

$$E - I_T R_{be} - I(R_{bcde}) = 0$$

L'application de la loi d'Ampère au circuit magnétique donne un résultat extrêmement semblable:

$$NI - H_{be}l_{be} - H_{bcde}l_{bcde} = 0$$

Au besoin, nous pouvons donc faire appel au circuit électrique analogue pour déterminer la forme de l'équation à établir au moyen de la loi d'Ampère.

Par substitution, nous obtenons:

$$NI = +H_{be}l_{be} + H_{bcde}l_{bcde} = (650)(0,05) + (100)(0,21)$$

ou:

$$50I = 32,50 + 21,0 = 53,50$$

et:

$$I = \frac{53,50}{50} = 1,070 \text{ A}$$

**EXEMPLE 10.10** Voir le circuit magnétique série-parallèle illustré à la figure 10.43. Déterminer l'intensité  $I$  du courant nécessaire à l'établissement d'un flux  $\Phi_e$  de  $2 \times 10^{-4}$  Wb dans l'entrefer.

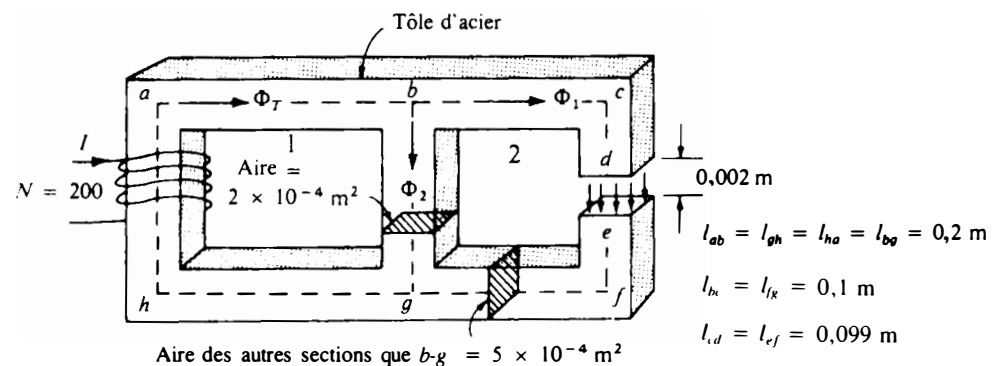


FIG. 10.43





savons tout ce qu'il nous faut savoir au sujet de la section  $bcdefg$ . Il nous faut dès lors considérer les autres parties du circuit magnétique.

L'application de la loi d'Ampère à la boucle 2 (voir la figure 10.43) permet de déterminer le flux  $\Phi_2$ ; en effet:

$$\sum_{\circlearrowleft} \mathcal{F} = 0$$

de sorte que:

$$H_{bc}l_{bc} + H_{cd}l_{cd} + H_e l_e + H_{ef}l_{ef} + H_{fg}l_{fg} - H_{gb}l_{gb} = 0$$

À noter le signe moins dont est affecté le terme  $H_{gb}l_{gb}$ , en raison du sens du flux  $\Phi_2$ . (Il est instructif de comparer cette équation à celle qui a été obtenue pour la boucle 2 du circuit électrique analogue.)

Par substitution des termes connus on a:

$$5,5 + 5,445 + 637,60 + 5,445 + 5,50 - H_{gb}l_{gb} = 0$$

et:

$$H_{gb}l_{gb} = 659,49$$

ou:

$$H_{gb} = \frac{659,49}{0,2} = 3297,45 \text{ A/m}$$

Les courbes  $B$ - $H$  donnent:

$$B_{gb} = 1,55 \text{ T}$$

et:

$$\Phi_2 = B_{gb}A = 1,55(2 \times 10^{-4}) = 3,10 \times 10^{-4} \text{ Wb.}$$

Par substitution des valeurs de  $\Phi_1$  et de  $\Phi_2$  dans l'équation,

$$\begin{aligned} \text{on a: } \Phi_T &= \Phi_1 + \Phi_2 \\ \Phi_T &= 2 \times 10^{-4} + 3,10 \times 10^{-4} \\ \Phi_T &= 5,10 \times 10^{-4} \text{ Wb} = \Phi_{ab} = \Phi_{ha} = \Phi_{gh} \end{aligned}$$

Les résultats obtenus nous permettent maintenant de remplir les espaces repérés par deux crochets dans le tableau. Les étapes qui suivent devraient être évidentes:

$$B_{ab} = B_{ha} = B_{gh} = \frac{\Phi_T}{A} = \frac{5,10 \times 10^{-4}}{5 \times 10^{-4}} = 1,020 \text{ T}$$

Les courbes  $B$ - $H$  donnent:

$$H_{ab} = H_{ha} = H_{gh} = 160 \text{ A/m}$$

et les chutes de la f.m.m. sont:

$$H_{ab}l_{ab} = (160)(0,2) = 32,0 \text{ A}$$

$$H_{ha}l_{ha} = (160)(0,2) = 32,0 \text{ A}$$

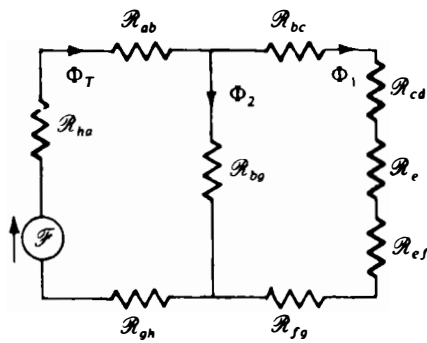
$$H_{gh}l_{gh} = (160)(0,2) = 32,0 \text{ A}$$

résultats qui permettent de parachever le tableau.

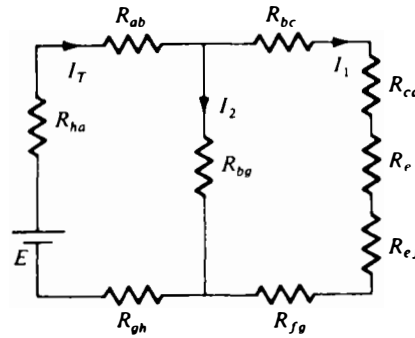
Appliquons maintenant la loi d'Ampère à la boucle 1; nous avons:



*Solution:* La figure 10.44 illustre le circuit magnétique équivalent et le circuit électrique analogue. Les données apparaissent au tableau 10.9.



(a) Circuit magnétique



(b) Circuit électrique analogue

FIG. 10.44

TABLEAU 10.9

Section	$\Phi$ (Wb)	$A$ (m <sup>2</sup> )	$B$ (T)	$H$	$l$ (m)	$Hl$
<i>a-b, g-h</i>	✓✓	$5 \times 10^{-4}$			0,2	
<i>b-c, f-g</i>	$2 \times 10^{-4}$	$5 \times 10^{-4}$	✓	✓	0,1	✓
<i>c-d, e-f</i>	$2 \times 10^{-4}$	$5 \times 10^{-4}$	✓	✓	0,099	✓
<i>a-h</i>	✓✓	$5 \times 10^{-4}$			0,2	
<i>b-g</i>	✓✓	$2 \times 10^{-4}$	✓✓	✓✓	0,2	✓✓
<i>d-e</i>	$2 \times 10^{-4}$	$5 \times 10^{-4}$	✓	✓	0,002	✓

Les inductions magnétiques sont:

$$B_{bc} = B_{cd} = B_e = B_{ef} = B_{fg} = \frac{\Phi}{A} = \frac{2 \times 10^{-4}}{5 \times 10^{-5}} = 0,4 \text{ T}$$

Dans l'entrefer:

$$H_e = (7,97 \times 10^5)(0,4) = 3,188 \times 10^5 \text{ A/m}$$

et:

$$H_e l_e = (3,188 \times 10^5)(0,002) = 6,376 \times 10^2 = 637,60 \text{ A}$$

Les courbes  $B$ - $H$  illustrées à la figure 10.22 nous permettent de déterminer la force d'aimantation  $H$  et les chutes de la f.m.m. pour les sections suivantes:

$$H_{bc} = H_{cd} = H_{ef} = H_{fg} = 55 \text{ A/m}$$

et:

$$H_{bc} l_{bc} = H_{fg} l_{fg} = (55)(0,1) = 5,50 \text{ A}$$

$$H_{cd} l_{cd} = H_{ef} l_{ef} = (55)(0,099) = 5,445 \text{ A}$$

Les résultats obtenus jusqu'à maintenant nous permettent de remplir les espaces repérés par un seul crochet dans le tableau 10.9. Ce dernier nous montre maintenant que nous



$$\sum \oint \mathcal{F} = 0$$

$$NI = H_{ab}l_{ab} + H_{bg}l_{bg} + H_{gh}l_{gh} + H_{ah}l_{ah}$$

La substitution des valeurs connues donne:

$$200I = 32,0 + 659,49 + 32,0 + 32,0$$

$$200I = 755,49$$

$$I \cong 3,780 \text{ A}$$

La marche à suivre pour le circuit magnétique série-parallèle illustré à la figure 10.45 est semblable; elle compte toutefois moins d'étapes en raison de l'absence d'un entrefer.

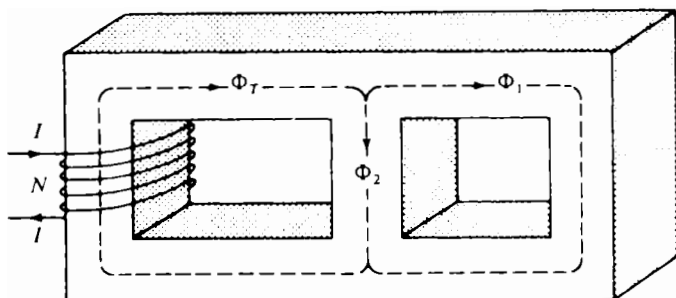


FIG. 10.45

## 10.15 DÉTERMINATION DE $\Phi$

Les problèmes donnés en exemple dans la présente section appartiennent au second type:  $NI$  est connu et il s'agit de déterminer le flux  $\Phi$ . La solution est relativement directe si le circuit magnétique ne compte qu'une seule section, comme c'est le cas pour un tore. On a alors:

$$H = \frac{NI}{l} \quad H \rightarrow B \text{ (courbe } B-H\text{)}$$

et:

$$\Phi = BA$$

Il n'existe toutefois aucune marche à suivre conduisant infailliblement à la solution si le circuit compte plus d'une section. On peut néanmoins tenter de procéder de la façon suivante. D'abord, on estime d'expérience la valeur du flux  $\Phi$  et on calcule la f.m.m. correspondant à ce flux. La f.m.m. calculée est alors comparée à la f.m.m. réelle du circuit, cette comparaison permettant de rajuster le tir et d'attribuer au flux  $\Phi$  une valeur s'approchant mieux de sa valeur réelle. Dans la plupart des applications, on estime que le résultat est satisfaisant si la valeur du flux ou de la f.m.m. ( $NI$ ) s'approchent à 5% près de leur valeur réelle.

Un des premiers éléments dont on tient compte pour estimer la valeur de  $\Phi$  est le fait que la chute maximale de la f.m.m. se fait dans la section constituée du matériau de perméabilité la plus petite, si la longueur et l'aire des sections de matériaux différents sont les mêmes. Ainsi, comme nous l'avons vu à l'exemple 10.8, dans un circuit magnétique à entrefer



la chute de la f.m.m. est la plus grande dans l'entrefer. Nous allons donc supposer pour résoudre les problèmes de ce type que la f.m.m. totale ( $NI$ ) apparaît uniquement dans la section de plus petite  $\mu$  ou de plus grande  $\mathcal{R}$  (si toutefois les autres sections sont de dimensions presque égales). Cette supposition conduit à une valeur du flux  $\Phi$  pour laquelle la  $NI$  calculée est plus grande que sa valeur réelle. Aussi, une fois les résultats en mains, nous réduisons les valeurs de  $\Phi$  et de  $NI$  pour tenir compte des effets (réductance) des autres sections du circuit magnétique.

**EXEMPLE 10.11** Calculer le flux magnétique  $\Phi$  pour le circuit magnétique illustré à la figure 10.46.

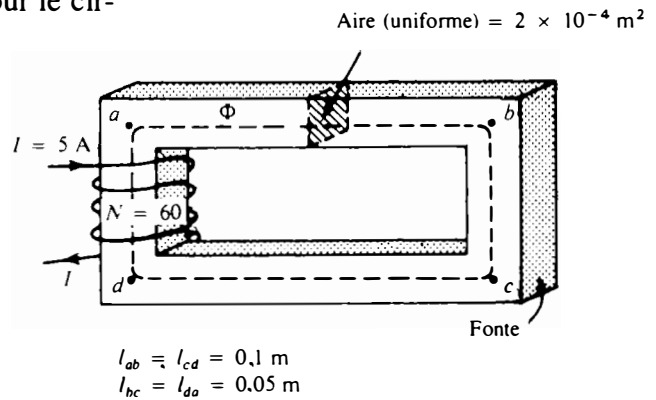


FIG. 10.46

*Solution:* La loi d'Ampère donne:

$$NI = H_{abcd}l_{abcd}$$

ou:

$$H_{abcd} = \frac{NI}{l_{abcd}} = \frac{(60)(5)}{(0,1 + 0,05 + 0,1 + 0,05)}$$

$$= \frac{300}{0,3} = 1000 \text{ A/m}$$

et:

$$B_{abcd} \text{ (de la figure 10.21)} \cong 0,38 \text{ T}$$

Puisque  $B = \Phi/A$ , on a

$$\Phi = BA = (0,38)(2 \times 10^{-4}) = \mathbf{0,760 \times 10^{-4} \text{ Wb}}$$

**EXEMPLE 10.12** Calculer le flux magnétique  $\Phi$  pour le circuit magnétique série illustré à la figure 10.47.

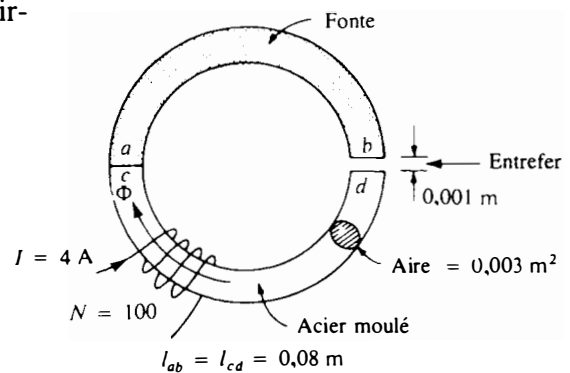


FIG. 10.47



*Solution:* Supposons pour commencer que la f.m.m. totale appliquée ( $NI$ ) apparaît entièrement dans l'entrefer; nous avons alors:

$$NI = H_e l_e$$

ou:

$$H_e = \frac{NI}{l_e} = \frac{400}{0,001} = 4 \times 10^5 \text{ A/m}$$

et:

$$\begin{aligned} B_e &= \mu_0 H_e = (4\pi \times 10^{-7})(4 \times 10^5) \\ &= 50,265 \times 10^{-2} \text{ T} \end{aligned}$$

Le flux est donc:

$$\begin{aligned} \Phi_e &= \Phi_{\text{noyau}} = B_e A \\ &= (50,265 \times 10^{-2})(0,003) \\ \Phi_{\text{noyau}} &= 150,795 \times 10^{-5} \text{ Wb} \end{aligned}$$

On calcule ensuite  $NI$  à partir de cette valeur de  $\Phi$ . L'ensemble des résultats de cette première étape de la solution apparaît au tableau 10.10.

**TABLEAU 10.10**

Section	$\Phi$ (Wb)	$A$ (m <sup>2</sup> )	$B$ (T)	$H$ (A/m)	$l$ (m)	$HI$ (A)
<i>a-b</i>	$150,795 \times 10^{-5}$	0,003	$50,265 \times 10^{-2}$	1500 (courbe $B-H$ )	0,08	
Entrefer	$150,795 \times 10^{-5}$	0,003	$50,265 \times 10^{-2}$	$4 \times 10^5$	0,001	400
<i>d-c</i>	$150,795 \times 10^{-5}$	0,003	$50,265 \times 10^{-2}$	260 (courbe $B-H$ )	0,08	

$$H_{ab} l_{ab} = (1500)(0,08) = 120 \text{ A}$$

$$H_{dc} l_{dc} = (260)(0,08) = 20,8 \text{ A}$$

La loi d'Ampère donne:

$$\begin{aligned} NI &= H_{ab} l_{ab} + H_e l_e + H_{dc} l_{dc} \\ &= 120 + 400 + 20,8 \\ NI &= 540,8 > 400,0 \end{aligned}$$

Étant donné que nous avons négligé la réluctance de tous les trajets magnétiques, exception faite de l'entrefer, la valeur calculée est plus grande que la valeur réelle. Nous devons par conséquent réduire cette valeur pour tenir compte de l'effet de la réluctance des autres trajets. Notre résultat étant d'environ 26% [ $(540,8 - 400,0)/540,8 = 140,8/540,8$ ] supérieur à la valeur réelle, réduisons le flux  $\Phi$  de 26%, et voyons à quel point la f.m.m. correspondant à la nouvelle valeur du flux s'approche de la f.m.m. réelle:

$$(0,26)(150,795 \times 10^{-5}) = 39,207 \times 10^{-5}$$

$$\begin{aligned} &150,795 \times 10^{-5} \\ &\underline{- 39,207 \times 10^{-5}} \\ \Phi &= 111,588 \times 10^{-5} \text{ Wb} \end{aligned}$$



Cette valeur est portée au tableau 10.11.

**TABLEAU 10.11**

Section	$\Phi$ (Wb)	$A$ (m <sup>2</sup> )	$B$	$H$	$l$ (m)	$HI$
<i>a-b</i>	$111,588 \times 10^{-5}$	0,003			0,08	
Entrefer	$111,588 \times 10^{-5}$	0,003			0,001	
<i>d-c</i>	$111,588 \times 10^{-5}$	0,003			0,08	

$$B = \frac{\Phi}{A} = \frac{111,588 \times 10^{-5}}{0,003} = 37,196 \times 10^{-2} \text{ T}$$

$$\begin{aligned} H_g l_g &= 7,97 \times 10^5 B_g l_g \\ &= (7,97 \times 10^5)(37,196 \times 10^{-2})(0,001) \\ &\cong 297,45 \text{ A} \end{aligned}$$

Les courbes  $B-H$  donnent:

$$H_{ab} \cong 840 \text{ A/m}$$

$$H_{dc} \cong 210 \text{ A/m}$$

$$H_{ab} l_{ab} = (840)(0,08) = 67,2 \text{ A}$$

$$H_{dc} l_{dc} = (210)(0,08) = 16,8 \text{ A}$$

La loi d'Ampère permet par ailleurs d'écrire:

$$\begin{aligned} NI &= H_{ab} l_{ab} + H_e l_e + H_{dc} l_{dc} \\ &= 67,20 + 297,45 + 16,80 \end{aligned}$$

$$NI = 381,45 < 400 \text{ (concordance à 5\% près; le résultat est donc acceptable)}$$

## PROBLÈMES

### Section 10.3

- À l'aide de l'annexe F, remplissez les espaces vides du tableau ci-dessous. Indiquez les unités de chaque grandeur.

Système	$\Phi$	$B$
SI	$5 \times 10^{-4} \text{ Wb}$	$8 \times 10^{-4} \text{ T}$
CGS	—	—
Anglo-saxon	—	—

- Faire de même pour le tableau ci-dessous (aire = 2 po<sup>2</sup>).

Système	$\Phi$	$B$
SI	—	—
CGS	60 000 Mx	—
Anglo-saxon	—	—

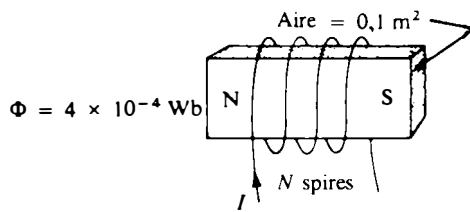


FIG. 10.48

3. Voir l'électro-aimant illustré à la figure 10.48.
  - a. Calculez l'induction dans le noyau.
  - b. Dessinez le spectre des lignes de force en indiquant leur sens.
  - c. Repérez les pôles nord et sud de l'aimant.

## Section 10.5

4. Lequel des barreaux illustrés à la figure 10.49 offre la plus grande réluctance à l'établissement de lignes de force dans la direction de sa longueur?

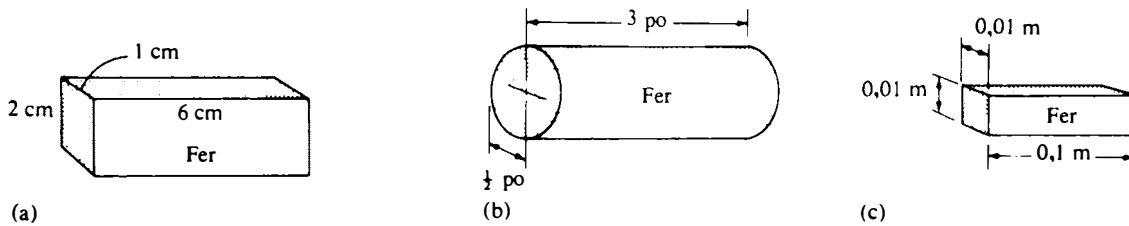


FIG. 10.49

## Section 10.6

5. Calculez la réluctance d'un circuit magnétique dans lequel une f.m.m. de 400 A engendre un flux  $\Phi$  de  $4,2 \times 10^{-4} \text{ Wb}$ .
6. Calculez la réluctance d'un circuit magnétique dans lequel une f.m.m. de 120 gilberts engendre un flux  $\Phi$  de 72 000 Mx.

## Section 10.7

7. Calculez la force d'aimantation  $H$  en unités SI du circuit magnétique présenté au problème 5, sachant que la longueur de ce dernier est de 6 po.
8. L'application d'une force d'aimantation de 600 A/m à un circuit magnétique y crée une induction  $B$  de  $1200 \times 10^{-4} \text{ T}$ . Calculez la perméabilité  $\mu$  du matériau qui produirait une induction double pour la même force d'aimantation.

## Section 10.9

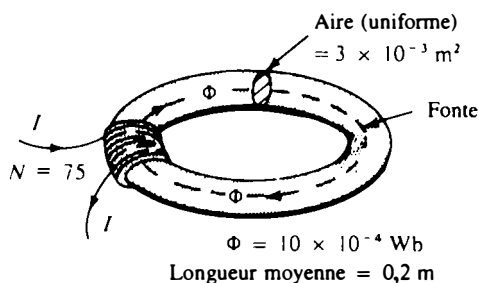


FIG. 10.50

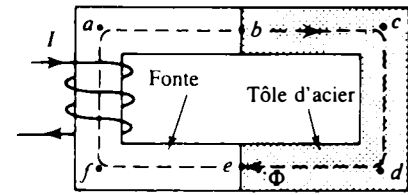
9. Pour la tôle d'acier (voir les figures 10.21 et 10.22), déterminez:
  - a.  $\mu_r$  à  $B = 0,8 \text{ T}$ ;
  - b.  $\mu_\Delta$  dans la région de  $B = 0,8 \text{ T}$ ;
  - c.  $\mu_m$ .
10. Pour la fonte (voir les figures 10.21 et 10.22), déterminez:
  - a.  $\mu_r$  à  $B = 0,2 \text{ T}$ ;
  - b.  $\mu_\Delta$  dans la région de  $B = 0,2 \text{ T}$ ;
  - c.  $\mu_m$  (l'inflexion n'est pas bien nette; il faut choisir le segment de droite qui semble le mieux représenter la courbe en-deçà de la région de saturation).



Pour résoudre les problèmes qui suivent, utilisez les courbes  $B-H$  illustrées aux figures 10.21 et 10.22.

**Section 10.12**

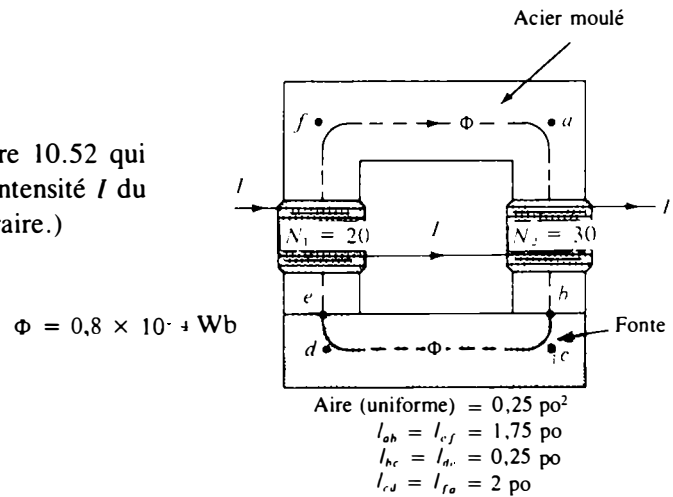
11. Voir le circuit magnétique série illustré à la figure 10.50. Calculez l'intensité  $I$  du courant nécessaire à l'établissement du flux indiqué.
12. Calculez l'intensité du courant nécessaire à l'établissement d'un flux  $\Phi$  de  $3 \times 10^{-4}$  Wb dans le circuit magnétique série illustré à la figure 10.51.



$l_{ab} = l_{bc} = l_{cd} = l_{de} = l_{ef} = l_{fa} = 0,1$  m  
 Aire (uniforme) =  $5 \times 10^{-4}$  m<sup>2</sup>  
 $N = 100$  spires

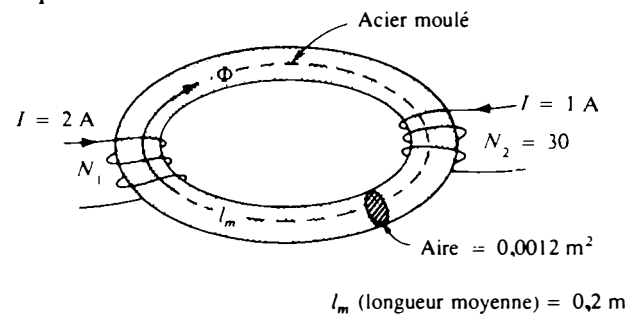
**FIG. 10.51**

13. Voir le circuit magnétique série illustré à la figure 10.52 qui comporte deux sources de f.m.m. Déterminez l'intensité  $I$  du courant. (Chaque source établit un flux de sens horaire.)



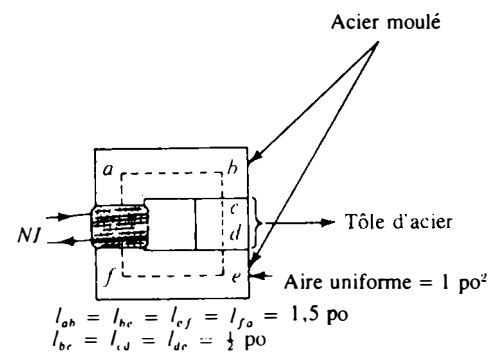
**FIG. 10.52**

14. a. Calculez le nombre  $N$  de spires qu'il faut pour qu'un flux  $\Phi$  de  $12 \times 10^{-4}$  Wb s'établisse dans le circuit magnétique illustré à la figure 10.53.
- b. Calculez la perméabilité  $\mu$  du matériau.



**FIG. 10.53**

15. a. Calculez la f.m.m. ( $NI$ ) nécessaire à l'établissement d'un flux  $\Phi$  de 80 000 lignes dans le circuit magnétique illustré à la figure 10.54.
- b. Calculez la perméabilité  $\mu$  des deux matériaux.



**FIG. 10.54**



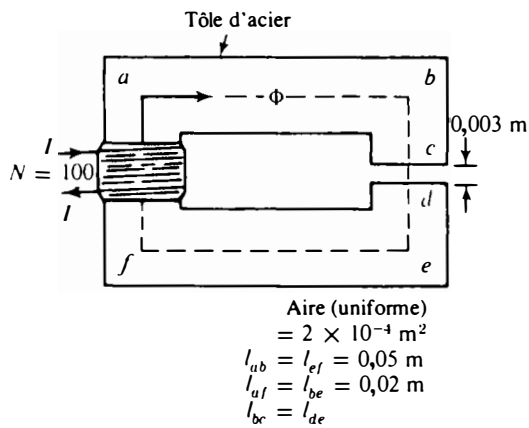


FIG. 10.55

Section 10.13

16. a. Calculez l'intensité  $I$  du courant nécessaire à l'établissement d'un flux  $\Phi$  de  $2,4 \times 10^{-4} \text{ Wb}$  dans le circuit magnétique illustré à la figure 10.55.
- b. Comparez la chute de la f.m.m. dans l'entrefer à celle qui se produit dans le reste du circuit. Analysez les résultats de cette comparaison en termes de la perméabilité  $\mu$  de chaque matériau.

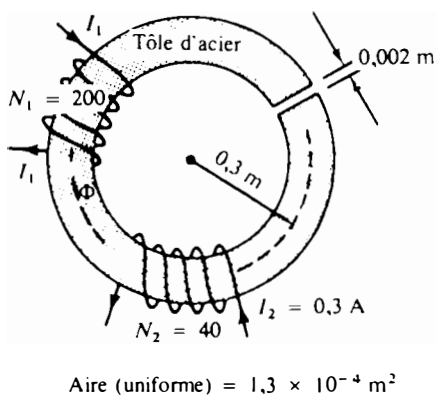


FIG. 10.56

17. Calculez l'intensité  $I$  du courant nécessaire à l'établissement d'un flux  $\Phi$  de  $2 \times 10^{-4} \text{ Wb}$  dans le circuit magnétique illustré à la figure 10.56.

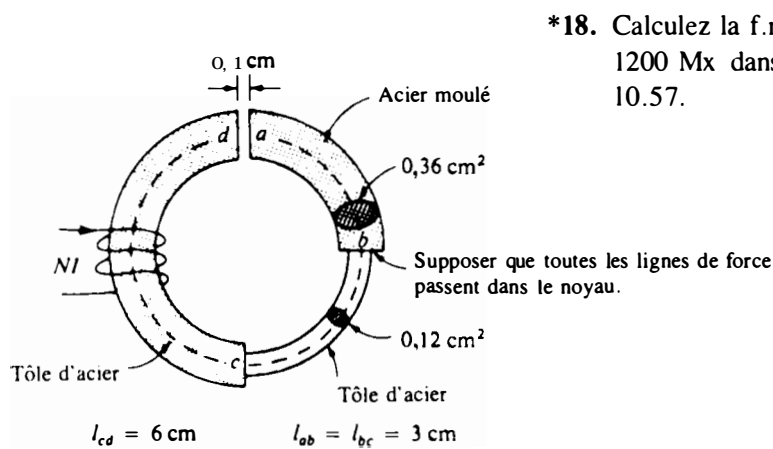


FIG. 10.57

- \*18. Calculez la f.m.m. nécessaire à l'établissement d'un flux  $\Phi$  de  $1200 \text{ Mx}$  dans le circuit magnétique série illustré à la figure 10.57.



- \*19. a. Sachant que le flux  $\Phi$  dans le relais illustré à la figure 10.58 est de  $0,3 \times 10^{-4}$  Wb, calculez l'intensité du courant parcourant la bobine.
- b. La force exercée sur l'armature est déterminée par la relation:

$$F \text{ (newtons)} = \frac{1}{2} \times \frac{B_e^2 A}{\mu_o}$$

dans laquelle  $B_e$  est l'induction dans l'entrefer et  $A$ , l'aire de l'entrefer. Calculez à l'aide de cette relation la force exercée lorsque le flux de la partie (a) est établi dans le circuit.

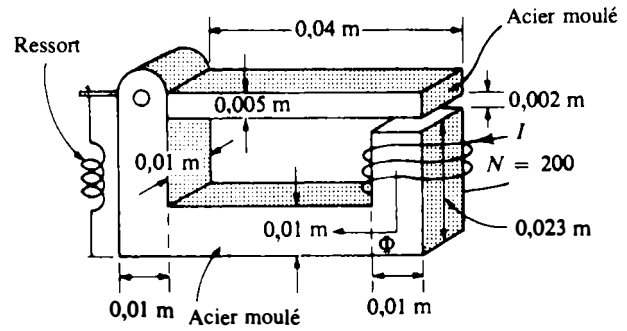


FIG. 10.58

Section 10.14

- \*20. Calculez l'intensité  $I$  du courant nécessaire à l'établissement d'un flux  $\Phi$  de  $20 \times 10^{-4}$  Wb dans l'entrefer du circuit magnétique série-parallèle illustré à la figure 10.59.

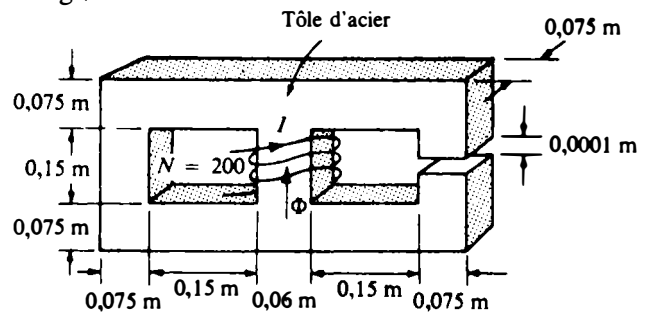


FIG. 10.59

- \*21. Calculez l'intensité  $I$  du courant nécessaire à l'établissement d'un flux  $\Phi$  de 7500 lignes dans l'entrefer du circuit magnétique série-parallèle illustré à la figure 10.60.

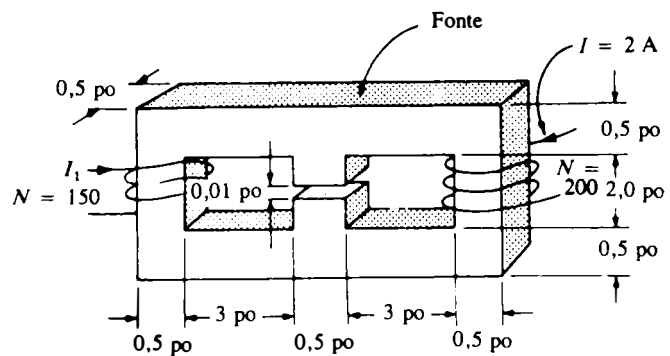


FIG. 10.60



## Section 10.15

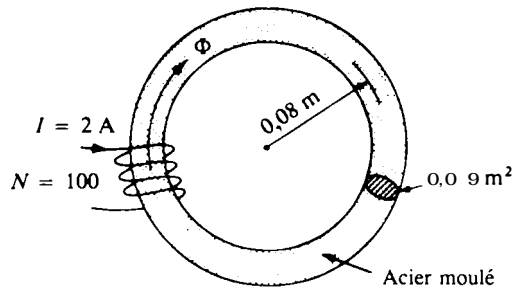


FIG. 10.61

22. Calculez le flux  $\Phi$  établi dans le circuit magnétique série illustré à la figure 10.61.

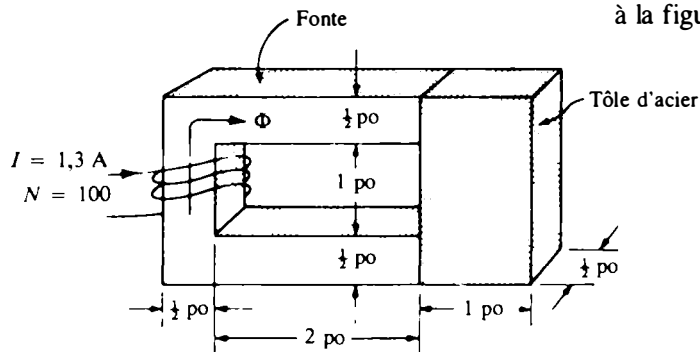


FIG. 10.62

23. Calculez le flux  $\Phi$  établi dans le circuit magnétique série illustré à la figure 10.62.

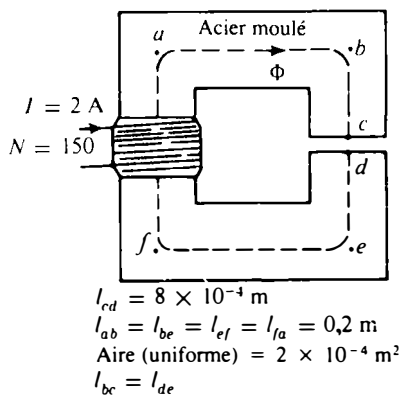


FIG. 10.63

\*24. Calculez le flux  $\Phi$  établi dans le circuit magnétique série illustré à la figure 10.63.

## GLOSSAIRE

**Aimant permanent** Matériau tel que l'acier qui demeure longtemps aimanté sans l'aide d'une force d'aimantation.

**Domaine** Groupe d'atomes possédant le même alignement magnétique.

**Électromagnétisme** Effets magnétiques produits par le passage d'un courant.

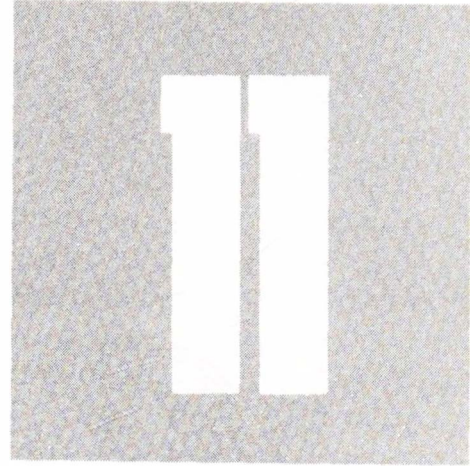
**Ferrite** Matériau ferromagnétique constitué d'un mélange d'oxydes métalliques, dont le cycle d'hystérésis est « carré ».



- Force d'aimantation ( $H$ )** Mesure de la force magnétomotrice par unité de longueur d'un circuit magnétique.
- Force magnétomotrice (f.m.m.,  $\mathcal{F}$ )** Effet de retard entre l'induction magnétique dans un matériau et la force d'aimantation appliquée.
- Induction ( $B$ )** Mesure du flux magnétique par aire unitaire perpendiculaire à celui-ci. Elle s'exprime en teslas.
- Lignes de force magnétique** Lignes imaginaires indiquant l'intensité et le sens du champ magnétique.
- Loi d'Ampère** Loi qui énonce que la somme algébrique des élévations et des chutes de la f.m.m. est nulle le long d'un trajet fermé dans un circuit magnétique.
- Matériaux diamagnétiques** Matériaux dont la perméabilité est légèrement inférieure à celle du vide.
- Matériaux ferromagnétiques** Matériaux dont la perméabilité est des centaines ou des milliers de fois supérieure à celle du vide.
- Matériaux paramagnétiques** Matériaux dont la perméabilité est légèrement supérieure à celle du vide.
- Perméabilité ( $\mu$ )** Mesure de la facilité avec laquelle un flux magnétique peut être établi dans un matériau. Elle s'exprime en webers par ampèremètre.
- Perméabilité différentielle ( $\mu_{\Delta}$ )** Perméabilité définie par de petites variations de l'induction.
- Perméabilité moyenne ( $\mu_m$ )** Perméabilité donnant une indication approximative de la perméabilité entre l'induction nulle et l'induction tout juste inférieure à l'induction de saturation.
- Perméabilité relative ( $\mu_r$ )** Rapport de la perméabilité d'un matériau sur celle du vide.
- Perméabilité statique ( $\mu_s$ )** Perméabilité mesurée à un point particulier de la courbe d'aimantation normale.
- Rélectance ( $\mathcal{R}$ )** Grandeur déterminée par les caractéristiques d'un matériau indiquant l'opposition qu'offre celui-ci à l'établissement du flux magnétique ( $H^{-1}$ ).



# BOBINES



## 11.1 INTRODUCTION

Voilà donc terminée notre étude de la résistance et du condensateur. Dans le présent chapitre, nous nous pencherons sur un troisième élément, la *bobine*, dont certaines caractéristiques de réponse sont semblables, à de nombreux égards, à celles du condensateur. De fait, le développement de certaines sections du chapitre est parallèle à celui des sections portant sur le condensateur, afin que soit bien mise en évidence la similitude entre les deux éléments.

## 11.2 INDUCTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE: LOI DE FARADAY

Lorsqu'un conducteur est déplacé dans un champ magnétique de telle sorte qu'il en coupe des lignes de force, une tension apparaît à ses extrémités, comme l'illustre la figure 11.1. Plus grand est le nombre de lignes de force coupées par unité

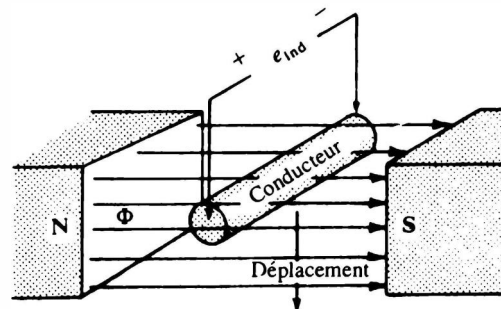
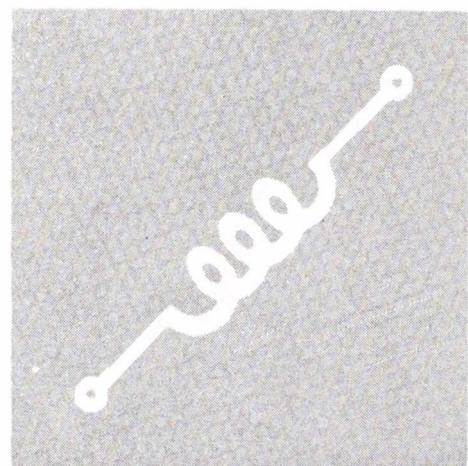


FIG. 11.1





de temps (accroissement de la vitesse de déplacement du conducteur dans le champ), ou plus grande est l'intensité du champ magnétique (pour une vitesse de déplacement donnée), plus grande est la tension induite aux extrémités du conducteur. Le même effet apparaît si un conducteur stationnaire est placé dans un champ magnétique variable.

Dans le cas d'une bobine de  $N$  spires placée dans un champ magnétique variable (figure 11.2), la tension induite aux bornes de la bobine est déterminée par la *loi de Faraday*:

$$e = N \frac{d\phi}{dt} \quad (\text{volts}) \quad (11.1)$$

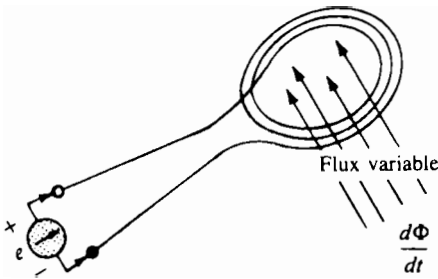


FIG. 11.2

dans laquelle  $N$  = le nombre de spires de la bobine et  $d\phi/dt$  est la variation instantanée du flux (en webers) embrassé par la bobine. Par l'expression *variation* du flux embrassé par la bobine, il faut entendre soit une variation de l'intensité du champ magnétique soit un déplacement de la bobine de telle sorte que ses spires coupent des lignes de force.

Si la variation du flux embrassé par la bobine est nulle (bobine immobile dans un champ magnétique d'intensité constante), alors  $d\phi/dt = 0$  et la tension induite  $e = N(d\phi/dt) = N(0) = 0$ .

### 11.3 LOI DE LENZ

Nous avons démontré à la section 10.2 que le spectre du flux magnétique embrassé par une bobine de  $N$  spires parcourue par un courant  $I$  est semblable à celui illustré à la figure 11.3.

Le flux embrassé par la bobine augmente avec l'intensité du courant qui traverse cette dernière. Nous avons toutefois démontré à la section 11.2 que la variation du flux embrassé par la bobine induit une tension aux bornes de celle-ci. Il se crée donc dans cette bobine une f.é.m. induite, en raison de la variation du courant qu'entraîne la variation du flux. Cette f.é.m. induite est de polarité telle qu'elle donne naissance à un courant qui engendre un flux s'opposant à la variation du flux original. En d'autres termes, l'effet induit ( $e_{ind}$ ) résultant d'une augmentation de l'intensité du courant de la bobine tend à établir un courant qui s'oppose à l'augmentation de l'intensité du courant traversant la bobine. Évidemment, tous ces phénomènes se produisent simultanément. Dès que l'intensité du courant dans la bobine commence à augmenter, il naît un effet d'opposition tendant à annuler cette augmentation. On pourrait dire autrement que cet effet « amortit » la variation de l'intensité du courant dans la bobine. C'est pourquoi on emploie souvent l'expression *bobine d'amortissement*. De fait, nous verrons sous peu que l'intensité du courant traversant une bobine ne peut pas varier instantanément. Il s'écoule toujours

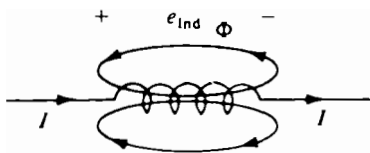


FIG. 11.3



une certaine période de temps, dont l'importance dépend des caractéristiques de la bobine et de la résistance du circuit, avant que la bobine cesse de s'opposer à une variation momentanée de l'intensité du courant. Cette situation n'est pas sans rappeler la façon dont varie la tension aux bornes d'un condensateur, que nous avons étudiée au chapitre 9. Soulignons enfin qu'une bobine s'oppose aussi bien à une diminution qu'à une augmentation de l'intensité du courant qui la traverse. Cet effet d'opposition est un cas particulier d'un principe général connu sous le nom de *loi de Lenz*, qui s'énonce: *le courant induit a un sens tel que ses effets s'opposent à la cause qui lui a donné naissance.*

## 11.4 INDUCTANCE PROPRE

Puisque la f.é.m. induite s'oppose à toute variation du flux embrassé par la bobine et par conséquent à toute variation de l'intensité du courant qui traverse la bobine, on l'appelle *force contre-électromotrice*. L'aptitude d'une bobine à s'opposer à toute variation de l'intensité du courant est une mesure de son *inductance propre*  $L$ . Par souci de concision, on laisse souvent tomber le suffixe *propre*, pour ne parler que de l'*inductance* d'une bobine. Cette inductance se mesure en henrys (H), en l'honneur du physicien américain Joseph Henry.

Les *bobines* sont réalisées en plusieurs grandeurs, selon l'inductance qu'elles sont appelées à introduire dans un circuit. L'inductance d'une bobine étant fonction directe des propriétés magnétiques de la bobine, on emploie fréquemment des matériaux ferromagnétiques dans le noyau pour en accroître l'inductance, par augmentation du flux embrassé par la bobine.

Les inductances des bobines de la figure 11.4 peuvent être déterminées avec une bonne précision à partir des caractéristiques physiques de ces dernières au moyen de l'équation suivante:

$$L = \frac{N^2 \mu A}{l} \quad (\text{henrys, H}) \quad (11.2)$$

dans laquelle:

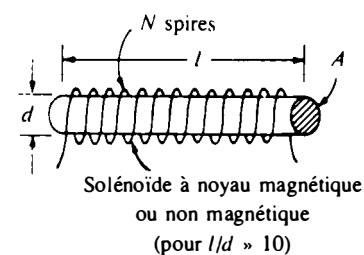
$N$  = le nombre de spires

$\mu$  = la perméabilité du noyau, en unités SI (rappelons que  $\mu$  n'est pas une constante mais qu'elle dépend de  $B$  et de  $H$ , puisque  $\mu = B/H$ )

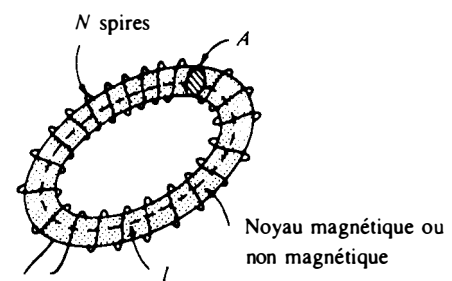
$A$  = l'aire du noyau en mètres carrés

$l$  = la longueur moyenne du noyau en mètres

On trouvera dans des formulaires spécialisés les équations permettant de calculer l'inductance de bobines différentes de celles illustrées ci-dessus. Ces équations sont en majorité beaucoup plus complexes que l'équation (11.2).



(a)



(b)

Tore

FIG. 11.4



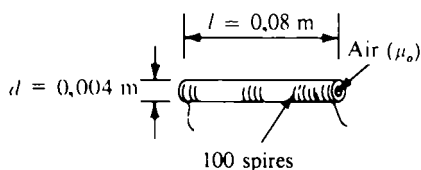


FIG. 11.5

**EXEMPLE 11.1** Calculer l'inductance de la bobine illustrée à la figure 11.5.

*Solution:*

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{N^2 \mu A}{l} = \frac{[(100^2)(4\pi \times 10^{-7})][\pi(0,004^2)/4]}{0,08} \\
 &= \frac{(10^4)(10^{-7})(4\pi)(\pi/4)(0,004^2)}{0,08} \\
 &= \frac{(10^{-3})(9,87)(16 \times 10^{-6})}{0,08} \\
 &= \frac{(10^{-9})(157,92)}{8 \times 10^{-2}} = \frac{(10^{-7})(157,92)}{8} \\
 &= 19,74 \times 10^{-7} \\
 L &= \mathbf{1,974 \mu H}
 \end{aligned}$$

**EXEMPLE 11.2** Calculer l'inductance de la bobine illustrée à la figure 11.5, si le noyau est de fer et que la perméabilité  $\mu_r$  soit de 200.

*Solution:*

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{N^2 \mu_r \mu_0 A}{l} = \mu_r \left( \frac{N^2 \mu_0 A}{l} \right) \\
 &= (200)(1,974 \mu H) \\
 L &= \mathbf{0,3948 mH}
 \end{aligned}$$

### 11.5 TYPES DE BOBINES

Une bobine n'est jamais purement inductive. Toute bobine comporte une résistance égale à la résistance des spires et une capacité parasite qui se crée entre les spires. Pour tenir compte de ces effets, il faut avoir recours à un circuit équivalent semblable à celui illustré à la figure 11.6.

Le rôle essentiel de la bobine est toutefois d'introduire une certaine inductance, et non une résistance ou une capacité, dans un réseau. Pour cette raison, les symboles graphiques de la bobine sont ceux que représente la figure 11.7.

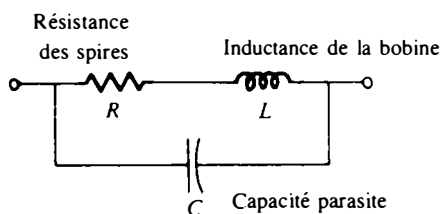


FIG. 11.6

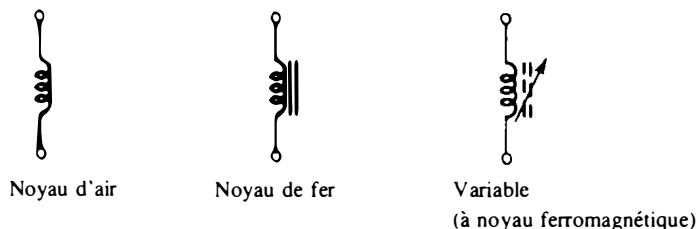
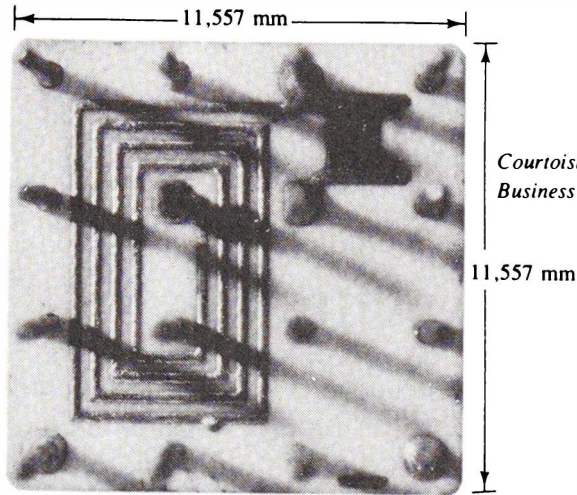


FIG. 11.7

Toutes les bobines, à l'instar des condensateurs, appartiennent à deux grands groupes: les bobines fixes et les bobines variables. Il a déjà été question à la section précédente des



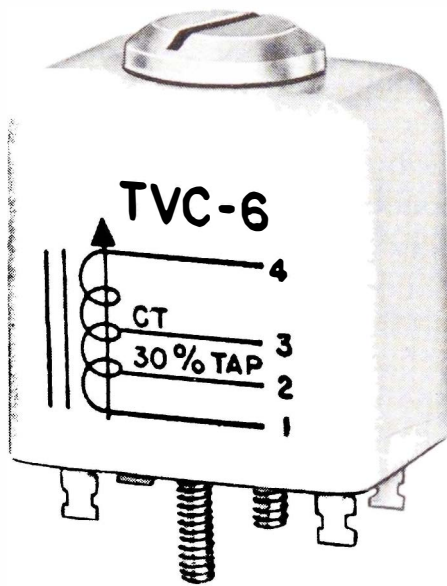
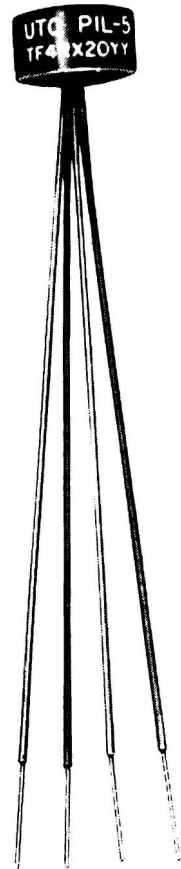
Courtoisie de International Business Machines Corp.

(a) Bobine et résistance montées sur le même module



(b) 1,0 H à 8 A, tension de service de 8 kV

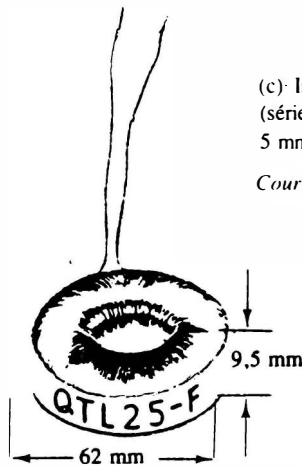
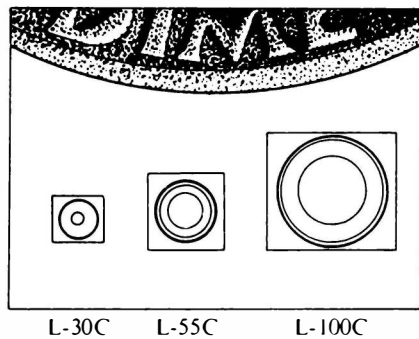
Courtoisie de Basler Electric Co.



(d) Bobine variable entre 0,2 H et 2 H  
Courtoisie de United Transformer Corp.

(c) Inductance totale entre 0,025 H et 0,11 H selon le branchement (série ou parallèle); dimensions: diamètre de 8 mm, hauteur de 5 mm; masse de 14 g.

Courtoisie de United Transformer Corp.

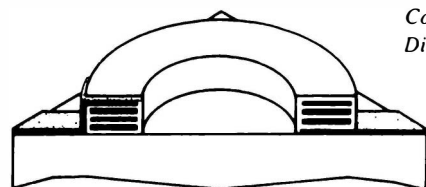


(e) Bobine en forme de tore de 25 mH. Capacité totale répartie: 127 pF

Courtoisie de Microtran Company Inc



(f) Bobines moulées: de 0,022  $\mu$ H à 10 000  $\mu$ H



(g) Bobines sur puce. L-30C: de 2  $\mu$ H à 56  $\mu$ H; L-55C: jusqu'à 250  $\mu$ H; L-100C: jusqu'à 500  $\mu$ H

Courtoisie de Thinc Division, Hull Corp.



0,01  $\mu$ H à 27  $\mu$ H

120  $\mu$ H à 1000  $\mu$ H

Courtoisie de Delevan, Division of American Precision Industries, Inc.



12  $\mu$ H à 100  $\mu$ H

FIG. 11.8 Divers types de bobines.

(h) Bobines sur puce Micro-i<sup>30</sup>



bobines fixes à noyau d'air et à noyau de fer. Il existe aussi des bobines variables à noyau ferromagnétique; celles-ci sont munies d'un arbre qui permet de déplacer le noyau afin de faire varier le flux embrassé par la bobine et par conséquent son inductance. La figure 11.8 illustre plusieurs bobines fixes et variables.

## 11.6 TENSION INDUITE

L'inductance d'une bobine est une mesure de la variation instantanée du flux embrassé que cause une variation instantanée du courant qui traverse la bobine; on peut donc écrire:

$$L = N \frac{d\phi}{di} \quad (\text{henrys, H}) \quad (11.3)$$

dans laquelle:

$N$  = le nombre de spires

$\phi$  = le flux en webers

$i$  = l'intensité du courant

En clair, cette équation énonce que plus grande est l'inductance d'une bobine (dont  $N$  est fixe), plus grande est la variation instantanée du flux que cause une variation instantanée de l'intensité du courant.

Réécrivons l'équation (11.1) de la façon suivante:

$$e_L = N \frac{d\phi}{dt} = \left( N \frac{d\phi}{di} \right) \left( \frac{di}{dt} \right)$$

et, en faisant appel à l'équation (11.3), nous avons:

$$e_L = L \frac{di}{dt} \quad (\text{volts, V}) \quad (11.4)$$

qui permet de déterminer la tension aux bornes d'une bobine en fonction de son inductance  $L$  et de la variation instantanée de l'intensité du courant. De toute évidence, plus grande est la variation du courant de la bobine et plus grande est la tension induite. Ce résultat confirme certainement l'analyse qui nous a amené à énoncer la loi de Lenz. L'équation ci-dessus nous permet en outre de conclure que, pour une variation donnée de l'intensité du courant, plus grande est l'inductance de la bobine et plus grande est la force contre-électromotrice induite. Par contre, la tension induite est nulle si le courant ne varie pas dans la bobine à un instant donné. Ainsi, en courant continu, une fois terminés les effets transitoires,  $di/dt = 0$  et la tension induite:

$$e_L = L \frac{di}{dt} = L(0) = 0 \text{ V}$$



Comme nous l'avons souligné, la tension induite aux bornes de la bobine est fréquemment appelée *force contre-électromotrice*, qu'on abrège *f.c.é.m.*, puisqu'elle s'oppose à la source de f.é.m. qui lui donne naissance. Pour bien mettre en évidence cet effet d'opposition, il est usuel d'affecter le membre droit de l'équation (11.4) du signe moins:

$$e_{f.c.é.m.} = -L \frac{di}{dt} \quad (\text{volts, V}) \quad (11.5)$$

Mais nous nous intéresserons surtout à la grandeur de la force contre-électromotrice, c'est-à-dire à l'équation (11.4); nous tiendrons compte du sens de la force en indiquant sa polarité comme l'illustre la figure 11.3.

Par ailleurs, on se rappellera sans doute l'expression du courant d'un condensateur:

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt}$$

qui présente une nette similarité avec l'équation (11.4). De fait, nous pouvons obtenir une équation de l'autre si nous établissons la dualité  $e \rightleftharpoons i$  et  $L \rightleftharpoons C$ .

La tension moyenne aux bornes de la bobine est donnée par l'équation:

$$e_{L_m} = L \frac{\Delta i}{\Delta t} \quad (\text{volts, V}) \quad (11.6)$$

où  $\Delta$  indique une variation finie (c'est-à-dire une variation mesurable). Cette équation ressemble sans aucun doute à l'équation  $i_C = C(\Delta v/\Delta t)$ ; par conséquent, on devrait être en mesure de déterminer le sens de  $\Delta$  et savoir comment appliquer cette équation à partir des explications données au chapitre 9. Voici un exemple.

**EXEMPLE 11.3** Déterminer la forme d'onde de la tension moyenne aux bornes d'une bobine de 4 mH traversée par un courant défini par la forme d'onde illustrée à la figure 11.9.

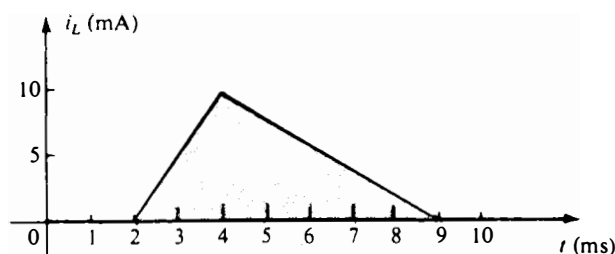


FIG. 11.9

*Solution:*

- a. de 0 ms à 2 ms. Puisque la variation de l'intensité du courant est nulle dans cet intervalle, la tension induite aux bornes de la bobine est nulle:

$$e_L = L \frac{\Delta i}{\Delta t} = L \frac{(0)}{\Delta t} = 0$$



b. de 2 ms à 4 ms:

$$e_L = L \frac{\Delta i}{\Delta t} = 4 \times 10^{-3} \left( \frac{10 \times 10^{-3}}{2 \times 10^{-3}} \right) = 20 \times 10^{-3} \\ = 20 \text{ mV}$$

c. de 4 ms à 9 ms:

$$e_L = L \frac{\Delta i}{\Delta t} = -4 \times 10^{-3} \left( \frac{10 \times 10^{-3}}{5 \times 10^{-3}} \right) \\ = -8 \times 10^{-3} \\ = -8 \text{ mV}$$

d. de 9 ms  $\rightarrow \infty$ :

$$e_L = L \frac{\Delta i}{\Delta t} = L \frac{0}{\Delta t} = 0$$

La forme d'onde de la tension moyenne est illustrée à la figure 11.10. Notons que la tension n'est pas déterminée par l'amplitude du changement d'intensité du courant ( $\Delta i$ ), mais bien par le taux de variation de l'intensité ( $\Delta i/\Delta t$ ). Un résultat semblable a été obtenu pour le courant d'un condensateur créé par une variation de la tension aux bornes de ce dernier.

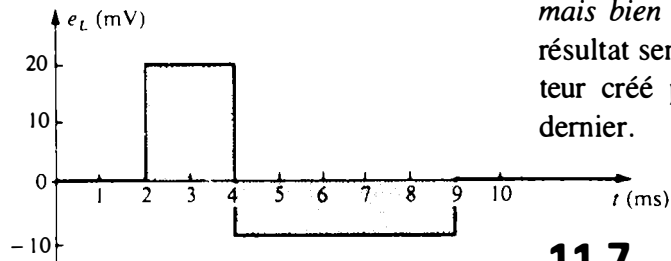


FIG. 11.10

## 11.7 CIRCUITS R-L

Avant de poursuivre notre étude de la bobine, précisons notre symbolique. Le symbole  $e$  est employé pour représenter une tension induite aux bornes d'une bobine si on considère cette tension comme une source de f.é.m. Si au contraire il s'agit d'une chute de potentiel, c'est le symbole  $v$  qui est employé. La figure 11.11 donne un exemple de ce dernier cas.

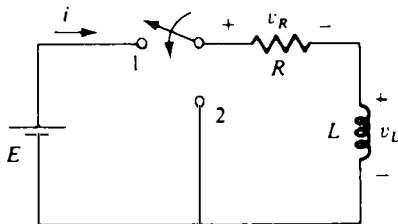


FIG. 11.11

Pour décrire entièrement le comportement d'une bobine dans un circuit en fonction de variations de tension et de courant, voyons ce qui se produit lorsqu'on place le commutateur du circuit illustré à la figure 11.11 à l'une ou l'autre des positions. Au moment où le commutateur est placé à la position 1, l'inductance de la bobine empêche toute variation instantanée du courant dans le circuit. D'après la loi des tensions, la chute de potentiel aux bornes de la bobine est alors égale à la f.é.m. appliquée, puisque  $v = iR = 0$   $R = 0$  V. Le courant  $i$  s'accroît donc à partir de 0, ce qui entraîne une chute de tension aux bornes de la résistance et une réduction de  $v_L$ . La tension aux bornes de la résistance augmente avec le courant  $i$ , tandis que la tension aux bornes de la bobine décroît. À un moment donné, la tension aux bornes de la bobine est nulle, et celle aux bornes de la résistance est égale à la f.é.m.  $E$  appliquée.

L'expression mathématique du courant qui traverse la bobine peut se déterminer par la loi des tensions sur le trajet fermé:

CIRCUITS R-L

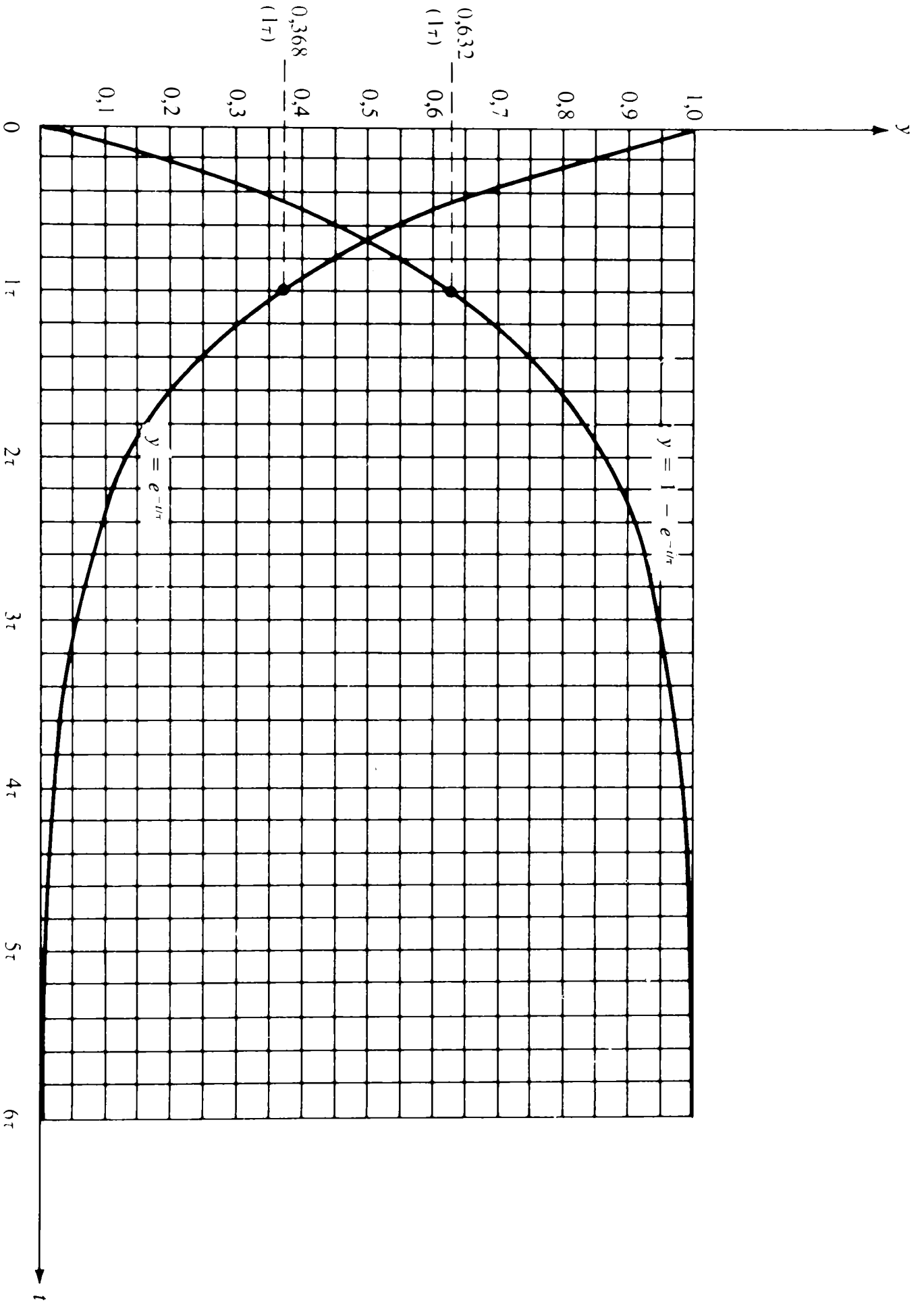


FIG. 11.12



$$E - v_R - v_L = 0 \quad \text{ou} \quad v_R + v_L = E \quad \text{et} \quad iR + v_L = E$$

Le courant  $i$  étant le même dans la résistance et dans la bobine, on a:

$$i_L R + L \frac{di_L}{dt} = E$$

Le courant  $i_L$  se détermine alors par calcul différentiel:

$$i_L(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-t/(L/R)}) \quad (11.7)$$

ou encore, puisque  $I_m = E/R$ :

$$i_L(t) = I_m (1 - e^{-t/(L/R)}) \quad (11.8)$$

qui présente la même forme que l'équation (9.15) donnant l'expression de la tension aux bornes d'un condensateur pendant sa charge.

Dans les circuits capacitifs, le produit  $RC$  représentait la constante de temps. Dans les circuits inductifs, la constante de temps ( $\tau$ ) est  $L/R$ , qui s'exprime également en secondes:

$$\tau = \frac{L}{R} \quad (\text{secondes, s}) \quad (11.9)$$

L'équation (11.8) peut alors se réécrire:

$$i_L(t) = I_m (1 - e^{-t/\tau}) \quad (11.10)$$

Par souci de commodité, nous reproduisons la figure 9.22 (figure 11.12), en raison de la présence dans l'équation (11.10) du facteur  $(1 - e^{-t/\tau})$  et du facteur  $e^{-t/\tau}$  dans les équations à venir.

Tout comme dans le circuit  $R-C$ , le facteur exponentiel devient  $e^{-1} = 0,368$  en une constante de temps; en deux constantes de temps, il est de 0,135. L'équation (11.10) indique donc que l'intensité  $i_L$  du courant est de  $0,632I_m$  en une constante de temps, et de  $0,865I_m$  en deux constantes de temps. Le tracé de  $i_L$  en fonction du temps est illustré à la figure 11.13. Notons que la courbe a la même allure que celle de  $v_C(t)$  d'un circuit  $R-C$  pendant sa charge. Pour chaque constante de temps, le coefficient numérique est le même. Nous avons démontré que dans un circuit  $R-C$  la tension  $v_C$  atteignait sa valeur finale en cinq constantes de temps, à toutes fins pratiques. Cela est également vrai de l'intensité  $i_L$  du courant dans un circuit  $R-L$ .

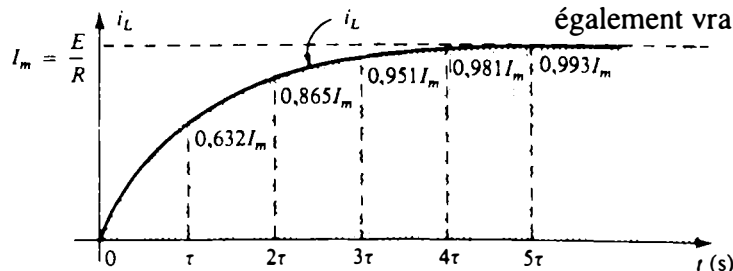


FIG. 11.13



Si nous gardons  $R$  constante et réduisons  $L$ , le rapport  $L/R$  décroît, ainsi que la valeur de cinq constantes de temps. La variation du comportement transitoire de l'intensité  $i_L$  du courant est illustrée à la figure 11.4, pour diverses valeurs de  $L$ . Notons une fois encore la dualité entre ces courbes et celles que nous avons obtenues pour le circuit  $R-C$  (voir la figure 9.24).

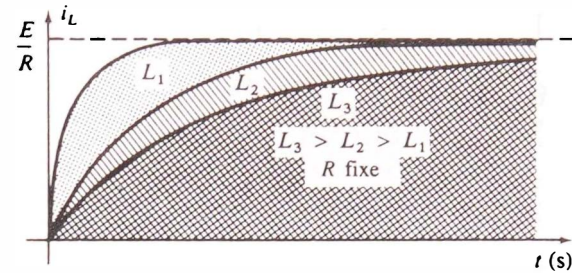


FIG. 11.14

Le rapport  $L/R$  possède toujours une certaine valeur numérique, même s'il est parfois très petit. Pour cette raison, l'intensité du courant dans une bobine, déterminée par l'équation (11.10), ne peut pas varier instantanément. De fait, comme nous l'avons souligné antérieurement, l'inductance d'un réseau est une mesure de l'opposition qu'il offre à toute variation de l'intensité du courant qui parcourt le réseau. Plus grande est l'inductance, plus grande est la constante de temps et plus de temps il faut pour que  $i_L$  atteigne sa valeur finale (voir la courbe de  $L_3$  à la figure 11.14).

La tension aux bornes d'une bobine dans un circuit  $R-L$  ne peut donc pas varier instantanément. Lorsque le commutateur est amené à la position 1, la tension passe soudainement à une valeur égale à la tension appliquée  $E$ . Elle commence ensuite à chuter, d'une manière déterminée par l'équation:

$$v_L(t) = Ee^{-t/\tau} \tag{11.11}$$

Le tracé de cette tension apparaît à la figure 11.15.

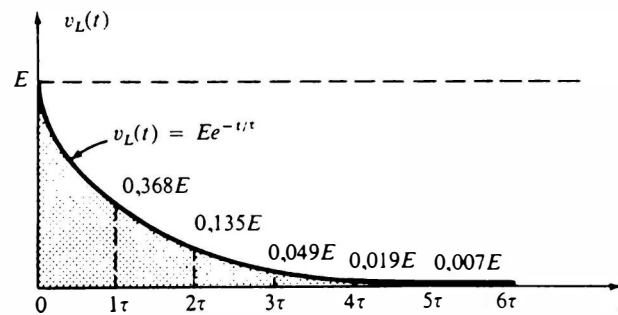


FIG. 11.15

Quant à la tension aux bornes de la résistance, elle augmente à un rythme déterminé par l'intensité du courant qui parcourt le circuit:

$$\begin{aligned}
 v_R(t) &= i(t)R \\
 &= \left[ \frac{E}{R} (1 - e^{-t/\tau}) \right] R \\
 v_R(t) &= E(1 - e^{-t/\tau})
 \end{aligned}
 \tag{11.12}$$



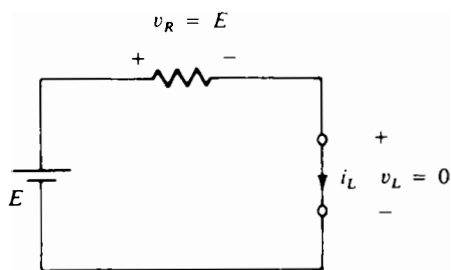


FIG. 11.16

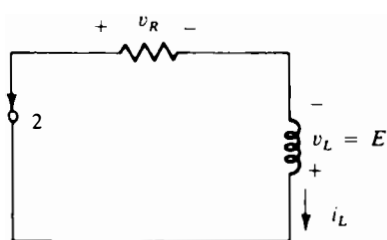


FIG. 11.17

À cause de la présence constante du facteur  $e^{-t/\tau}$  dans toutes les équations transitoires, nous pouvons conclure que la tension  $v_R$  et l'intensité  $i_L$  du courant accroissent jusqu'à leur valeur finale à la même vitesse que décroît  $v_L$ . À un moment donné, la tension  $v_R$  et l'intensité  $i_L$  du courant atteindront leur valeur finale, lorsque la tension  $v_L$  parviendra à zéro. La bobine présentera alors les mêmes caractéristiques qu'un court-circuit, comme l'illustre la figure 11.16. Dans la plupart des applications, la bobine d'un circuit en courant continu peut donc être remplacée par un court-circuit, après une période égale à cinq constantes de temps.

À l'instant où le commutateur illustré à la figure 11.11 est placé à la position 2, la tension aux bornes de la résistance demeure égale à  $E$ , puisque l'intensité du courant traversant la bobine ne peut pas varier instantanément et puisque  $v_r = i_L R = E$ . L'application de la loi des tensions sur le trajet fermé permet de voir que  $v_L = E$ . À cet instant, par conséquent, la variation du flux embrassé par la bobine est telle qu'il s'établit une tension induite  $E$  aux bornes de la bobine. La polarité de la f.é.m. induite, indiquée à la figure 11.17, provoque le passage d'un courant dans le circuit dont le sens est le même que si le commutateur était à la position 1. Ce courant cessera de passer dans le circuit lorsque la tension induite aux bornes de la bobine sera nulle. La tension  $v_R$  chute également à zéro, puisque sa valeur dépend de l'intensité  $i_L$  du courant.

Les expressions mathématiques de  $v_L$  et de  $v_R$  pendant la phase de décroissance sont:

$$v_L(t) = Ee^{-t/\tau} \quad (11.13)$$

$$i_L(t) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau} \quad (11.14)$$

$$v_R(t) = Ee^{-t/\tau} \quad (11.15)$$

Les formes d'onde de la tension  $v_L$ , de l'intensité  $i_L$  et de la tension  $v_R$  illustrées à la figure 11.18 sont obtenues lorsqu'on déplace le commutateur d'une position à l'autre toutes les cinq constantes de temps. Soulignons que l'effet de commutation du circuit inverse la polarité de la tension aux bornes de la bobine.

**EXEMPLE 11.4** Établir les expressions mathématiques de  $i_L$  et de  $v_L$  pour le circuit illustré à la figure 11.19, l'interrupteur étant fermé à l'instant  $t = 0$ . Tracer leurs formes d'onde.

*Solution:*

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{4}{2 \text{ k}\Omega} = 2 \text{ ms}$$

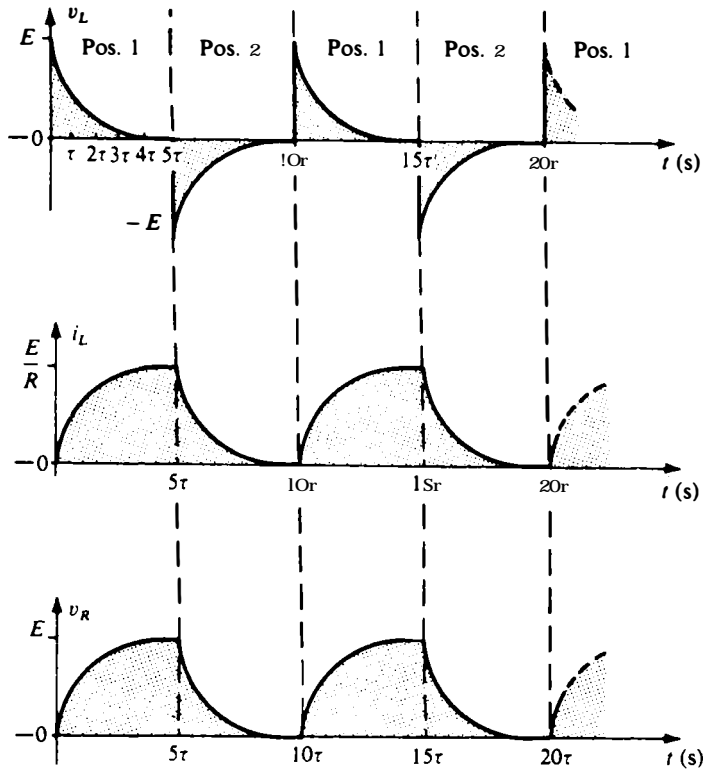


FIG. 11.18

L'équation (11.10) donne:

$$I_m = \frac{E}{R} = \frac{50}{2 \text{ k}\Omega} = 25 \times 10^{-3} \text{ A} = 25 \text{ mA}$$

et par suite:

$$i_L(t) = 25 \times 10^{-3} (1 - e^{-t/2 \times 10^{-3}})$$

L'équation (11.11) donne:

$$v_L(t) = 50e^{-t/2 \times 10^{-3}}$$

Les deux formes d'onde sont illustrées à la figure 11.20.

**EXEMPLE 11.5** Voir le réseau illustré à la figure 11.21.

- Déterminer l'expression mathématique de l'intensité du courant passant dans la bobine, le commutateur étant placé à la position 1 à l'instant  $t = 0$ . Calculer l'intensité  $i_L$  à l'instant  $t = 6 \text{ ms}$ .
- Même question pour les tensions  $v_L$  et  $v_{R_1}$ .
- Déterminer les expressions mathématiques des tensions  $v_L$  et  $v_{R_1}$  et du courant  $i_L$ , le commutateur étant instantanément amené à la position 2 au temps  $t = 24 \text{ ms}$ .
- Tracer les formes d'onde obtenues en (a), (b) et (c), sur le même axe des temps.

*Solution:*

$$\text{a. } \tau = \frac{L}{R} = \frac{0,12}{30} = 4 \text{ ms}$$

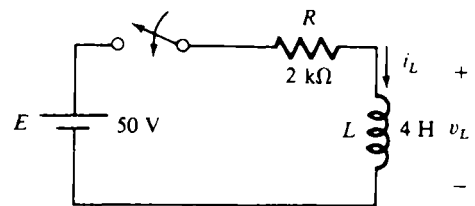


FIG. 11.19

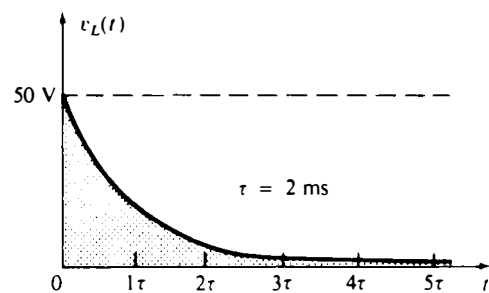
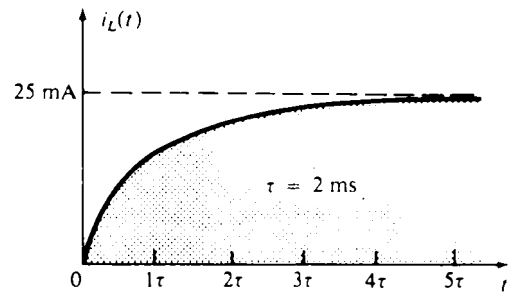


FIG. 11.20

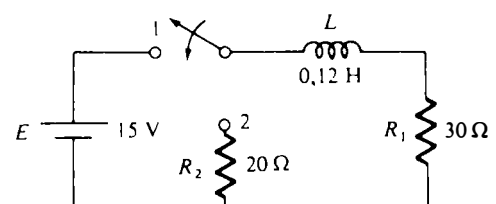


FIG. 11.21



L'équation (11.10) donne:

$$i_L(t) = I_m(1 - e^{-t/\tau}) = \frac{15}{30}(1 - e^{-t/4 \times 10^{-3}})$$

et par suite:

$$i_L(t) = 0,5(1 - e^{-t/4 \times 10^{-3}})$$

À  $t = 6$  ms:

$$\begin{aligned} i_L(6 \text{ ms}) &= 0,5 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{6 \times 10^{-3}}{4 \times 10^{-3}}\right) \right] \\ &= 0,5(1 - e^{-1,5}) \\ &= (0,5)(1 - 0,223) = (0,5)(0,777) \\ &= \mathbf{388,5 \text{ mA}} \end{aligned}$$

b. L'équation (11.11) donne:

$$\begin{aligned} v_L(t) &= Ee^{-t/\tau} \\ v_L(t) &= \mathbf{15e^{-t/4 \times 10^{-3}}} \end{aligned}$$

À  $t = 6$  ms:

$$\begin{aligned} v_L(6 \text{ ms}) &= 15 \exp\left(-\frac{6 \times 10^{-3}}{4 \times 10^{-3}}\right) = (15)(0,223) \\ v_L &= \mathbf{3,345 \text{ V}} \end{aligned}$$

L'équation (11.12) donne:

$$\begin{aligned} v_{R_1}(t) &= E(1 - e^{-t/\tau}) \\ v_{R_1}(t) &= \mathbf{15(1 - e^{-t/4 \times 10^{-3}})} \end{aligned}$$

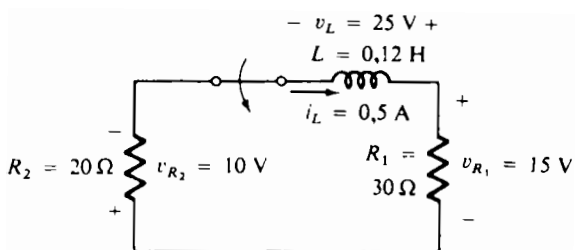


FIG. 11.22

À  $t = 60$  ms:

$$\begin{aligned} v_{R_1}(6 \text{ ms}) &= 15 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{6 \times 10^{-3}}{4 \times 10^{-3}}\right) \right] \\ &= (15)(1 - 0,223) = (15)(0,777) \\ v_{R_1}(6 \text{ ms}) &= \mathbf{11,655 \text{ V}} \end{aligned}$$

c. Puisque  $t = 24 \text{ ms} > 5\tau$ , nous supposons que  $v_L$ ,  $i_L$  et  $v_R$  sont parvenus à leur valeur finale; c'est donc dire que  $i_L = 0,5 \text{ A}$ ,  $v_L = 0 \text{ V}$  et  $v_R = 15 \text{ V}$ . La figure 11.22 illustre le circuit à l'instant où le commutateur est fermé. L'intensité du courant ne pouvant pas varier instantanément, on a:

$$\begin{aligned} v_{R_1} &= (0,5)(30) = 15 \text{ V} \\ v_{R_2} &= (0,5)(20) = 10 \text{ V} \end{aligned}$$



$$\tau = L/R_{Th}$$

La tension aux bornes de la bobine est alors déterminée par la loi des tensions:

$$v_{L_1} = v_{R_1} + v_{R_2} = 25 \text{ V}$$

La constante de temps a par ailleurs également varié; elle est maintenant:

$$\tau' = \frac{L}{R_1 + R_2} = \frac{0,12}{50} = 2,4 \text{ ms}$$

Définissons  $t' = t - 24 \text{ ms}$ , de sorte que:

$$v_L(t) = 25e^{-t'/2,4 \times 10^{-3}}$$

et:

$$i_L(t) = 0,5e^{-t'/2,4 \times 10^{-3}}$$

avec:

$$v_R(t) = 15e^{-t'/2,4 \times 10^{-3}}$$

d. Voir la figure 11.23.

### 11.8 $\tau = L/R_{Th}$

Au chapitre 9 portant sur les condensateurs, nous avons eu affaire à des circuits qui ne présentaient pas la forme fondamentale illustrée à la figure 11.11. Des réseaux inductifs peuvent nous poser les mêmes difficultés. Il nous sera donc nécessaire de trouver le générateur de Thévenin de ces réseaux avant de pouvoir appliquer la technique d'analyse que nous avons étudiée dans le présent chapitre. L'exemple qui suit montre comment procéder.

**EXEMPLE 11.6** Voir le réseau illustré à la figure 11.24.

- Déterminer les expressions mathématiques de l'intensité  $i_L$  du courant et de la tension, l'interrupteur étant fermé à l'instant  $t = 0$ .
- Tracer les formes d'onde résultantes du courant et de la tension.

*Solution:*

- L'application du théorème de Thévenin à la bobine de 80 mH (figure 11.25) donne:

$$R_{Th} = \frac{R}{N} = \frac{20 \text{ k}\Omega}{2} = 10 \text{ k}\Omega$$

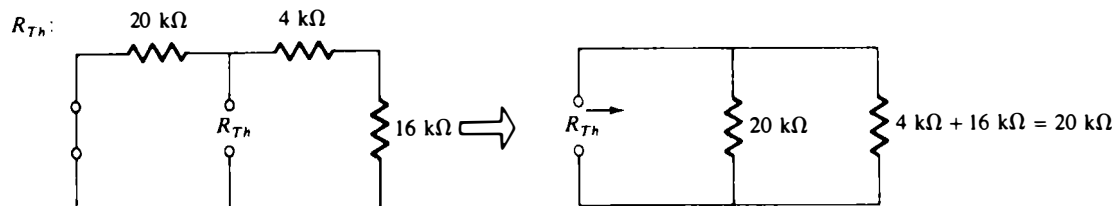


FIG. 11.25

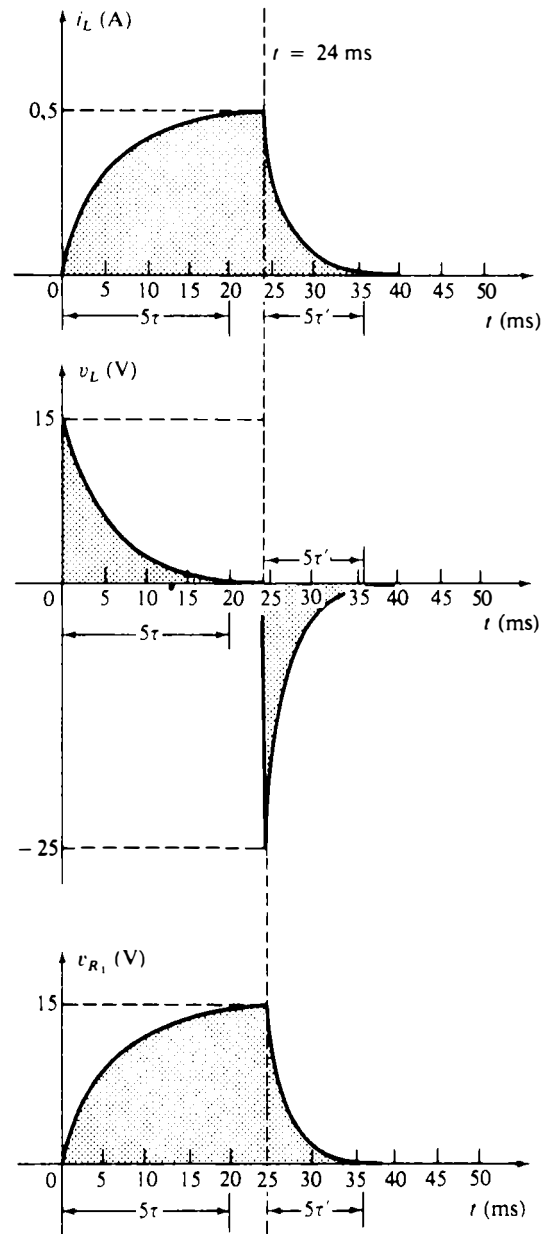


FIG. 11.23

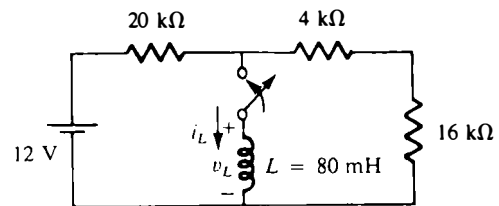


FIG. 11.24

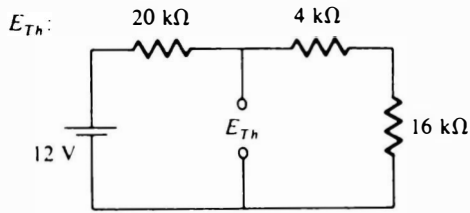


FIG. 11.26

Générateur de Thévenin

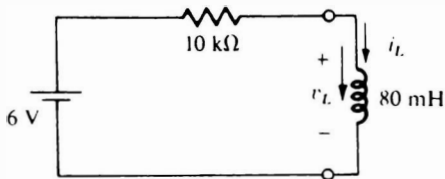


FIG. 11.27

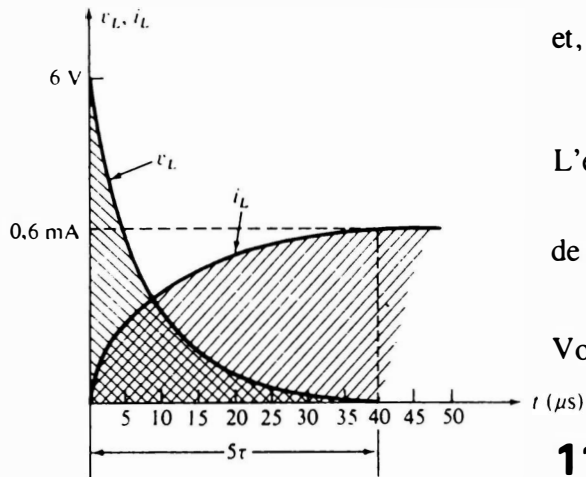


FIG. 11.28

La règle du diviseur de tension (figure 11.26) permet par ailleurs d'écrire:

$$E_{Th} = \frac{(4 \text{ k}\Omega + 16 \text{ k}\Omega)(12)}{(4 \text{ k}\Omega + 16 \text{ k}\Omega) + 20 \text{ k}\Omega}$$

$$= \frac{(20)(12)}{40}$$

$$E_{Th} = 6 \text{ V}$$

Le générateur de Thévenin est illustré à la figure 11.27.

L'équation (11.10) donne:

$$i_L(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-t/\tau})$$

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{80 \times 10^{-3}}{10 \times 10^3} = 8 \times 10^{-6} \text{ s}$$

$$I_m = \frac{E}{R} = \frac{6}{10 \times 10^3} = 0,6 \times 10^{-3}$$

et, enfin:

$$i_L(t) = 0,6 \times 10^{-3} (1 - e^{-t/8 \times 10^{-6}})$$

L'équation (11.11) donne:

$$v_L(t) = E e^{-t/\tau}$$

de sorte que:

$$v_L(t) = 6 e^{-t/8 \times 10^{-6}}$$

Voir la figure 11.28.

## 11.9 BOBINES EN SÉRIE ET EN PARALLÈLE

L'inductance totale d'un certain nombre de bobines en série se calcule de la même manière que s'il s'agissait de résistances (figure 11.29):

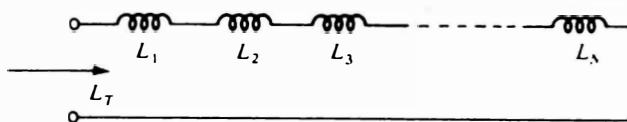


FIG. 11.29

$$L_T = L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_N \quad (11.16)$$

De même, l'inductance totale d'un certain nombre de bobines en parallèle se calcule de la même manière que s'il s'agissait de résistances en parallèle (figure 11.30):

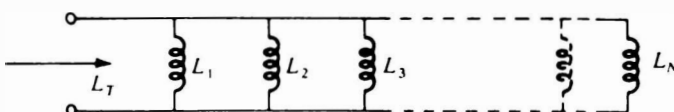


FIG. 11.30



$$\frac{1}{L_T} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \dots + \frac{1}{L_N} \quad (11.17)$$

Pour deux bobines en parallèle, l'équation précédente devient:

$$L_T = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \quad (11.18)$$

## 11.10 CIRCUITS R-L ET R-L-C ALIMENTÉS EN COURANT CONTINU

Nous avons vu à la section 11.7 qu'à toutes fins pratiques une bobine pouvait être remplacée par un court-circuit, dans un circuit en courant continu, après une période de temps plus grande que cinq constantes de temps. Dans les circuits qui suivent, nous pourrions donc calculer l'intensité du courant qui traverse chaque bobine en remplaçant chacune par un court-circuit, si nous supposons que tous les courants et toutes les tensions soient parvenus à leur valeur finale. Ainsi dans le circuit illustré à la figure 11.31, nous avons:

$$I_1 = \frac{10}{2} = 5 \text{ A}$$

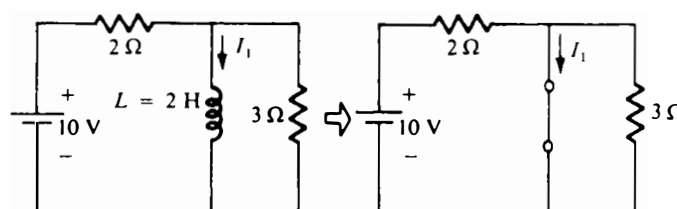


FIG. 11.31

Pour le circuit illustré à la figure 11.32, nous avons:

$$I = \frac{21}{2} = 10,5 \text{ A}$$

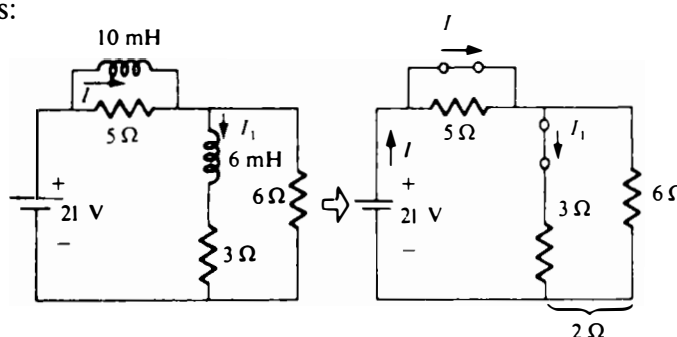


FIG. 11.32

La règle du diviseur de courant donne:

$$I_1 = \frac{(6)(10,5)}{3 + 6} = \frac{63}{9} = 7 \text{ A}$$

Dans les exemples à venir, nous supposons que la tension aux bornes des condensateurs et le courant traversant les bobines aient atteint leur valeur finale. Dans ces conditions, les bobines peuvent être remplacées par des court-circuits et les condensateurs, par des circuits ouverts.



**EXEMPLE 11.7** Calculer l'intensité  $I_L$  du courant et la tension  $V_C$ , dans le réseau illustré à la figure 11.33.

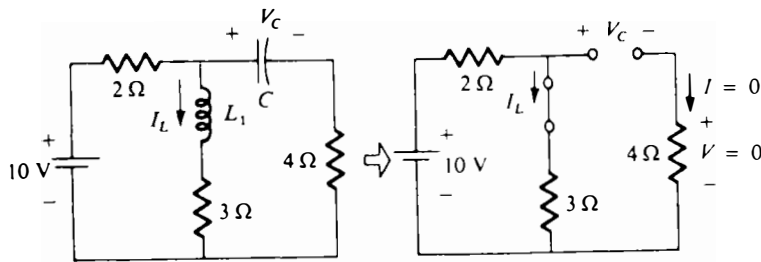


FIG. 11.33

*Solution:*

$$I_L = \frac{10}{5} = 2 \text{ A}, \quad V_C = \frac{(3)(10)}{3 + 2} = 6 \text{ V}$$

**EXEMPLE 11.8** Calculer les courants  $I_1$  et  $I_2$  dans le réseau illustré à la figure 11.34.

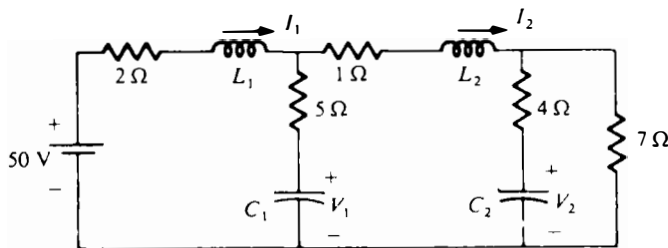


FIG. 11.34

*Solution:* Voir la figure 11.35. Nous avons:

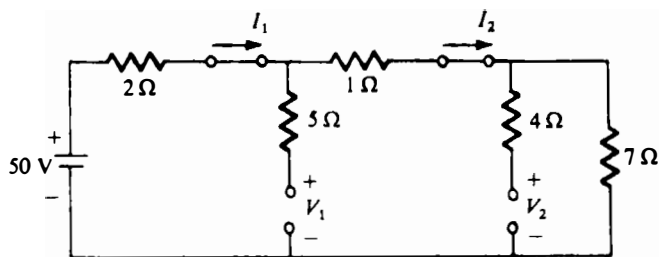


FIG. 11.35

$$I_1 = I_2, \quad I_1 = \frac{50}{2 + 1 + 7} = \frac{50}{10} = 5 \text{ A}$$

$$V_2 = (7)(5) = 35 \text{ V}$$

La règle du diviseur de tension donne par ailleurs:

$$V_1 = \frac{(8)(50)}{2 + 8} = 40 \text{ V}$$

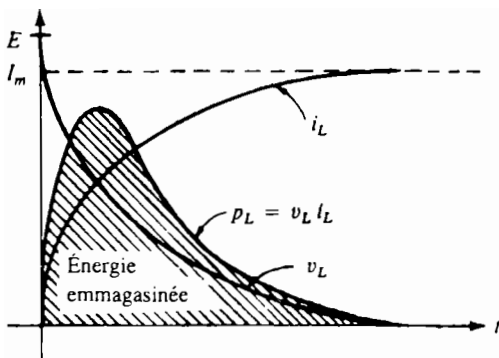


FIG. 11.36

## 11.11 ÉNERGIE EMMAGASINÉE DANS UNE BOBINE

La bobine idéale, à l'instar du condensateur idéal, ne dissipe pas l'énergie que lui fournit le circuit. Elle l'emmagasine plutôt sous la forme d'un champ magnétique. La figure 11.36



illustre le tracé de la tension, du courant et de la puissance pendant l'établissement du champ magnétique autour de la bobine. L'énergie emmagasinée est représentée par la surface hachurée sous la courbe de la puissance. Le calcul intégral nous permettrait de montrer que l'aire de cette surface est:

$$W_{\text{emmagasinée}} = \frac{1}{2} LI_m^2 \quad (\text{joules, J}) \quad (11.19)$$

**EXEMPLE 11.9** Calculer l'énergie emmagasinée par la bobine du circuit illustré à la figure 11.37 lorsque le courant est parvenu à sa valeur finale.

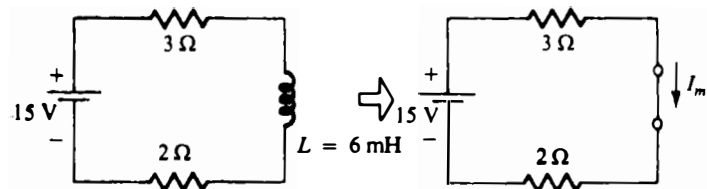


FIG. 11.37

*Solution:*

$$\begin{aligned} I_m &= \frac{15}{5} = 3 \text{ A} \\ W_r &= \frac{1}{2} LI_m^2 \\ &= \frac{1}{2} (6 \times 10^{-3})(3^2) \\ &= \frac{54}{2} \times 10^{-3} \\ W_p &= 27 \times 10^{-3} \text{ J} \end{aligned}$$

## PROBLÈMES

### Section 11.2

1. Quelle est la f.é.m. induite aux bornes d'une bobine de 50 spires, si le flux embrassé varie à la vitesse de 0,085 Wb/s?
2. Déterminez la vitesse de variation du flux embrassé par une bobine, sachant que celle-ci compte 40 spires et que la tension induite est de 20 V.
3. Combien de spires une bobine compte-t-elle, si la tension induite à ses bornes est de 42 mV et que la vitesse de variation du flux soit de 0,003 Wb/s?

### Section 11.4

4. Calculez l'inductance  $L$  en henrys de la bobine illustrée à la figure 11.38.
5. Répondez au problème 4 dans le cas de  $l = 4$  po et  $d = 0,25$  po.

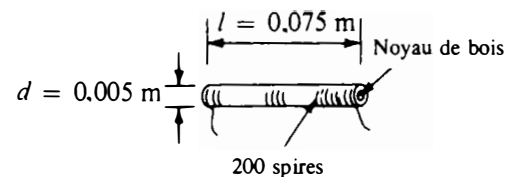


FIG. 11.38





6. a. Déterminez l'inductance  $L$  de la bobine illustrée à la figure 11.39.
- b. Refaites le problème en supposant que la bobine ait un noyau ferromagnétique dont  $\mu_r$  est de 2000.

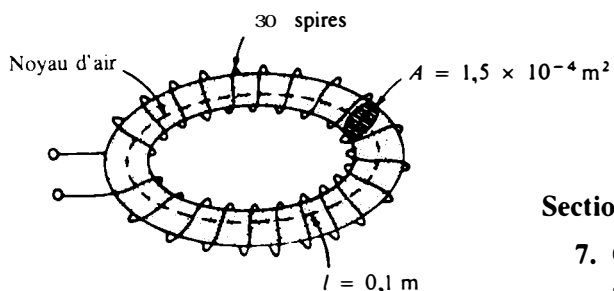


FIG. 11.39

Section 11.6

7. Calculez la tension induite aux bornes d'une bobine de 5 H, sachant que la vitesse de variation du courant dans la bobine est de:
  - a. 0,5 A/s;
  - b. 60 mA/s;
  - c. 0,04 A/ms.
8. Calculez la tension induite aux bornes d'une bobine de 50 mH, sachant que la vitesse de variation du courant est de 0,1 mA/ $\mu$ s.
9. Déterminez la forme d'onde de la tension aux bornes d'une bobine de 200 mH, la forme d'onde du courant parcourant la bobine étant celle illustrée à la figure 11.40.

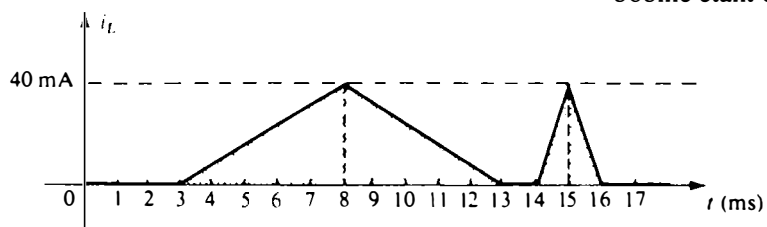


FIG. 11.40

10. Refaites le problème 9 dans le cas de la bobine illustrée à la figure 11.41.

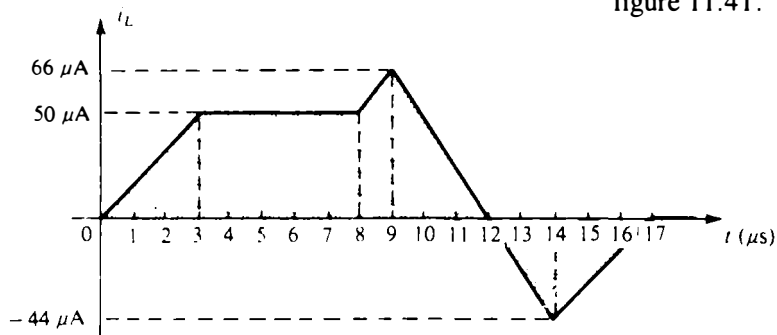


FIG. 11.41

Section 11.7

11. Voir le circuit illustré à la figure 11.42.
  - a. Établissez l'expression mathématique du courant  $i_L$ , l'interrupteur étant fermé à l'instant  $t = 0$ .
  - b. Déterminez le courant après 1, 2, 3, 4 et 5 constantes de temps.
  - c. Répondez à la partie (a) dans le cas des tensions  $v_L$  et  $v_R$ .
  - d. Répondez à la partie (b) dans le cas des tensions  $v_L$  et  $v_R$ .
  - e. Tracez les formes d'onde de  $i_L$ ,  $v_L$  et  $v_R$ .

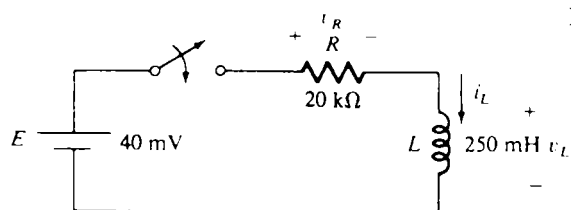


FIG. 11.42

12. Voir le circuit illustré à la figure 11.43.
- Déterminez le courant qui passe dans la bobine en fonction du temps, le commutateur étant placé à la position 1 à l'instant  $t = 0$ .
  - Répondez à la partie (a) dans le cas des tensions  $v_L$  et  $v_{R_1}$ .
  - Déterminez les tensions  $v_L$ ,  $v_{R_1}$  et  $v_{R_2}$  ainsi que le courant  $i_L$  en fonction du temps, le commutateur étant amené instantanément à la position 2 à l'instant  $t = 4$  ms.
  - Tracez les formes d'onde obtenues ci-dessus sur le même axe des temps.

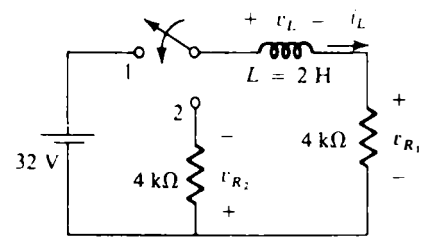


FIG. 11.43

13. Refaites le problème 12, en choisissant  $R_2 = 60$  kΩ.
14. Voir le circuit illustré à la figure 11.44.
- Déterminez le courant  $i_L$  en fonction du temps, le commutateur étant amené à la position 1 à l'instant  $t = 0$ .
  - Répondez à la partie (a) dans le cas de  $v_L$ .
  - Déterminez les tensions  $v_L$  et  $v_{R_1}$  ainsi que le courant  $i_L$  en fonction du temps, le commutateur étant amené instantanément à la position 2 à l'instant  $t = 30$  ms.
  - Tracez les formes d'onde obtenues ci-dessus sur le même axe des temps.

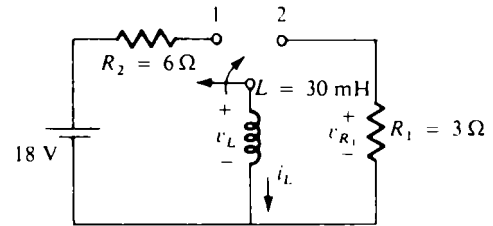


FIG. 11.44

15. Refaites le problème 14, en choisissant  $L = 3$  mH.

Section 11.8

16. Voir le circuit illustré à la figure 11.45.
- Déterminez le courant  $i_L$  en fonction du temps, l'interrupteur étant fermé à l'instant  $t = 0$ .
  - Répondez à la partie (a) dans le cas de  $v_L$ .
  - Tracez les formes d'onde du courant et de la tension correspondant à une période égale à cinq constantes de temps.
- \*17. Voir le circuit illustré à la figure 11.46.
- Déterminez le courant  $i_L$  en fonction du temps, l'interrupteur étant fermé à l'instant  $t = 0$ .
  - Répondez à la question (a) dans le cas de  $v_L$ .
  - Tracez les formes d'onde du courant et de la tension correspondant à une période égale à cinq constantes de temps.

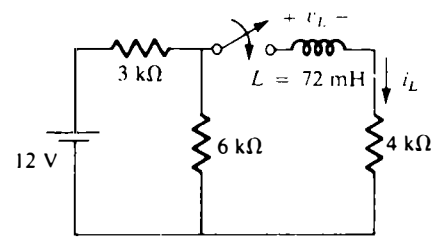


FIG. 11.45

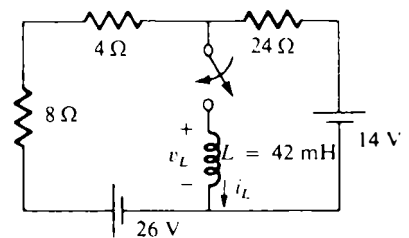


FIG. 11.46

Section 11.9

18. Calculez l'inductance totale des circuits illustrés à la figure 11.47.

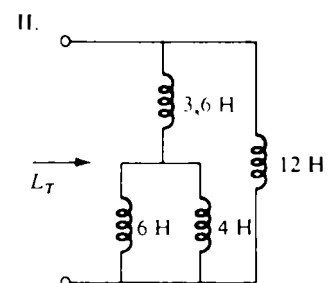
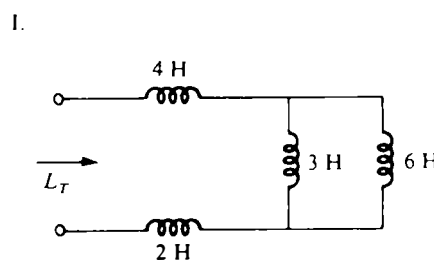


FIG. 11.47

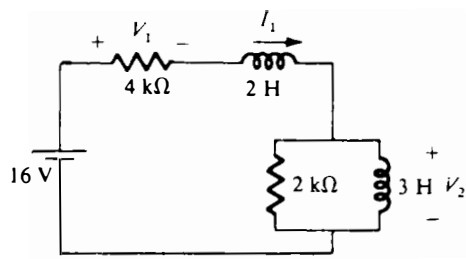


FIG. 11.48

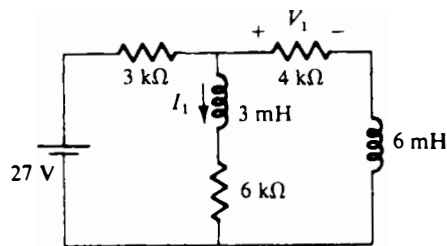


FIG. 11.49

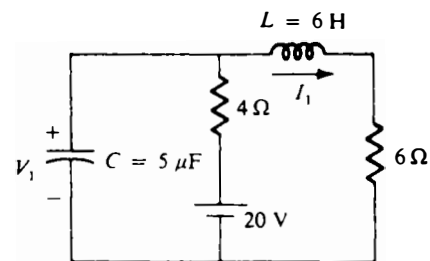


FIG. 11.50

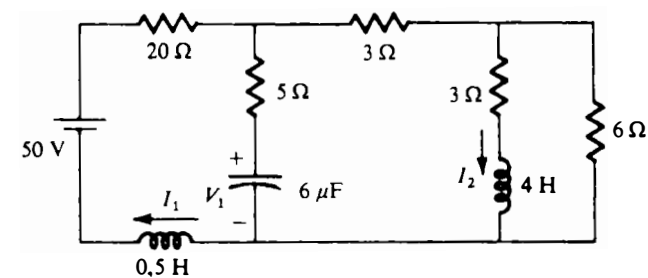


FIG. 11.51

## Section 11.10

Dans les quatre prochains problèmes, supposez que la tension aux bornes de chacun des condensateurs et le courant dans chacune des bobines aient atteint leur valeur finale.

19. Calculez les tensions  $V_1$  et  $V_2$  ainsi que le courant  $I_1$  dans le circuit illustré à la figure 11.48.

20. Calculez le courant  $I_1$  et la tension  $V_1$  dans le circuit illustré à la figure 11.49.

21. Calculez le courant  $I_1$  et la tension  $V_1$  dans le circuit illustré à la figure 11.50.

22. Calculez la tension  $V_1$  et le courant dans chacune des bobines du circuit illustré à la figure 11.51.

## Section 11.11

23. Calculez l'énergie emmagasinée dans chacune des bobines étudiées au:

- a. problème 19;
- b. problème 20.

24. Calculez l'énergie emmagasinée dans le condensateur et dans la bobine étudiés au problème 21.

25. Calculez l'énergie emmagasinée dans chacune des bobines étudiées au problème 22.



## GLOSSAIRE

**Bobine** Composant électrique constitué de nombreuses spires de fil enroulé sur un noyau fait d'air ou d'un matériau ferromagnétique.

**Bobine d'amortissement** Synonyme souvent employé pour désigner une bobine, en raison de l'effet d'amortissement du courant créé par celle-ci.

**Force contre-électromotrice** Force électromotrice induite aux bornes de la bobine, qui s'oppose à toute variation du flux embrassé par celle-ci et, par conséquent, à toute variation de l'intensité du courant qui la traverse.

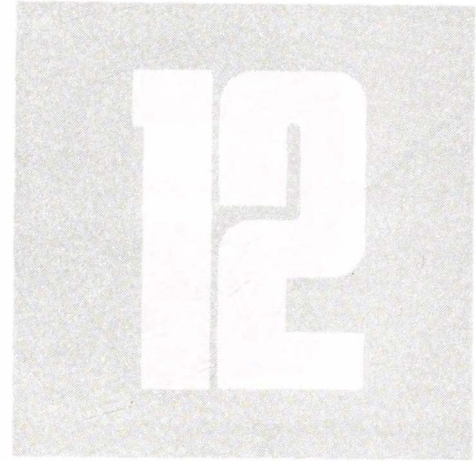
**Inductance propre** Mesure de l'aptitude d'une bobine à s'opposer à toute variation de l'intensité du courant et à emmagasiner de l'énergie sous la forme d'un champ magnétique environnant.

**Loi de Faraday** Loi exprimant la tension induite aux bornes de la bobine en fonction du nombre de spires de la bobine et de la vitesse de variation du flux embrassé par la bobine.

**Loi de Lenz** Loi stipulant que le sens du courant induit est tel que ses effets s'opposent à la cause qui lui a donné naissance.



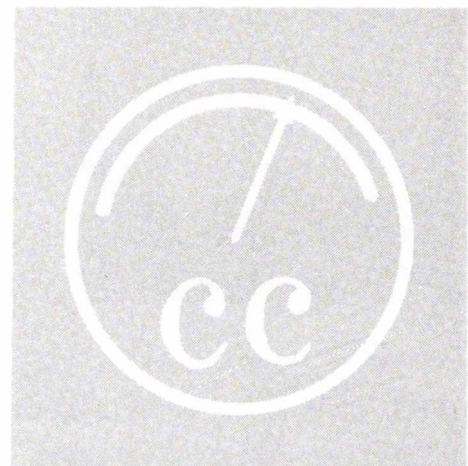
# APPAREILS DE MESURE EN COURANT CONTINU

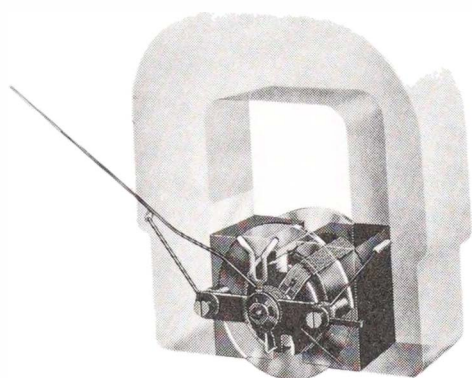


## 12.1 INTRODUCTION

Les notions et les techniques examinées dans les chapitres antérieurs prennent tout leur sens lorsqu'elles sont appliquées à l'analyse des circuits à courant continu réels. C'est pourquoi nous consacrons le présent chapitre à l'étude des appareils utilisés pour mesurer les grandeurs électriques fondamentales (courant, tension, puissance, résistance, inductance et capacité) des circuits à courant continu. Au cours des récentes années, les appareils analogiques ont de plus en plus été délaissés au profit des appareils numériques. Mais, comme c'est le cas pour la montre à aiguilles, il y aura place pour les appareils analogiques dans les années à venir. Il ne suffit qu'à songer combien l'enseignement serait difficile sans les expressions *sens horaire* et *sens antihoraire*, qui perdraient tout sens si seules les montres numériques étaient connues. Nous démontrerons, dans ce chapitre, que les deux types d'appareils ont leurs avantages propres.

Les premiers appareils de mesure employés étaient des appareils analogiques. Ils étaient construits à partir d'un *cadre mobile*, équipement mis au point en 1881 par le physicien français Jacques Arsène d'Arsonval. Ce cadre peut aussi servir à la fabrication d'un ampèremètre à courants continu et alternatif, d'un voltmètre à courants continu et alternatif, d'un ohmmètre et d'un pont de Wheatstone. Il est sans conteste le plus courant des équipages analogiques. D'autres types d'équipage seront présentés dans le chapitre.





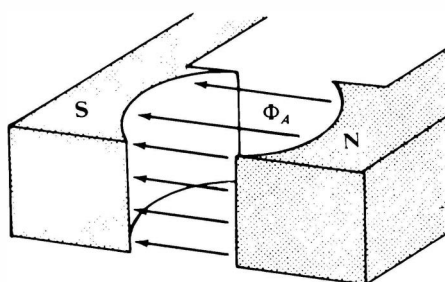
Courtoisie de Weston Instruments Inc.

**FIG. 12.1** Cadre mobile (mouvement d'Arsonval).

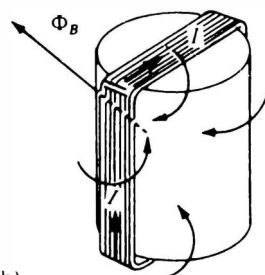
## 12.2 LE CADRE MOBILE

Le cadre mobile illustré à la figure 12.1 est essentiellement constitué d'une bobine à noyau de fer montée sur des pivots entre les pôles d'un aimant permanent. Des ressorts spiraux limitent la rotation de la bobine et amènent le courant à mesurer jusqu'à celle-ci. Les champs magnétiques de l'aimant et de la bobine sont représentés à la figure 12.2.

L'interaction entre ces deux champs fait qu'il s'exerce un couple sur la bobine, entraînant celle-ci dans un mouvement de rotation. Le flux  $\Phi$  de l'aimant étant constant, la variation du couple n'est liée qu'à la variation du flux  $\Phi_B$  de la bobine. Comme ce dernier est directement proportionnel à l'intensité

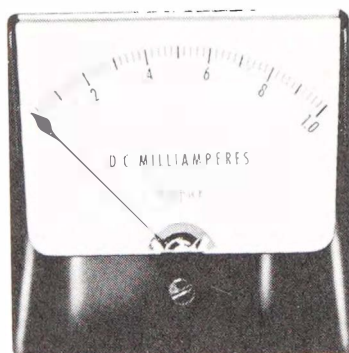


(a)



(b)

**FIG. 12.2**



(a)



(b)

Courtoisie de Simpson Electric Co

**FIG. 12.3** Échelles d'appareil de mesure.

du courant qui traverse la bobine, le couple est directement proportionnel à l'intensité du courant lui aussi. Plus intense est le courant dans la bobine, plus grand est le couple et, par conséquent, plus grande est la déviation de l'aiguille solidaire de la bobine. L'aiguille indique donc l'intensité du courant passant dans la bobine. Les échelles des indicateurs ampère-métriques sont habituellement de deux types: leur zéro peut être à gauche ou au centre (figure 12.3).

L'équipage mobile est réglé pour que la déviation de l'aiguille soit nulle si l'intensité du courant dans la bobine est nulle. Dans les appareils utilisant une échelle comme celle représentée à la figure 12.3a, l'aiguille dévie vers la droite lorsqu'un courant de sens donné passe dans la bobine. Si le sens du courant est inversé, l'aiguille dévie vers la gauche, sous le zéro, et vient s'appuyer sur une butée. Pour pouvoir mesurer l'intensité d'un courant peu importe son sens, on peut employer un appareil dont le zéro de l'échelle est au centre (figure 12.3b); on peut aussi permuter les connexions du premier appareil (figure 12.3a).

Les caractéristiques nominales des appareils de mesure à cadre mobile sont habituellement précisées en termes d'intensité et de résistance: 1 mA et 50  $\Omega$  par exemple. La première caractéristique (1 mA) est la sensibilité en courant ( $SC$ ) de l'équipage; il s'agit de l'intensité du courant qui fait dévier l'aiguille sur toute l'échelle. La deuxième caractéristique (50  $\Omega$ )

est la résistance ( $R_g$ ) de l'équipage mobile. La figure 12.4 représente le symbole graphique usuel d'un équipage mobile et la façon dont sont indiquées ses caractéristiques.

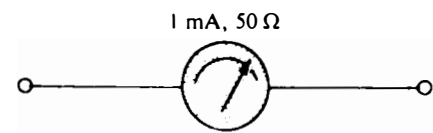


FIG. 12.4 Symbole et caractéristiques d'un équipage mobile.

### 12.3 L'AMPÈREMÈTRE

L'ampèremètre est un appareil de mesure de l'intensité du courant. Il doit être branché en série dans le circuit, comme l'illustre la figure 12.5. Pour que le branchement perturbe le moins possible, la résistance interne de l'appareil devrait être nulle. Ce n'est bien sûr pas le cas. Cependant, elle est suffisamment petite, par rapport à celles des autres éléments en série, qu'elle est négligeable dans la plupart des applications.

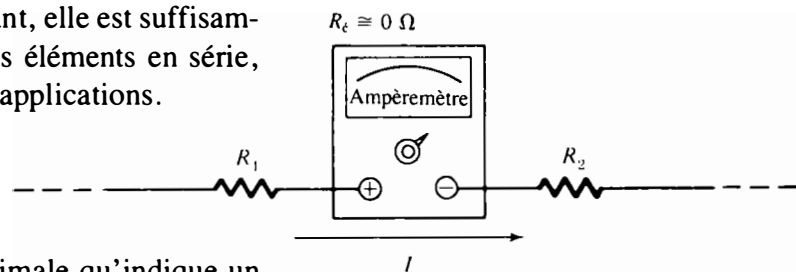


FIG. 12.5

En principe, l'intensité de courant maximale qu'indique un appareil à cadre mobile est égale à la sensibilité en courant de ce dernier. En pratique, l'appareil indique des courants d'intensité plus grande: il suffit de lui ajouter une branche résistante, comme l'illustre la figure. Ce montage en parallèle du cadre et d'une résistance constitue l'essentiel d'un ampèremètre.

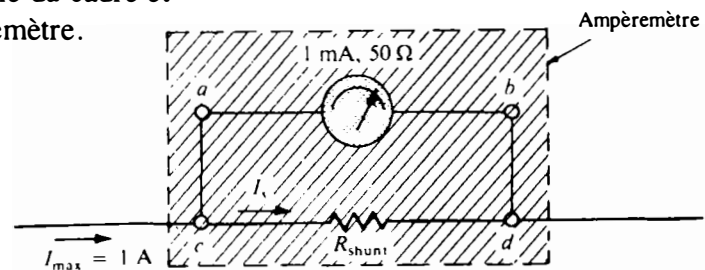


FIG. 12.6 Ampèremètre de base.

La résistance  $R_{shunt}$  de l'ampèremètre illustré à la figure 12.6 ne laisse passer qu'un courant de 1 mA dans le cadre lorsque le courant traversant l'appareil est de 1 A. Si ce dernier est inférieur à 1 A, l'équipage mobile est parcouru par un courant plus petit que 1 mA et son aiguille n'est donc plus déviée sur toute l'échelle.

La tension aux bornes d'éléments montés en parallèle étant la même, la chute de potentiel entre les points  $a$  et  $b$  doit être égale à celle qui se produit entre  $c$  et  $d$ ; on a donc:

$$(1 \text{ mA})(50 \Omega) = (R_{shunt})(I_s)$$

et  $I_s$  doit être  $1 \text{ A} - 1 \text{ mA} = 999 \text{ mA}$  puisque le courant dans le cadre mobile est limité à 1 mA (par la loi des courants):

$$(1 \times 10^{-3})(50) = (999 \times 10^{-3})(R_{shunt})$$

$$R_{shunt} = \frac{(1 \times 10^{-3})(50)}{(999 \times 10^{-3})}$$

$$R_{shunt} \cong 0,05 \Omega$$





En règle générale:

$$R_{shunt} = \frac{R_e SC}{I_{max} - SC} \tag{12.1}$$

La figure 12.7 illustre une des façons possibles de réaliser un ampèremètre à plusieurs plages de mesure; c'est au moyen du commutateur rotatif qu'on met en circuit la résistance  $R_{shunt}$  correspondant à l'intensité maximale permise indiquée

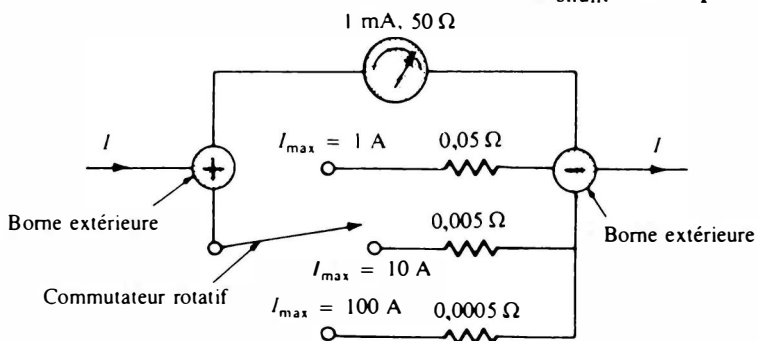
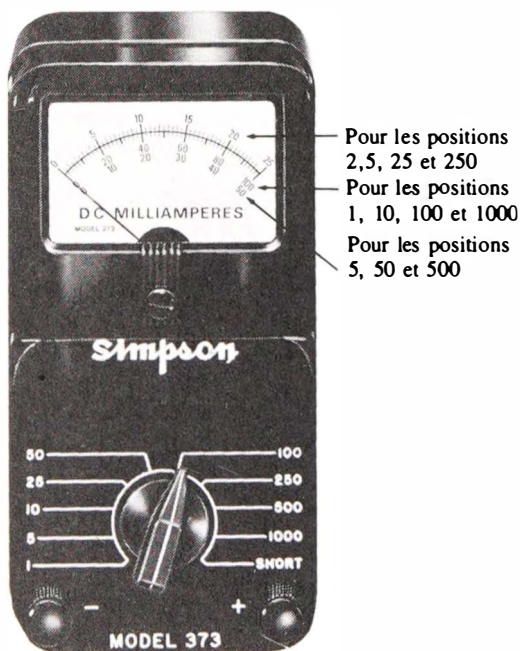


FIG. 12.7 Ampèremètre multigamme.



Courtoisie de Simpson Electric Co.

FIG. 12.8 Milliampèremètre à courant continu.

sur la face de l'appareil. Dans la plupart des ampèremètres, c'est la même échelle qui sert aux diverses plages de mesure (figure 12.8). Ainsi l'indication 375 sur l'échelle 0-50 mA correspond à un courant de 3,75 mA si le commutateur est à la position 5; s'il est par contre à la position 50, la même indication correspond à un courant de 37,5 mA.

La polarité marquée aux bornes extérieures de l'appareil est celle de la chute de potentiel qui se produit aux bornes de la résistance interne quand le courant traversant l'appareil fait dévier l'aiguille vers la droite. *L'ampèremètre doit toujours être raccordé en série avec la branche dans laquelle passe le courant à mesurer, de telle sorte que le courant conventionnel entre par sa borne positive*, comme l'illustre la figure 12.5.

## 12.4 LE VOLTMÈTRE

Le voltmètre est un appareil de mesure de la tension. Il se branche en parallèle avec le composant dont on veut mesurer la tension aux bornes, comme l'illustre la figure 12.9. Son branchement ne doit pas perturber le circuit. Aussi s'assure-t-on que sa résistance interne est très grande comparativement à celle du composant.

Une modification de la branche ajoutée à l'équipage mobile permet d'utiliser ce dernier comme voltmètre. Ses caractéristiques nominales sont alors de 50 mV ( $1 \text{ mA} \times 50 \Omega$ ) et  $50 \Omega$ , c'est-à-dire que la tension maximale que peut mesurer seul l'équipage est de 50 mV. La caractéristique de tension

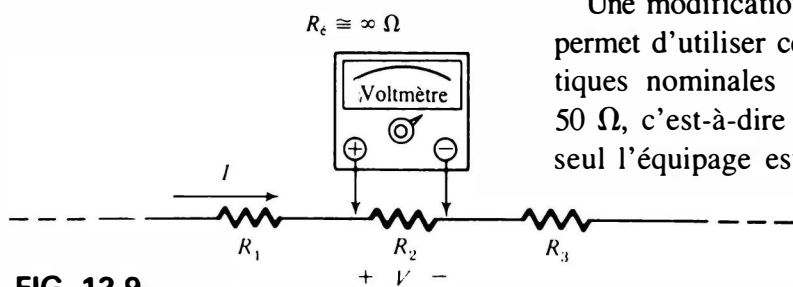


FIG. 12.9

d'un tel équipement est parfois appelé *sensibilité en tension (ST)*. La figure 12.10 représente schématiquement le voltmètre.

La résistance  $R_{\text{série}}$  est réglée de telle sorte que le courant traversant l'équipage est de 1 mA lorsque la tension maximale permise est appliquée aux bornes de l'appareil. Si la tension appliquée est moindre, l'intensité du courant devient inférieure à cette valeur nominale et l'aiguille ne dévie plus sur toute l'échelle.

L'application de la loi des tensions à la boucle illustrée à la figure 12.10 donne:

$$[10 - (1 \times 10^{-3})R_{\text{série}}] - 50 \times 10^{-3} = 0$$

$$R_{\text{série}} = \frac{10 - (50 \times 10^{-3})}{1 \times 10^{-3}}$$

de sorte que:

$$R_{\text{série}} = 9950 \Omega$$

En règle générale:

$$R_{\text{série}} = \frac{V_{\text{max}} - ST}{SC} \tag{12.2}$$

La figure 12.11 représente une des façons possibles de réaliser un voltmètre à plusieurs plages de mesure. Lorsque le commutateur rotatif est sur la borne 10 V,  $R_{\text{série}} = 9,950 \text{ k}\Omega$ ; lorsqu'il est sur la borne 50 V,  $R_{\text{série}} = 40 \text{ k}\Omega + 9,950 \text{ k}\Omega = 49,950 \text{ k}\Omega$ , et sur la borne 100 V,  $R_{\text{série}} = 50 \text{ k}\Omega + 40 \text{ k}\Omega + 9,950 \text{ k}\Omega = 99,950 \text{ k}\Omega$ .

Dans la plupart des voltmètres, la même échelle sert aux diverses plages de mesure (figure 12.12).

Pour que l'aiguille dévie vers la droite, la polarité de la chute de potentiel mesurée doit correspondre à celle des bornes de l'appareil (figure 12.9).

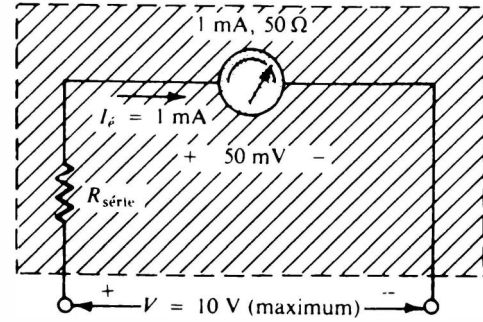
## 12.5 SENSIBILITÉ NOMINALE

La sensibilité nominale, en ohms/volt, d'un voltmètre à courant continu est habituellement indiquée sous l'échelle. Elle permet de déterminer la sensibilité en courant (SC) de l'équipage mobile de l'appareil ainsi que la résistance entre les bornes extérieures pour toutes les plages de mesure. La sensibilité nominale est liée à la sensibilité en courant par la relation:

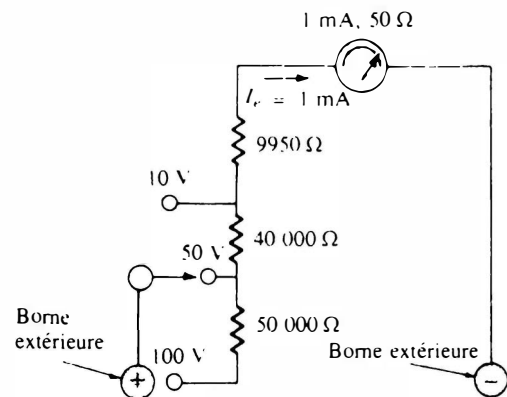
$$SC = \frac{1}{\text{Sensibilité nominale}} \tag{12.3}$$

Ainsi, pour un voltmètre d'une sensibilité nominale de 1000  $\Omega/V$ :

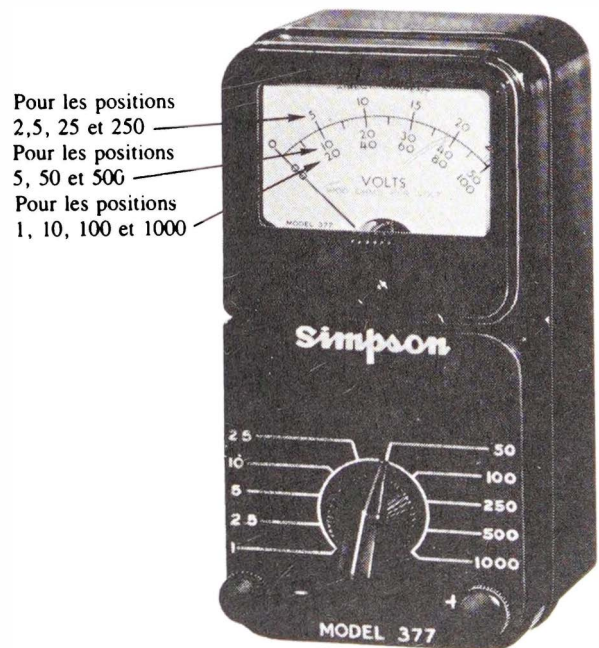
$$SC = \frac{1}{1000} = 1 \text{ mA}$$



**FIG. 12.10**



**FIG. 12.11 Voltmètre multigamme.**



*Courtoisie de Simpson Electric Co.*

**FIG. 12.12 Voltmètre à courant continu.**



et, pour une sensibilité nominale de 20 000  $\Omega/V$ :

$$SC = \frac{1}{20\,000} = 50 \mu A$$

La résistance de chaque plage de mesure se détermine par simple multiplication de l'indication (tension) maximale de l'échelle par la sensibilité nominale. Ainsi la résistance interne de la plage 0-100 V d'un voltmètre d'une sensibilité nominale de 1000  $\Omega/V$  est:

$$\text{résistance interne} = (100)(1000) = 100 \text{ k}\Omega$$

Pour la plage 0-10 V du même voltmètre:

$$\text{résistance interne} = (10)(1000) = 10 \text{ k}\Omega$$

En règle générale:

$$R_{\text{gamme}} = (V_{\text{max}}) (\text{sensibilité nominale}) \quad (12.4)$$

ou encore:

$$R_{\text{gamme}} = \frac{V_{\text{max}}}{SC} \quad (12.5)$$

Notons que la résistance interne est indépendante de la tension mesurée; elle n'est déterminée que par l'indication maximale possible. Ainsi, pour l'appareil ci-dessus, la résistance interne de la gamme 0-10 V est de 10 k $\Omega$ , même si l'aiguille indique 2 V au cours d'une mesure particulière.

## 12.6 L'OHMMÈTRE SÉRIE

En règle générale, l'ohmmètre est conçu pour mesurer les petites, moyennes et grandes résistances. L'ohmmètre série, le plus courant et le premier que nous décrivons, diffère de l'ampèremètre et du voltmètre en ce qu'il fournit une indication maximale lorsque la grandeur mesurée est nulle (résistance de 0  $\Omega$ ) et une indication nulle lorsque la grandeur mesurée est infinie. Il sert surtout à la mesure de résistances intermédiaires. La figure 12.13 représente schématiquement l'ohmmètre série. L'appareil tient son nom du fait que la résistance inconnue est placée en série avec l'équipage mobile.

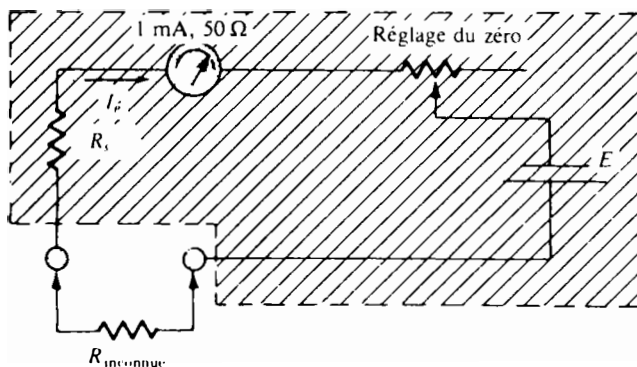


FIG. 12.13 Ohmmètre série.



La résistance  $R_s$  est ajustée pour laisser passer dans le circuit un courant égal à la sensibilité en courant (1 mA) de l'équipage mobile. Pour déterminer  $R_s$ , on court-circuite les bornes de l'appareil et on ajuste le réglage du zéro à la moitié de sa valeur maximale (de sorte que les écarts causés par le vieillissement des composants puissent être compensés). On a donc la relation:

$$I_e \text{ (déviation maximale)} = SC = \frac{E}{R_s + R_i + \frac{\text{réglage du zéro}}{2}}$$

(12.6)

de sorte que:

$$R_s = \frac{E}{SC} - R_i - \frac{\text{réglage du zéro}}{2}$$

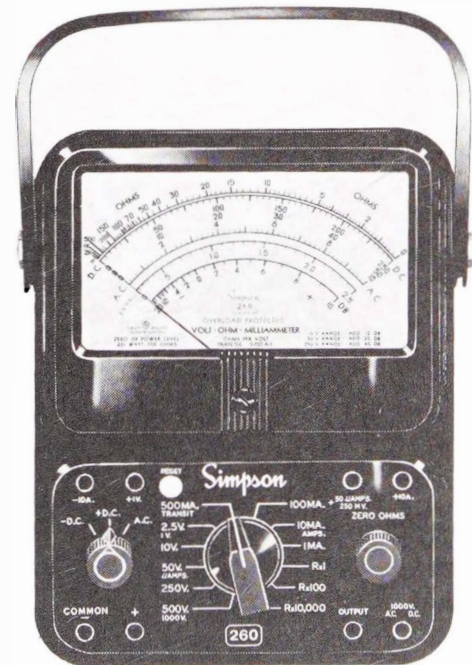
(12.7)

Lorsqu'une résistance inconnue est raccordée entre les bornes, le courant chute et l'aiguille ne dévie plus sur toute l'échelle. L'aiguille demeure sur le zéro uniquement quand les bornes sont laissées en circuit ouvert (résistance infinie), aucun courant ne passant dans l'appareil.

*Soulignons qu'un ohmmètre ne doit jamais être raccordé à un circuit sous tension.* Le potentiel d'un tel circuit pourrait être suffisant pour faire passer dans l'équipage mobile un courant beaucoup plus grand que le courant maximal permis et endommager ainsi l'appareil. En outre, l'indication de l'appareil n'aurait aucun sens, l'équipage mobile étant étalonné en fonction de la f.é.m. interne.

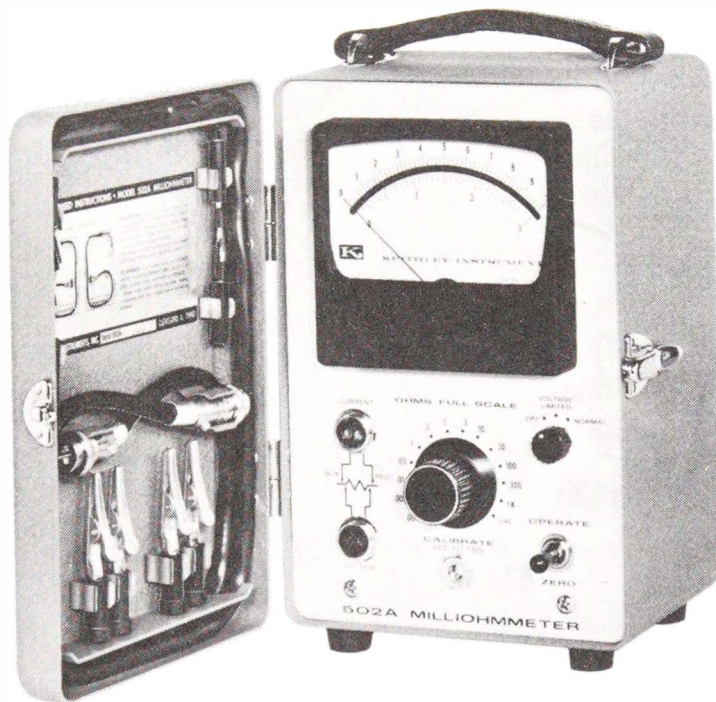
La figure 12.14 illustre l'échelle du circuit ohmmétrique multigamme de l'appareil Simpson 260. Cette échelle est non linéaire. Pour réaliser un ohmmètre multigamme, on fait appel à un réseau diviseur de tension semblable à celui du voltmètre multigamme.

La figure 12.15 représente un appareil conçu pour mesurer de très petites résistances. Le schéma de base de l'appareil est beaucoup plus complexe que celui de l'appareil décrit antérieurement. Cet appareil comprend des composants électroniques qui éliminent les erreurs introduites par la résistance des contacts et des sondes. Il est néanmoins semblable en deux points à l'appareil déjà décrit: il est portable et alimenté en courant continu par une pile. À remarquer les sondes spéciales conçues pour réduire le plus possible la résistance parasite. À remarquer aussi que le maximum de l'échelle peut être réglé à une très petite valeur, soit  $0,00352 \Omega$  (environ  $3 \text{ m}\Omega$ ).



Courtoisie de Simpson Electric Co.

**FIG. 12.14** Échelle d'un ohmmètre série.



Courtoisie de Keithley Instruments, Inc.

FIG. 12.15 Milliohmmètre.

## 12.7 LE MÉGOHMMÈTRE

Le mégohmmètre est un appareil utilisé pour mesurer de très grandes valeurs ohmiques; on l'appelle ainsi parce que les résistances mesurées sont habituellement de l'ordre du mégohm. Il sert surtout à contrôler l'isolement des conducteurs des réseaux de transmission, des machines électriques, des transformateurs, etc. L'appareil ne peut fonctionner que sous une très haute tension obtenue au moyen d'une *magnéto* incorporée. C'est en tournant la manivelle de la magnéto à une certaine vitesse qu'on génère la tension d'alimentation, 250 V, 500 V ou 1000 V par exemple. La figure 12.16 représente un mégohmmètre du commerce. La résistance inconnue doit être raccordée entre les bornes marquées *Line* et *Earth*. L'échelle de l'appareil illustré varie de 0  $\Omega$  à 2000 M $\Omega$ .



Courtoisie de James G. Biddle Co.

FIG. 12.16 Mégohmmètre.

## 12.8 LE PONT DE WHEATSTONE

Le pont de Wheatstone est un appareil ohmmétrique d'une très grande précision. La figure 12.17 en représente le schéma de principe. L'équipage mobile est un galvanomètre sensible aux petits courants passant, dans un sens ou dans l'autre, entre les points *b* et *d*. Une fois les résistances étalons  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$  ajustées pour que le galvanomètre indique le zéro, la résistance  $R_{\text{inconnue}}$  peut être déterminée en fonction des trois résistances

étalons. Le pont est en équilibre lorsque  $i_{gal} = 0$ . L'équation (7.7) établie au chapitre 7 indique comment la résistance inconnue est liée aux résistances étalons dans un pont en équilibre. Nous la reproduisons ci-dessous en fonction des résistances étalons:

$$R_{inconnue} = \frac{R_2 R_3}{R_1} \quad (12.8)$$

Cette équation est de la forme:

$$R_{inconnue} = \frac{\text{produit des résistances des branches adjacentes}}{\text{résistance de la branche opposée}} \quad (12.9)$$

Les ponts de Wheatstone se présentent sous de nombreuses formes; la figure 12.18 en illustre un. Lorsque le pont est en équilibre, la valeur de la résistance inconnue se lit directement sur l'appareil.



Courtesy of James G. Biddle Co.

FIG. 12.18 Pont de Wheatstone.

## 12.9 MULTIMÈTRES

L'ampèremètre, le voltmètre et l'ohmmètre sont souvent combinés en un seul appareil, le *multimètre*, puisqu'ils font appel au même équipement mobile. Le multimètre peut mesurer des tensions allant de 2,5 V à 500 V, des courants continus compris entre 1 mA et 500 mA et des résistances de 0 Ω à l'infini; des connecteurs spéciaux permettent d'étendre la gamme de mesure du courant continu (de 50 μA à 10 A). L'appareil Simpson 260 illustré à la figure 12.19 possède ces caractéristiques.

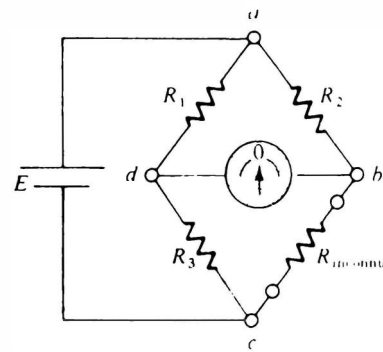


FIG. 12.17 Le pont de Wheatstone.



Courtoisie de Simpson Electric Co.

FIG. 12.19 Multimètre Simpson 260.



À la section 12.12, nous étudions les appareils numériques qui accomplissent toutes les fonctions fondamentales que nous avons décrites. Comme nous l'avons déjà souligné, ces appareils sont actuellement extrêmement populaires et jouissent d'un grand intérêt de la part des fabricants. Néanmoins, il ne faudrait pas oublier que les appareils analogiques possèdent aussi leurs avantages.

Tout d'abord, les appareils analogiques permettent, au premier coup d'oeil, de savoir s'il existe un court-circuit ou une ouverture dans un circuit. De nombreux appareils numériques sont modifiés pour fournir plus rapidement ces indications. Dans le cas de faibles variations de la grandeur mesurée, les appareils analogiques permettent de définir plus facilement les limites des variations. Les variations relatives sont aussi plus manifestes lorsque la même échelle analogique sert à deux ou plusieurs lectures. Malgré ce que certains affirment, il existe une limite à la précision avec laquelle l'échelle analogique peut être lue. Certains appareils numériques ont déjà une précision comparable, sinon supérieure, à celle des appareils analogiques. Il n'en demeure pas moins que les indications analogiques, par exemple sous la forme de graphiques et d'affichages, continueront de faire partie de l'univers scientifique et technique, de sorte que tout étudiant doit bien se familiariser avec celles-ci. L'emploi, dès les premiers cours, d'appareils analogiques de mesure du courant, de la tension et de la résistance, contribue fortement à son apprentissage.

À titre de conclusion, soulignons que les appareils numériques et les appareils analogiques ont leurs propres avantages.

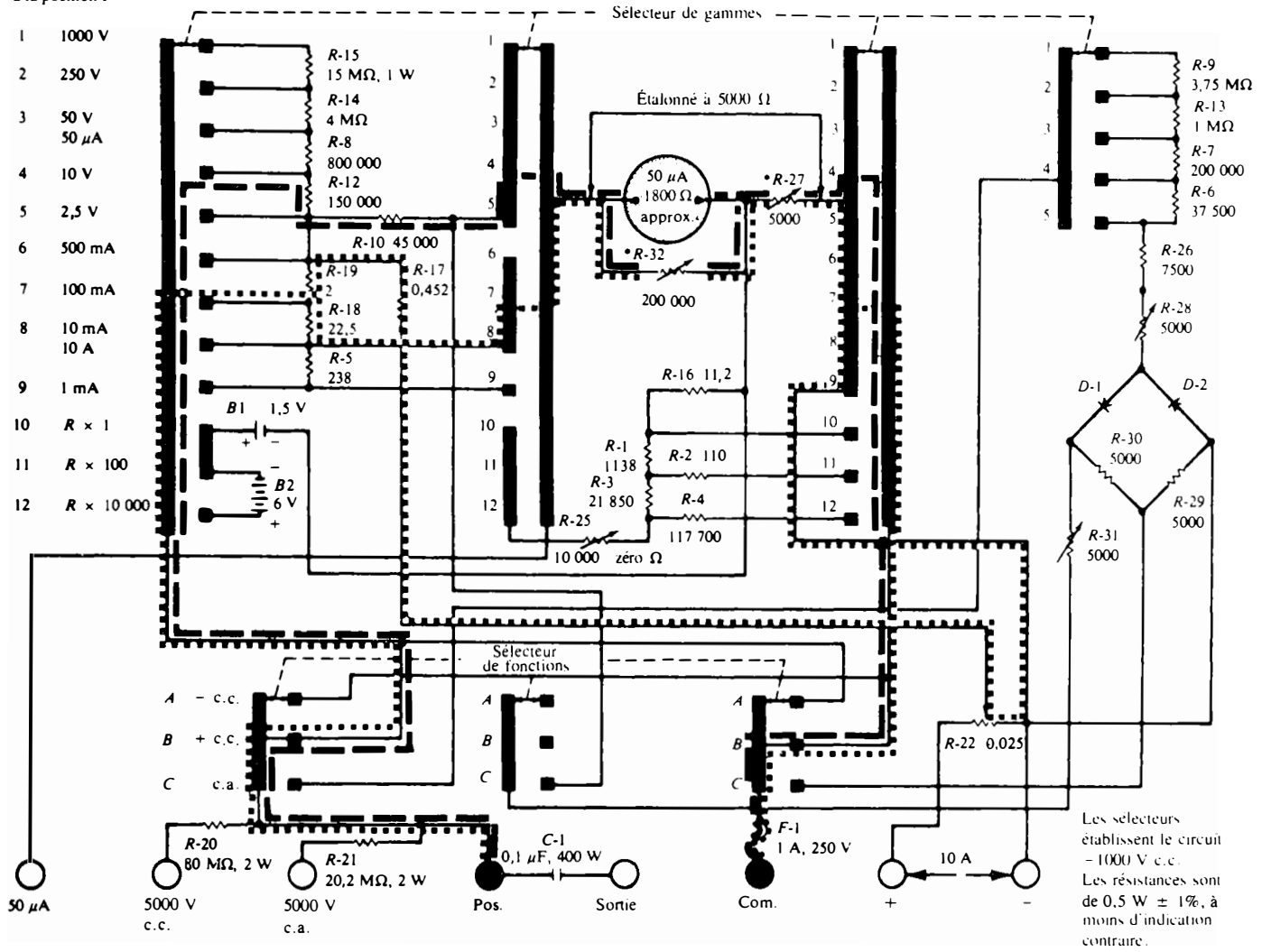
## 12.10 SCHÉMA DES APPAREILS DE MESURE

Afin d'initier l'étudiant à la lecture des schémas, nous donnons à la figure 12.20 le schéma général du multimètre Simpson 260. La ligne en tirets gras indique le circuit utilisé lorsque le multimètre sert de voltmètre à courant continu et la ligne pointillée le circuit utilisé, lorsqu'il sert d'ampèremètre à courant continu. L'échelle du voltmètre est de 10 V et celle de l'ampèremètre, de 100 mA.

Le schéma illustré nécessite quelques éclaircissements. Précisons d'abord que les quatre curseurs du sélecteur de gammes et que les trois curseurs du sélecteur de fonctions se déplacent solidairement (dans le sens vertical sur le schéma). Soulignons ensuite que les bandes noires représentent des surfaces conductrices continues. La résistance variable  $R-32$  est réglée pour qu'il passe un courant de  $50 \mu\text{A}$  dans l'équipage mobile et la résistance variable  $R-27$ , pour que la résistance totale entre les deux points repérés par des flèches soit de  $5000 \Omega$ . En suivant attentivement le trajet en tirets gras, nous pouvons dessiner le circuit illustré à la figure 12.21.



Les curseurs sont à la position I



\* R-32 est réglée pour laisser passer un courant de 50 μA. R-27 est ensuite réglée pour que la résistance du circuit soit de 5000 Ω.

Courtoisie de Simpson Electric Co.

FIG. 12.20 Schéma général du multi-mètre Simpson 260, séries 4 et 4m.

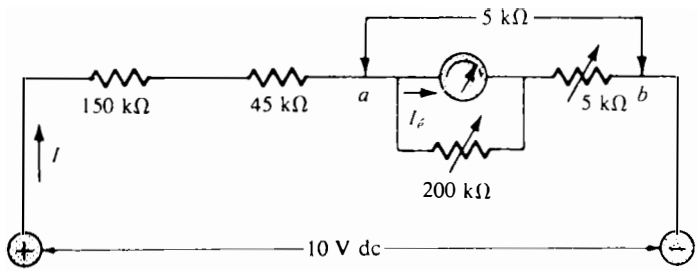


FIG. 12.21 Voltmètre de 10 V c.c. (Simpson 260).

La résistance entre les points a et b étant de 5 kΩ, la résistance totale du circuit est de 200 kΩ. Le courant I passant dans le circuit est donc:

$$I = \frac{E}{R} = \frac{10}{200 \times 10^3} = 50 \mu A$$





Dans le cas idéal où toutes les résistances ont la valeur indiquée et où le courant est exactement de  $50 \mu\text{A}$ , la résistance de  $200 \text{ k}\Omega$  est réglée à son maximum, de sorte que la plus grande partie du courant à mesurer passe dans l'équipage mobile.

La figure 12.22 illustre le circuit milliampèremétrique à courant continu de  $100 \text{ mA}$  du multimètre. Le courant maximal pouvant passer dans l'équipage mobile est:

$$I_1 \cong I_{\phi} = \frac{(2,477)(100 \times 10^{-3})}{(5022,5 + 2,477)} = 49,3 \mu\text{A}$$

soit  $50 \mu\text{A}$  à toutes fins pratiques.

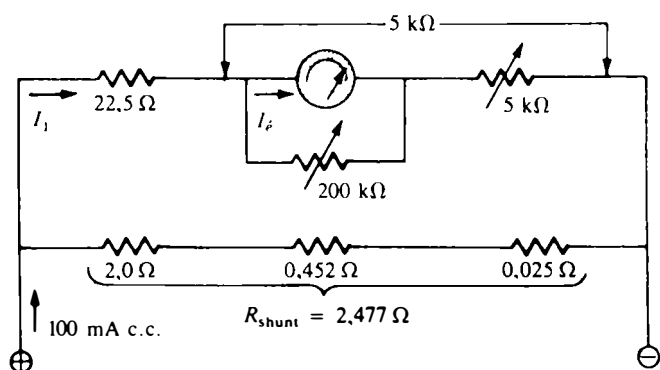


FIG. 12.22 Milliampèremètre de  $100 \text{ mA}$  (Simpson 260).

## 12.11 INFLUENCE PERTURBATRICE ET MARGE D'ERREUR

Le branchement d'un ampèremètre ou d'un voltmètre à un circuit y crée toujours une perturbation. Dans le cas des ampèremètres, cette perturbation du circuit est causée par le branchement en série de la résistance interne de l'appareil (figure 12.23).

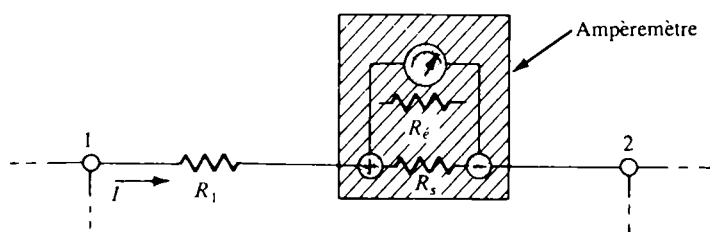


FIG. 12.23 Influence perturbatrice de l'ampèremètre.

Lorsque l'échelle 0-1 A est utilisée, la résistance ajoutée au circuit de l'ampèremètre illustré à la figure 12.6 est:

$$\frac{(50)(0,05)}{50 + 0,05} \cong 0,05 \Omega$$

Il en est ainsi de la plupart des ampèremètres: leur résistance interne est si petite qu'on peut la négliger, exception faite des cas où les résistances du circuit externe sont du même ordre de grandeur.

La résistance interne des voltmètres est beaucoup plus grande que celle des ampèremètres, mais elle se raccorde en parallèle

avec la branche du circuit dont on veut mesurer la tension (figure 12.24).

La résistance interne de l'appareil illustré à la figure 12.11, lorsque l'échelle 0-10 V est utilisée, est  $R_s + R_e = 10 \text{ k}\Omega$ ; l'application de la règle du diviseur de courant donne:

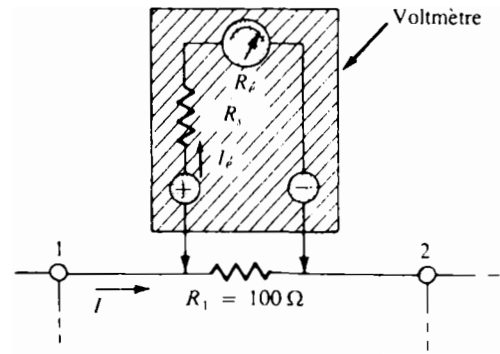
$$i_e = \frac{100I}{100 + 10\,000} \cong 0,01I$$

Le courant pris au circuit par le voltmètre est donc habituellement très petit en raison de la valeur élevée de la résistance interne. Plus grande est la résistance interne, plus petit est le courant capté et meilleure est la précision de la mesure. Rappelons que la sensibilité typique d'un multimètre est de  $20\,000 \text{ }\Omega/\text{V}$  et que le voltmètre électronique typique présente en courant continu, sur toutes ses échelles, une résistance d'entrée fixe de  $10 \text{ M}\Omega$ . Sur leur échelle 0-100 V, les deux appareils présentent donc des résistances de  $2 \text{ M}\Omega$  et de  $10 \text{ M}\Omega$ , respectivement.

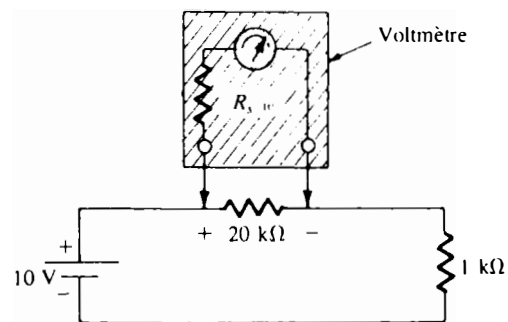
La marge d'erreur relative d'un appareil exprime la précision des indications que fournit l'appareil. Ainsi une marge d'erreur de 2% signifie qu'entre 10% et 100% du maximum de l'échelle utilisée, les indications sont précises à 2% près du maximum de l'échelle (on suppose que les indications en deçà de 10% de l'échelle sont inexactes, en raison de la façon dont est réalisé l'appareil). La valeur réelle de la tension que l'appareil indique comme 20 V sur son échelle 0-100 V se situe donc entre 18 V et 22 V ( $20 \text{ V} \pm 2\%$  de 100 V). Sur l'échelle 0-25 V du même appareil, la valeur réelle de la tension indiquée comme 20 V serait comprise entre 19,5 V et 20,5 V. Pour obtenir des indications les plus exactes possible, on a donc intérêt à choisir l'échelle dont le maximum s'approche de la tension à mesurer.

La sensibilité du voltmètre est par conséquent un facteur dont il faut très souvent tenir compte. Par exemple, le choix d'un appareil d'une sensibilité de  $1000 \text{ }\Omega/\text{V}$ , pour mesurer la tension aux bornes de la résistance de  $20 \text{ k}\Omega$  du circuit illustré à la figure 12.25, introduit au départ une erreur appréciable, dont l'importance dépend de l'échelle utilisée.

Sur l'échelle 0-10 V, la résistance interne du voltmètre est  $(1000)(10) = 10 \text{ k}\Omega$ . La résistance totale du montage parallèle de la résistance interne et de la résistance de  $20 \text{ k}\Omega$  étant de  $6,7 \text{ k}\Omega$ , la tension aux bornes de la résistance de  $20 \text{ k}\Omega$  chute à  $6,7(10)/(6,7 + 1) = 8,7 \text{ V}$ , alors qu'elle était  $20(10)/(20 + 1) = 9,52 \text{ V}$  avant le branchement de l'appareil. Le branchement d'un voltmètre d'une sensibilité de  $20\,000 \text{ }\Omega/\text{V}$  aurait fait chuter la tension à seulement  $18,2(10)/(18,2 + 1) = 9,47 \text{ V}$ , valeur qui est certes plus représentative de la tension originale de  $9,52 \text{ V}$ . On peut donc conclure que plus grande est la sensibilité du voltmètre, plus grande est l'exactitude de la mesure.



**FIG. 12.24** Influence perturbatrice du voltmètre.



**FIG. 12.25**

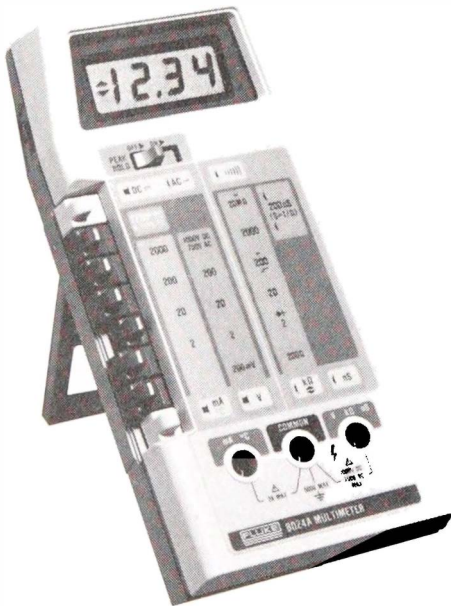


Quant à l'ohmmètre, il est le plus exact dans le milieu de son échelle. Les petites indications sont inexactes de par la réalisation de l'appareil, les grandes le sont en raison de la non-linéarité de l'échelle.

## 12.12 APPAREILS À INDICATION NUMÉRIQUE

Le *multimètre* portatif illustré à la figure 12.26a offre plusieurs réglages permettant de mesurer la résistance sur des échelles dont les maximums varient de 200  $\Omega$  (résolution de 0,1  $\Omega$ ) à 20 M $\Omega$  (résolution de 10 k $\Omega$ ). La résolution est tout simplement la précision relative de l'appareil; elle est définie par rapport au maximum de l'échelle. Cet appareil permet aussi de mesurer des tensions continues sur des échelles dont les maximums varient de 200 mV à 1000 V, et des intensités continues dont les maximums varient de 2 mA à 2,0 A. À noter sur le boîtier la présence des nanosiemens (1 nS =  $10^{-9}$  S) qui servent à mesurer de très grandes résistances d'isolement. Une valeur de 20 nS correspond à une résistance de  $1/(20 \times 10^{-9}) = 50$  M $\Omega$ . Une vérification de continuité positive produit un top et fait apparaître une flèche pointée vers le bas sur l'affichage à cristaux liquides. La possibilité de faire une telle vérification était un des avantages des appareils analogiques sur les appareils numériques. L'appareil peut enfin servir à mesurer la température en degrés Celsius (entre  $-20^{\circ}\text{C}$  et  $300^{\circ}\text{C}$ ), lorsqu'il est combiné à un thermocouple de type K.

La figure 12.26b illustre un appareil de laboratoire fabriqué par la même société. Cet appareil peut mesurer l'intensité des



(a)



(b)

Courtoisie de John Fluke Manufacturing Co., Inc.

FIG. 12.26 Multimètres numériques.

courants alternatifs et continus sur des échelles dont les maximums varient de 200  $\mu\text{A}$  à 2,0 A. Il permet aussi d'effectuer des mesures en décibels (dB) et offre, à cette fin, 16 impédances de référence, comparativement à une seule (600  $\Omega$ ) dans le cas des appareils analogiques. L'appareil possède de nombreuses autres fonctions que nous nous dispenserons de décrire.

Les appareils numériques n'ont pas d'équipage mobile. La mesure des grandeurs se fait par le biais de circuits intégrés ou de microprocesseurs qui comparent la grandeur mesurée à une référence quelconque. Le microprocesseur commande l'allumage de chiffres à l'écran, en fonction du résultat de la comparaison; il détermine également la position de la virgule décimale. La référence interne est établie à l'aide d'une pile interne (non nécessaire dans les voltmètres et ampèremètres analogiques). Dans le cas de l'appareil illustré à la figure 12.26a, il s'agit d'une pile ordinaire de 9 V, alors que dans le cas de l'appareil illustré à la figure 12.26b, il s'agit d'un groupe de piles rechargeables.

La figure 12.27 illustre deux appareils qui servent à mesurer de très petits courants et de très petites tensions. Le même



*Courtoisie de Keithley Instruments, Inc.*

**FIG. 12.27** (a) Picoampèremètre et (b) nanovoltmètre.



fabricant offre aussi des appareils analogiques fonctionnant sensiblement dans les mêmes gammes.

La figure 12.28 représente un appareil qui mesure les résistances, les inductances et les capacités avec une précision de 0,02%. La conception de l'appareil permet à quiconque de s'en servir sans qu'il soit nécessaire de recourir aux instructions.



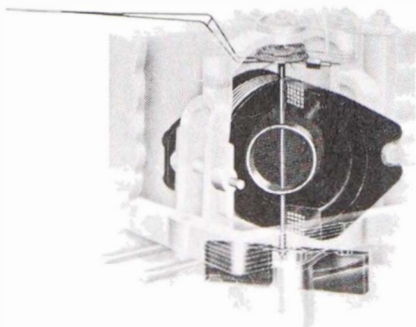
Courtoisie de GenRad, Inc.

FIG. 12.28 Appareil DigiBridge.

## 12.13 LE WATTMÈTRE

Le wattmètre est un appareil de mesure de la puissance. Il fait appel à un *équipage électrodynamométrique*, comme celui illustré à la figure 12.29, et non à un cadre mobile. Cet équipage est aussi employé dans des ampèremètres et des voltmètres mais est, en règle générale, plus coûteux que le cadre mobile.

Dans le cadre mobile, la bobine tourne dans un champ magnétique stable établi par un aimant permanent. Dans l'équipage électrodynamométrique, une bobine tourne dans un champ magnétique engendré par le courant passant dans une bobine fixe. L'interaction entre les flux générés par les deux bobines exerce un couple sur la bobine mobile à laquelle est attachée une aiguille. Dans l'ampèremètre et le voltmètre, le couple est directement proportionnel au produit des deux flux. Ces derniers étant fonction de l'intensité du courant, le couple est donc directement proportionnel au produit des courants dans les bobines. C'est pourquoi l'échelle de l'ampèremètre ou du voltmètre électrodynamométrique est à graduation quadratique. Par ailleurs, l'inversion du sens du courant mesuré n'influe pas sur les indications des appareils électrodynamométriques puisque les flux des bobines fixe et mobile sont inversés en même temps. Pour cette raison, les appareils à courant alternatif peuvent aussi s'utiliser en courant continu.



Courtoisie de Weston Instruments Inc.

FIG. 12.29 Équipage électrodynamométrique.

Étant extrêmement sensible, l'équipage électrodynamométrique doit être protégé contre les surtensions et les surintensités. On emploie à cette fin un shunt dans l'ampèremètre et un multiplicateur dans le voltmètre. Dans le wattmètre (figure 12.30), le courant qui passe dans les bobines fixes est le courant de ligne, alors que le courant dans la bobine mobile est obtenu à partir de la tension de ligne. L'échelle, graduée en watts, est linéaire. La figure 12.31 illustre un wattmètre électrodynamométrique typique.

Pour que son aiguille dévie vers la droite, le wattmètre doit être branché au circuit de la façon illustrée à la figure 12.32. Les indications de certains wattmètres sont toujours supérieures à la puissance réelle fournie à la charge. L'écart est égal à la consommation de la bobine mobile, soit  $V_{lm}^2 / R_{lm}$ ; cet écart est important et il est conseillé d'en tenir compte dans l'analyse des données obtenues au moyen de l'appareil. De nombreux wattmètres sont cependant compensés; les données fournies par ces derniers peuvent donc être utilisées brutes. Le wattmètre doit toujours être branché au circuit de sorte que sa bobine fixe soit en série et sa bobine mobile en parallèle avec la branche dont on veut mesurer la puissance.

La puissance fournie à la résistance  $R_1$  dans le circuit se mesure en branchant le wattmètre de la façon indiquée sur le circuit illustré à la figure 12.33a. Pour mesurer la puissance fournie à tout le réseau, il faut le brancher comme l'indique la figure 12.33b.

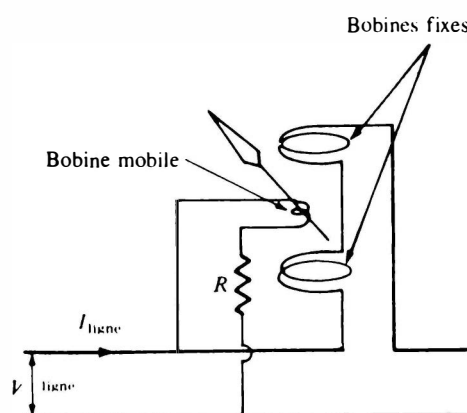
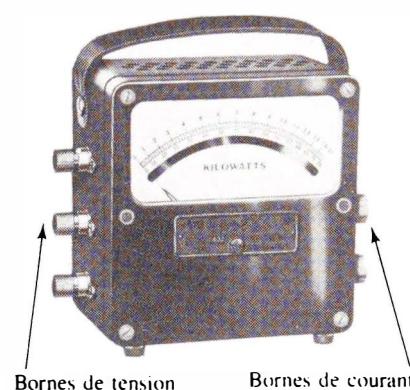


FIG. 12.30



Courtoisie de Weston Instruments Inc.

FIG. 12.31 Wattmètre.

## PROBLÈMES

### Section 12.3

1. Les caractéristiques d'un cadre mobile sont de 1 mA et de 100 Ω.
  - a. Quelle est sa sensibilité en courant?
  - b. Dessinez un ampèremètre de 20 A utilisant ce cadre (indiquez la valeur des composants).
2. À partir d'un cadre mobile de 50 μA et de 1000 Ω, dessinez un milliampèremètre multigamme (25 mA, 50 mA et 100 mA). Indiquez la valeur des composants.

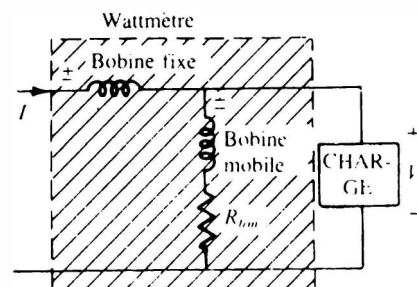


FIG. 12.32

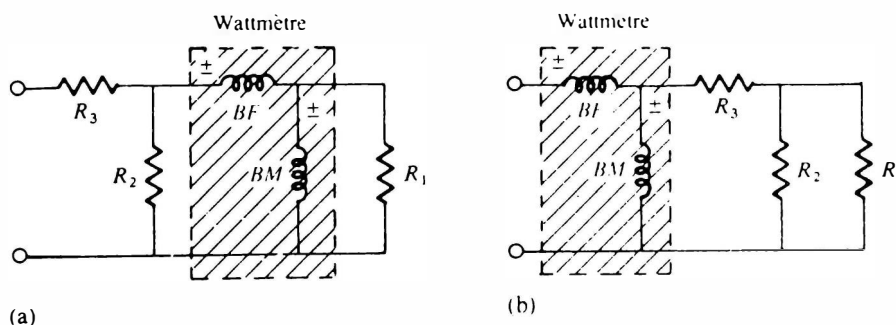


FIG. 12.33



## Section 12.4

3. Les caractéristiques d'un cadre mobile sont de  $50 \mu\text{A}$  et de  $1000 \Omega$ .
  - a. Dessinez un voltmètre continu de  $15 \text{ V}$  utilisant ce cadre (indiquez la valeur des composants).
  - b. Quelle est la sensibilité nominale du voltmètre?
4. À partir d'un cadre mobile de  $1 \text{ mA}$  et de  $100 \Omega$ , dessinez un voltmètre multigamme ( $5 \text{ V}$ ,  $50 \text{ V}$  et  $500 \text{ V}$ ). Indiquez la valeur des composants.
5. Sur l'échelle  $0-0,5 \text{ V}$ , la résistance interne d'un voltmètre numérique est de  $10 \text{ M}\Omega$ . Quelle doit être la sensibilité en courant d'un voltmètre à cadre mobile pour que, sur la même échelle, sa résistance interne soit identique?

## Section 12.6

- \*6. a. Dessinez un ohmmètre série à partir des éléments suivants: un équipage mobile de  $100 \mu\text{A}$  et de  $1000 \Omega$ , une résistance de réglage du zéro d'une valeur maximale de  $2 \text{ k}\Omega$ , une pile de  $3 \text{ V}$  et une résistance série dont la valeur est à déterminer.
  - b. Calculez la résistance qu'il faut pour obtenir une déviation maximale, une déviation de  $75\%$ , une déviation de  $50\%$  et une déviation de  $25\%$ .
  - c. En s'inspirant des résultats obtenus en b), tracez l'échelle de l'ohmmètre.

## Section 12.7

7. Décrivez comment est réalisé un mégohmmètre et donnez-en le principe de fonctionnement.

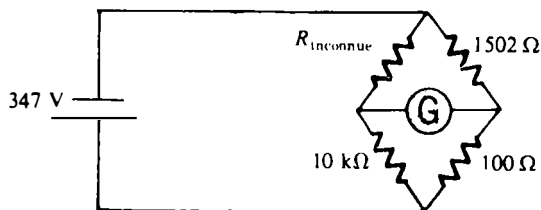


FIG. 12.34

## Section 12.8

8. Voir le pont de Wheatstone illustré à la figure 12.34. Quelle doit être la valeur de la résistance inconnue pour que le pont soit à l'équilibre?

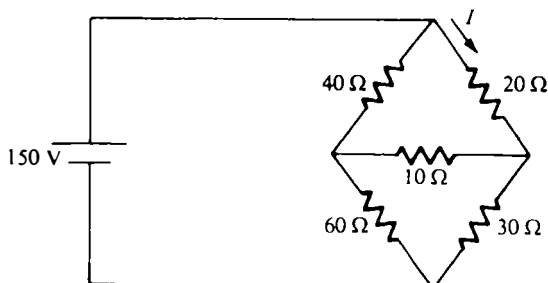


FIG. 12.35

9. Calculez l'intensité du courant  $I$  dans le réseau illustré à la figure 12.35.



## Section 12.10

- \*10. a. À l'aide du diagramme illustré à la figure 12.20, déterminez le circuit interne du multimètre Simpson 260, qui sert de voltmètre à courant continu de 1000 V.
- b. Calculez l'intensité du courant qui traverse l'équipage mobile, lorsqu'une tension continue de 1000 V est appliquée aux bornes de l'appareil.
- c. Refaites la partie b) dans le cas d'une tension appliquée de 500 V.
- \*11. a. À l'aide du diagramme illustré à la figure 12.20, déterminez le circuit interne du multimètre Simpson 260 qui sert de milliampèremètre à courant continu de 1 mA.
- b. Calculez l'intensité du courant qui traverse l'équipage mobile, lorsque l'intensité du courant continu mesuré est de 1 mA.
- c. Refaites la partie b) dans le cas d'un courant continu de 0,5 mA.
- \*12. a. À l'aide du diagramme illustré à la figure 12.20, déterminez le circuit interne du multimètre Simpson 260 qui sert d'ohmmètre  $R \times 1$ .
- b. Calculez l'intensité du courant qui traverse l'équipage mobile, lorsque les bornes extérieures de l'appareil sont court-circuitées (le réglage du zéro est à la moitié de son maximum).
- \*13. Refaites le problème 12 dans le cas du circuit qui sert d'ohmmètre  $R \times 10\,000$ .

## Section 12.11

14. Voir le circuit illustré à la figure 12.36.
- a. Déterminez la tension aux bornes de chacune des résistances.
- b. Quelle est la tension indiquée par un voltmètre à courant continu d'une sensibilité nominale de  $1000\ \Omega/\text{V}$ , lorsqu'il est branché aux bornes de la résistance  $R_1$ , sur son échelle 0-50 V?
- c. Comparez les résultats obtenus en a) et en b).
- d. Refaites les parties b) et c) pour l'échelle 0-100 V.
15. Refaites le problème 14 dans le cas d'un voltmètre à courant continu, dont la sensibilité nominale est de  $20\,000\ \Omega/\text{V}$ .
16. Refaites le problème 14 dans le cas d'un voltmètre numérique, dont la résistance d'entrée est de  $10\ \text{M}\Omega$ .

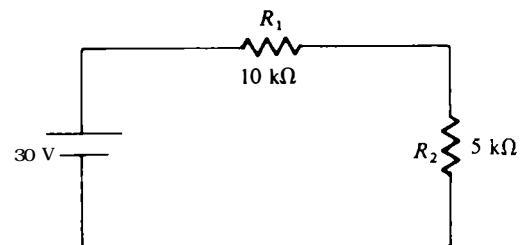


FIG. 12.36

## Section 12.13

17. a. Raccordez un wattmètre au circuit illustré à la figure 12.37 de façon à pouvoir mesurer la puissance fournie à la résistance de  $40\ \Omega$ . Indiquez le raccordement des bobines fixe et mobile.
- b. Calculez l'écart entre la puissance indiquée et la puissance réelle, sachant que la résistance de la bobine mobile est de  $10\ \text{k}\Omega$ .
- c. Refaites la partie b) dans le cas d'une résistance de  $26\ \Omega$ .

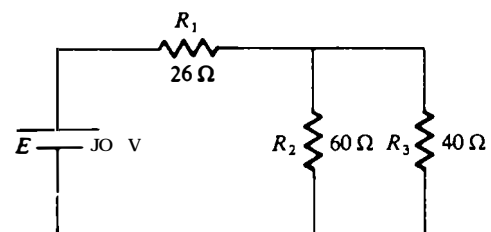


FIG. 12.37





## GLOSSAIRE

**Ampèremètre** Appareil de mesure de l'intensité du courant passant dans un circuit auquel il est raccordé en série.

**Appareil numérique** Appareil dont l'affichage est numérique.

**Cadre mobile** Bobine à noyau de fer montée sur des pivots entre les pôles d'un aimant permanent. Une aiguille solidaire du noyau indique l'intensité du courant passant dans la bobine.

**Équipage électrodynamométrique** Équipage constitué de bobines fixes et d'une bobine mobile pouvant servir à la fabrication des wattmètres, des ampèremètres et des voltmètres.

**Mégohmmètre** Appareil de mesure de très grandes résistances, habituellement de l'ordre du mégohm.

**Multimètre** Appareil mesurant, dans plusieurs gammes, l'intensité du courant, la tension et la résistance.

**Ohmmètre série** Appareil de mesure de la résistance dont l'équipage est raccordé en série avec la résistance inconnue.

**Ohmmètre shunt** Appareil de mesure de la résistance dont l'équipage est raccordé en parallèle avec la résistance inconnue.

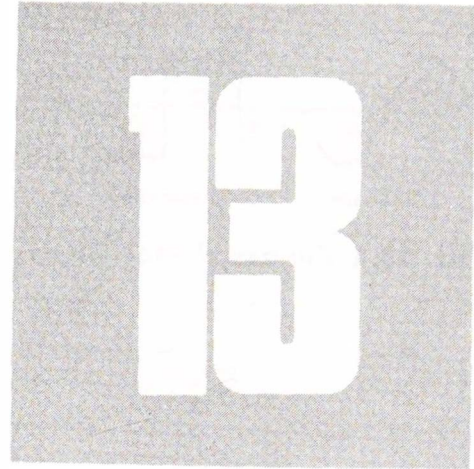
**Pont de Wheatstone** Appareil à pont qui, par équilibrage, permet de déterminer la valeur d'une résistance inconnue.

**Sensibilité nominale** Caractéristique nominale déterminant la sensibilité en courant d'un équipage et la résistance interne de l'appareil de mesure.

**Voltmètre** Appareil de mesure de la tension aux bornes d'un composant auquel il est raccordé en parallèle.

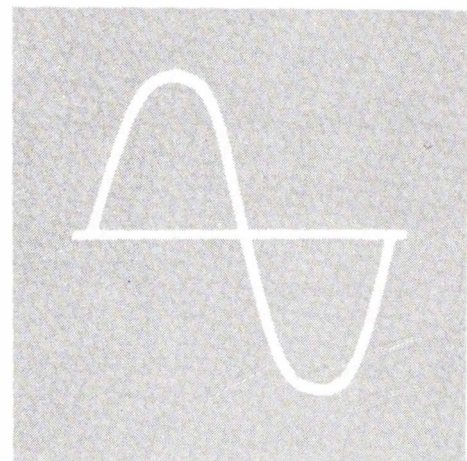
**Wattmètre** Appareil de mesure de la puissance fournie à un composant par détection de la tension présente aux bornes du composant et de l'intensité du courant le traversant.

# COURANT ALTERNATIF SINUSOÏDAL



## 13.1 INTRODUCTION

Jusqu'à maintenant, nous n'avons analysé que des réseaux à courant continu, c'est-à-dire des réseaux dont les courants et les tensions sont fixes, exception faite des effets transitoires. Nous entreprenons maintenant l'étude des réseaux dont la grandeur de la source de f.é.m. varie d'une façon déterminée. Nous nous intéressons plus particulièrement à une f.é.m. qui varie par rapport au temps et qui est fournie commercialement: la *tension alternative* ou *tension c.a.* (les lettres *c.a.* sont l'abréviation de l'expression *courant alternatif*). Rigoureusement, il ne suffit pas de dire d'une *tension* (ou d'un *courant*) qu'elle est *alternative* pour la décrire entièrement. Chacune des formes d'onde illustrées à la figure 13.1 est une forme d'onde alternative usuelle. Le terme *alternatif* indique seulement que la forme d'onde oscille entre deux valeurs déterminées. Il faudrait donc, pour décrire correctement un signal, préciser si la forme d'onde est *sinusoïdale*, *carrée* ou *triangulaire*. La forme d'onde *sinusoïdale* illustrée à la figure 13.1 est cependant la plus usuelle; c'est celle-ci que nous désignerons par les expressions *tension alternative* (*tension c.a.*) ou *courant alternatif* (*courant c.a.*), cette convention ne donnant lieu à aucune confusion. Dans le cas des autres formes d'onde illustrées à la figure 13.1, nous les désignons toujours au moyen du qualificatif approprié: forme d'onde *carrée* ou forme d'onde *triangulaire*.



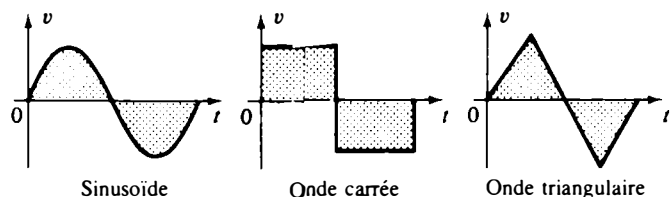


FIG. 13.1 Formes d'onde alternatives.

## 13.2 GÉNÉRATION DE LA TENSION ALTERNATIVE SINUSOÏDALE

Nous verrons en détail, dans le présent chapitre et dans ceux qui suivront, les caractéristiques de la tension sinusoïdale et du courant sinusoïdal, ainsi que leurs effets sur les éléments fondamentaux déjà étudiés: la résistance, la bobine et le condensateur. Voyons d'abord comment cette tension et ce courant sont produits. La plupart des étudiants qui se destinent à une carrière technique connaissent probablement déjà l'*alternateur*. Il s'agit d'une machine électromécanique capable de convertir de l'énergie mécanique en énergie électrique. La figure 13.2 représente schématiquement un alternateur élémentaire. Il est constitué de deux éléments principaux: le *rotor* et le *stator*. Le rotor est mobile; il tourne à l'intérieur du stator, qui est stationnaire. Lorsque le rotor est mis en rotation par une force mécanique (l'eau ou la vapeur qui se précipite sur les aubes d'une turbine), ses conducteurs coupent les lignes de force magnétiques établies par les pôles du stator, comme l'illustre la figure 13.2.

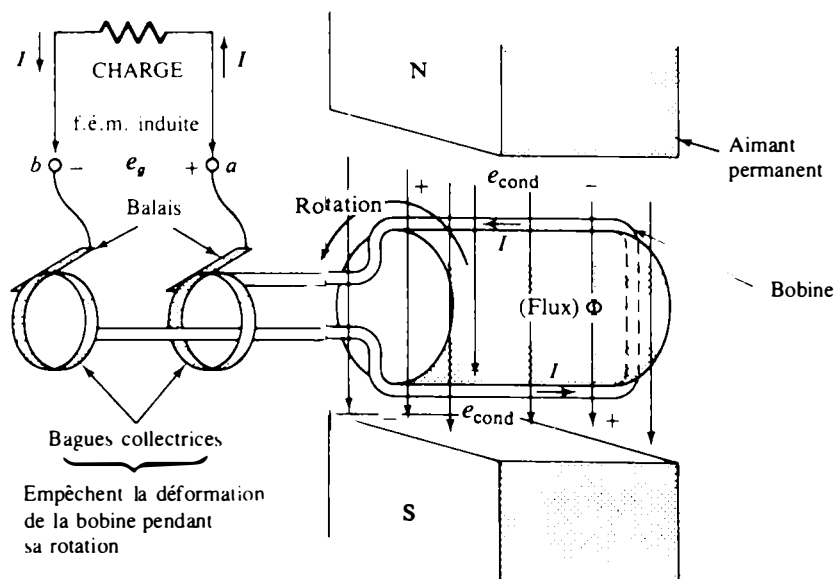
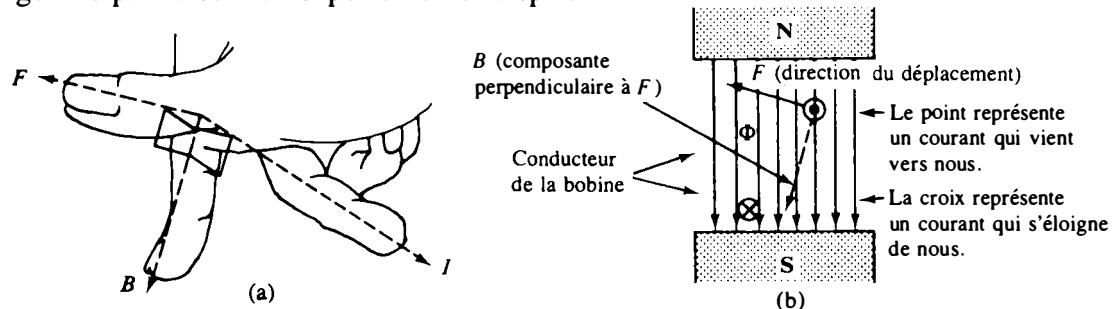


FIG. 13.2



Les pôles statoriques peuvent être ceux d'un aimant permanent ou ceux d'un électro-aimant constitué d'un certain nombre de spires bobinées sur un noyau ferromagnétique et dans lesquelles passe un courant continu.

L'équation (11.1) nous indique que chaque section du conducteur qui passe dans un champ magnétique induit une f.é.m. à ses extrémités, comme l'illustre la figure 13.2. Les f.é.m. induites aux extrémités de chacune des sections du conducteur étant additives, la tension présente aux extrémités du conducteur est la somme des deux f.é.m. induites. Par ailleurs, le rotor étant en rotation, il est nécessaire d'employer des bagues collectrices pour pouvoir raccorder les bornes  $a$  et  $b$  à un circuit d'utilisation fixe. Ces bagues collectrices sont des surfaces conductrices circulaires qui amènent la tension générée aux bornes de la charge et qui empêchent la déformation de la bobine pendant sa rotation. La f.é.m. induite possédant une polarité donnée aux bornes  $a$  et  $b$ , elle engendre un courant  $i$  dont le sens est indiqué à la figure 13.2. Notons que le sens de ce courant  $i$  est aussi le sens d'une augmentation de la f.é.m. induite dans l'alternateur. Nous présentons maintenant un moyen simple de déterminer le sens du courant résultant ou de l'augmentation de la f.é.m. induite dans un alternateur. Il s'agit de placer le pouce, l'index et le majeur de la main droite à angles droits comme à la figure 13.3. Le pouce est placé dans le sens de la force ou du mouvement du conducteur, l'index, dans le sens des lignes de flux magnétique et le majeur, dans le sens du courant résultant, si le conducteur est raccordé à une charge, et dans le sens de l'augmentation de la f.é.m. induite, si le conducteur n'est pas raccordé à une charge. La figure 13.3a montre comment placer les doigts et le pouce, dans le cas de la section supérieure du conducteur du rotor illustré à la figure 13.2 lorsque ce dernier passe par la position indiquée à la figure 13.3b. Nous supposons que la spire de l'alternateur est raccordée à une charge et nous utiliserons la convention du point ( $\odot$ ) et de la croix ( $\otimes$ ) établie au chapitre 10 pour indiquer les sens possibles du courant. On aura sans doute remarqué que le sens du courant engendré par la section supérieure de la spire



est opposé à celui du courant engendré par la section inférieure. Cette constatation est toujours vérifiée pour des montages série du genre. Cela est dû au fait que la section inférieure se déplace en sens opposé à la section supérieure (pointer le pouce dans l'autre sens).

**FIG. 13.3** a) Règle de la main droite; b) sens des courants déterminés par la règle de la main droite, quand la bobine est dans cette position.



Déterminons maintenant la grandeur relative et la polarité de la tension générée correspondant à certaines positions représentatives de la bobine en rotation. Lorsque la bobine passe par la position 1 (figure 13.4a), aucune ligne de force n'est coupée par le conducteur et la f.é.m. induite est nulle. La bobine se déplaçant maintenant de la position 1 vers la position 2 (figure 13.4b), le nombre de lignes de force coupées par unité de temps augmente; il y a donc induction d'une f.é.m. aux bornes de la bobine. Le sens du courant résultant et la polarité de la tension aux bornes  $a$  et  $b$  sont indiqués à la figure, pour la position 2. Lorsque la bobine parvient à la position 3, le nombre de lignes de force coupées par unité de temps est maximal; la tension induite est par conséquent maximale. Le sens du courant et la polarité de la tension sont les mêmes que ceux à la position 2.

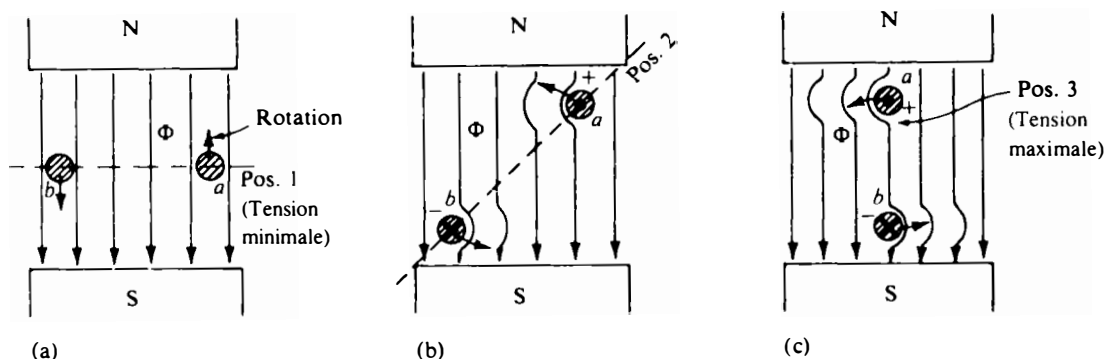


FIG. 13.4

La bobine poursuit maintenant sa rotation vers la position 4 (figure 13.5); la polarité de la f.é.m. induite et le sens du courant demeurent les mêmes, comme le montre la figure, mais la f.é.m. induite chute, le conducteur coupant moins de lignes de force par unité de temps. Lorsque la bobine parvient à la position 4, la f.é.m. induite est de nouveau nulle, le conducteur se déplaçant parallèlement aux lignes de force. Quand la bobine passe de la position 4 vers la position 5, la f.é.m. induite augmente, mais il y a inversion de la polarité aux bornes  $a$  et  $b$ , et du sens du courant dans chacun des conducteurs. La symétrie de la configuration permet de conclure que la grandeur de la f.é.m. induite est la même aux positions 2 et 5, de même qu'aux positions 3 et 6, seule la polarité  $a-b$  étant inversée.

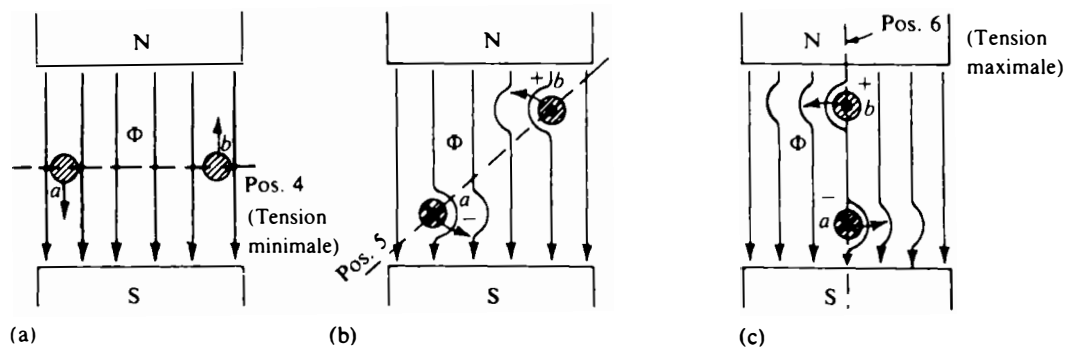


FIG. 13.5



La figure 3.16 montre un tracé continu de la f.é.m.  $e_n$  induite. Les polarités des bornes  $a$  et  $b$  associées à la f.é.m. induite sont montrées à gauche de l'axe vertical.

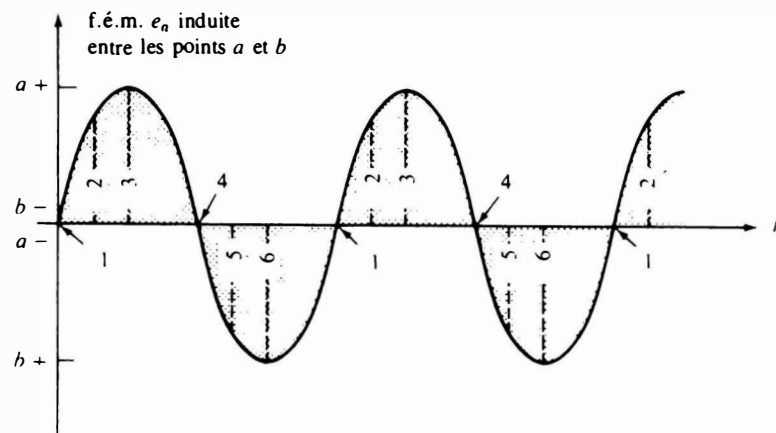
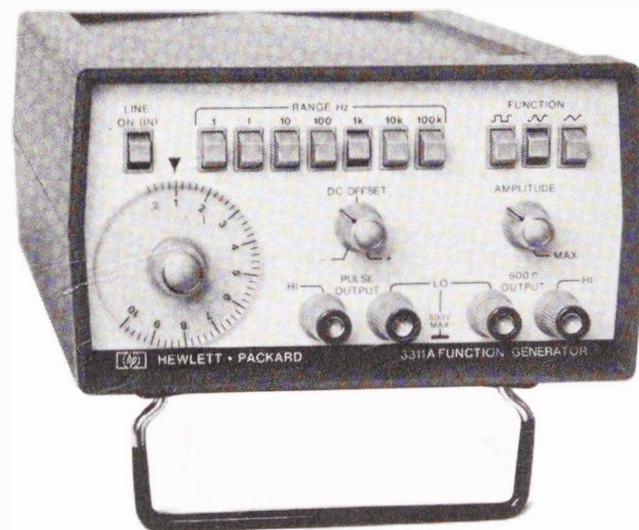


FIG. 13.6 Forme d'onde sinusoïdale.

Prenons un instant pour associer les divers points de la forme d'onde résultante illustrés à la figure 13.6 aux positions de la bobine statorique. Nous aurons d'ailleurs l'occasion de nous familiariser avec cette forme d'onde dans les analyses qui suivront. À noter certaines de ses caractéristiques évidentes.



Courtoisie de Hewlett Packard Co.

FIG. 13.7 Générateur de fonctions.

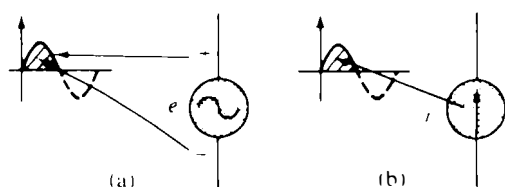
Tout d'abord, elle est périodique, c'est-à-dire qu'elle se répète dans un intervalle de temps constant à mesure que la bobine accomplit des tours supplémentaires. Ensuite, elle est symétrique de part et d'autre de l'axe horizontal et elle varie constamment dans le temps. Répétons-le, cette forme d'onde est celle de la *tension alternative sinusoïdale*.

L'alternateur est la seule source de courant et de tension sinusoïdaux. Le générateur de fonctions illustré à la figure 13.7 peut, grâce à des composants semi-conducteurs faisant partie de ses circuits internes, produire des ondes sinusoïdales, des ondes carrées et des ondes en forme de dents de scie.



### 13.3 DÉTERMINATION DE LA POLARITÉ D'UNE TENSION ET DU SENS D'UN COURANT

Dans les analyses qui suivent, il sera nécessaire d'établir la polarité d'une tension alternative sinusoïdale et le sens d'un courant alternatif sinusoïdal. Dans chaque cas, la polarité d'une tension et le sens d'un courant correspondront, à un instant donné, à l'alternance positive de la sinusoïde. C'est ce que représente la figure 13.8. Elle illustre les symboles graphiques de la source de tension sinusoïdale et de la source de courant sinusoïdal. Les symboles littéraux sont des minuscules; on indique ainsi que chaque grandeur varie dans le temps. La nécessité de la détermination de la polarité d'une tension et du sens d'un courant nous apparaîtra dans toute son évidence lors de l'étude des réseaux alternatifs à plusieurs sources. Soulignons enfin un dernier point: nous omettrons de plus en plus fréquemment le terme *sinusoïdal*, qui sera sous-entendu. Ainsi, dans la phrase précédente, l'expression *réseaux alternatifs* signifie de fait *réseaux alternatifs sinusoïdaux*.

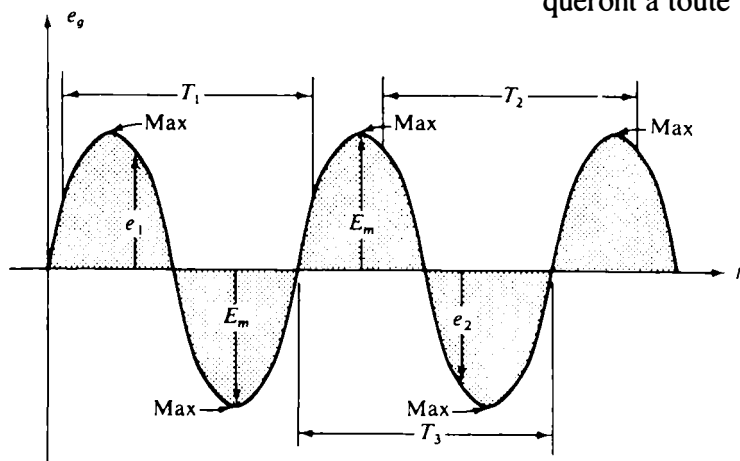


**FIG. 13.8** a) Source de tension alternative sinusoïdale. b) Source de courant alternatif sinusoïdal.

À la figure 13.7, les bornes de sortie sont identifiées par « HI » et « LO »; la masse (potentiel nul) correspond aux bornes de sortie « LO ». Les bornes de sortie « HI » et « LO » auraient pu être identifiées par les signes + et - respectivement.

### 13.4 DÉFINITIONS

Définissons quelques termes fondamentaux à l'aide de la forme d'onde sinusoïdale illustrée à la figure 13.9. les termes définis ne seront toutefois pas particuliers à la sinusoïde: ils s'appliqueront à toute forme d'onde.



**FIG. 13.9** Tension sinusoïdale.

*Forme d'onde:* Représentation graphique d'une grandeur, telle que la f.é.m. illustrée à la figure 13.9, en fonction d'une certaine variable, comme le temps, sa position, sa valeur en degrés, sa valeur en radians, la température, etc.



*Valeur instantanée:* Valeur d'une forme d'onde à un instant particulier; elle est représentée par une lettre minuscule ( $e_1, e_2$ ).

*Amplitude ou valeur de crête:* Valeur maximale que prend une forme d'onde; elle est représentée par une lettre majuscule ( $E_m$ ).

*Forme d'onde périodique:* Forme d'onde qui se reproduit en un certain intervalle de temps. La forme d'onde illustrée à la figure 13.9 est périodique.

*Période (T):* Intervalle de temps sur lequel une forme d'onde périodique se reproduit. La période se mesure entre deux points identiques de la forme d'onde. À la figure 13.9,  $T = T_1 = T_2 = T_3$ .

*Cycle:* Portion d'une forme d'onde périodique contenue en une période. Par définition, les portions des formes d'onde illustrées aux figures 13.9 et 13.10 sont des cycles.

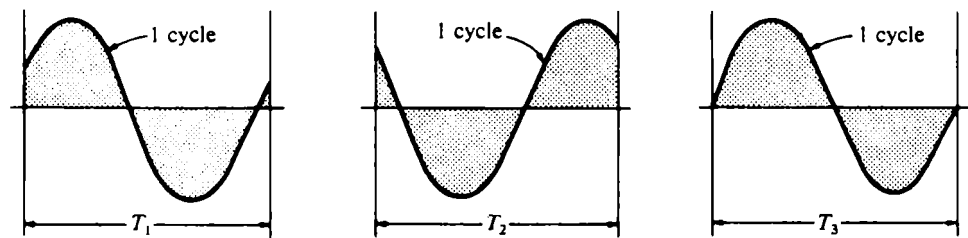


FIG. 13.10

*Fréquence (f):* Nombre de cycles qui se produisent en une seconde. La fréquence de la forme d'onde illustrée à la figure 13.11a est de 1 Hz et la fréquence de celle illustrée à la figure 13.11b, de 25 Hz. La fréquence d'une forme d'onde semblable mais dont la période est de 0,5 s (figure 13.11c) est de 2 Hz. Le hertz (Hz) est par définition égal à un cycle par seconde:

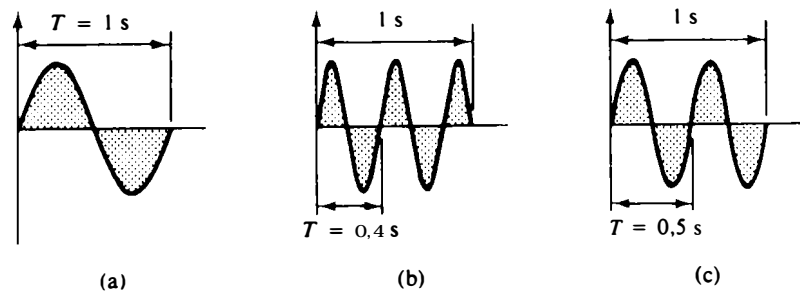


FIG. 13.11

$$1 \text{ Hz} = 1 \text{ cycle par seconde} \quad (13.1)$$

L'unité de fréquence a été choisie en l'honneur de Heinrich Rudolph Hertz, pionnier de la recherche dans le domaine des tensions et des courants alternatifs et de leurs effets sur la résistance, le condensateur et la bobine. En Amérique du Nord, la fréquence standard du secteur est de 60 Hz.





La fréquence est donc inversement liée à la période, c'est-à-dire qu'en augmentant la période on diminue la fréquence, et vice versa. Mathématiquement, on écrit:

$$\boxed{f = \frac{1}{T}} \quad \begin{array}{l} f = \text{hertz (Hz)} \\ T = \text{secondes (s)} \end{array} \quad (13.2)$$

ou:

$$\boxed{T = \frac{1}{f}} \quad (13.3)$$

**EXEMPLE 13.1** Calculer la période d'une forme d'onde périodique d'une fréquence de:

- 60 Hz;
- 1000 Hz.

*Solution:*

$$a. \quad T = \frac{1}{f} = \frac{1}{60} = 0,01667 \text{ s ou } \mathbf{16,67 \text{ ms}}$$

(valeur à retenir, 60 Hz étant une fréquence standard)

$$b. \quad T = \frac{1}{f} = \frac{1}{1000} = 10^{-3} \text{ s} = \mathbf{1 \text{ ms}}$$

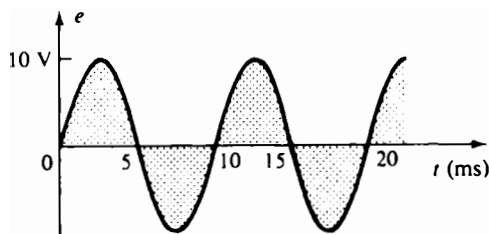


FIG. 13.12

**EXEMPLE 13.2** Déterminer la fréquence de la forme d'onde illustrée à la figure 13.12.

*Solution:* De la figure, on a  $T = 10 \text{ ms}$ , de sorte que:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{10 \times 10^{-3}} = \mathbf{100 \text{ Hz}}$$

**EXEMPLE 13.3** L'oscilloscope (voir le chapitre 22) est un appareil qui affiche des formes d'onde alternatives comme celles que nous avons décrites. La figure 13.13 représente l'affichage d'une onde sinusoïdale sur un oscilloscope. Déterminer la période, la fréquence et la valeur de crête de cette onde (les réglages des échelles de l'appareil sont indiqués à la figure).

*Solution:* Un cycle entier s'étend sur 4 cm. La période est donc:

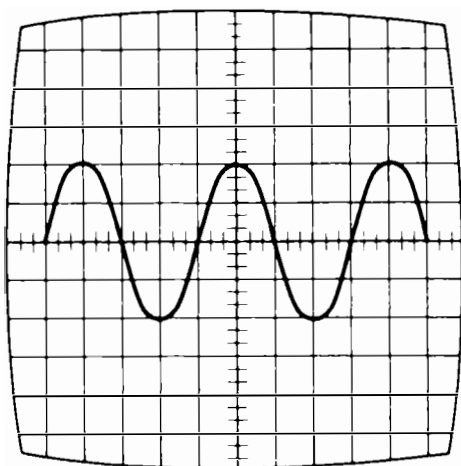
$$T = 4(50 \mu\text{s}) = \mathbf{200 \mu\text{s}}$$

et la fréquence:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{200 \times 10^{-6}} = \mathbf{5 \text{ kHz}}$$

L'écart vertical par rapport à l'axe horizontal est de 2 cm. La tension de crête est:

$$V_{\text{crête}} = 2(0,1) = \mathbf{0,2 \text{ V}}$$



Échelle verticale: 0,1 V/cm  
Échelle horizontale: 50  $\mu\text{s}/\text{cm}$

FIG. 13.13



### 13.5 L'ONDE SINUSOÏDALE

Les expressions et les termes définis à la section précédente peuvent s'appliquer à toute forme d'onde périodique, de variation continue ou discontinue. Mais la forme d'onde sinusoïdale est d'une importance particulière, car elle se prête facilement à une analyse mathématique et parce qu'elle décrit de nombreux phénomènes physiques associés aux circuits électriques. Ainsi, l'onde sinusoïdale est la *seule* forme d'onde qui n'est pas dénaturée par les caractéristiques de réponse de la résistance, de la bobine et du condensateur. Ce que nous voulons dire, c'est que le courant résultant de l'application d'une tension sinusoïdale aux bornes d'une résistance, d'une bobine ou d'un condensateur est un courant sinusoïdal, ce qui n'est pas le cas si la tension appliquée est une forme d'onde carrée ou triangulaire. Nous pouvons évidemment dire la même chose d'une onde cosinusoidale, puisque celle-ci est en réalité une onde sinusoïdale décalée de 90°, comme l'illustre la figure 13.14.

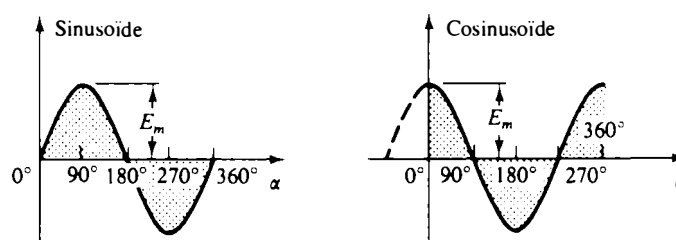


FIG. 13.14

À la figure 13.14, l'unité qui gradue l'axe horizontal est le *degré*. Une autre unité fréquemment utilisée est le *radian* (rad). Le radian est défini schématiquement à la figure 13.15. Il correspond à l'angle qui sous-tend un arc dont la longueur est égale au rayon du cercle.

En posant  $x$  égal au nombre de fois que  $r$  (le rayon) entre dans la circonférence du cercle, nous pouvons écrire:

$$C = 2\pi r = x r$$

et:

$$x = 2\pi$$

Par conséquent, un cercle compte  $2\pi$  rad:

$2\pi \text{ radians} = 360^\circ$	<b>(13.4)</b>
------------------------------------	---------------

ou:

$1 \text{ radian} \cong 57.3^\circ$	<b>(13.5)</b>
-------------------------------------	---------------

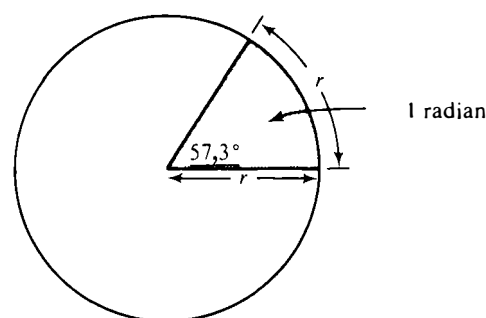


FIG. 13.15 Définition du radian.

Puisque le facteur  $\pi$  apparaît dans un nombre imposant de formules mathématiques appliquées à l'électricité, il est sou-

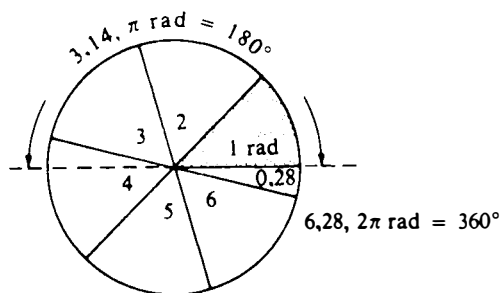


FIG. 13.16

vent préférable de mesurer les angles en radians plutôt qu'en degrés.

La figure 13.16 illustre la relation entre les degrés et les radians. Les équations de conversion d'une unité à l'autre sont:

$$\text{Radians} = \frac{\pi}{180^\circ} \times \text{degrés} \quad (13.6)$$

$$\text{Degrés} = \frac{180^\circ}{\pi} \times \text{radians} \quad (13.7)$$

L'application de ces équations à des angles particuliers donne:

$$30^\circ: \text{ Radians} = \frac{\pi}{180^\circ} (30^\circ) = \frac{\pi}{6} \text{ rad} \cong 0,524 \text{ rad}$$

$$90^\circ: \text{ Radians} = \frac{\pi}{180^\circ} (90^\circ) = \frac{\pi}{2} \text{ rad} \cong 1,571 \text{ rad}$$

$$\frac{\pi}{3}: \text{ Degrés} = \frac{180^\circ}{\pi} \left(\frac{\pi}{3}\right) = 60^\circ$$

$$\frac{3\pi}{2}: \text{ Degrés} = \frac{180^\circ}{\pi} \left(\frac{3\pi}{2}\right) = 270^\circ$$

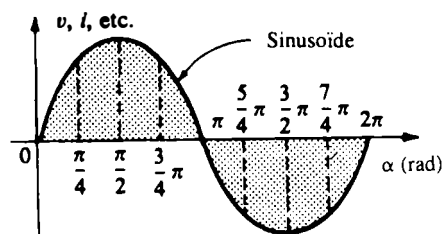


FIG. 13.17

La figure 13.17 illustre l'allure d'une onde sinusoïdale en fonction de divers angles exprimés en radians.

Il est intéressant de noter que l'onde sinusoïdale peut être obtenue à partir de la longueur de la *projection verticale* d'un vecteur rayon en rotation uniforme autour d'un point fixe. La figure 13.18 montre comment procéder.

La vitesse avec laquelle le vecteur rayon tourne autour du centre est appelée la *vitesse angulaire* ou *pulsation*; elle est déterminée par la relation:

$$\text{Pulsation} = \frac{\text{angle décrit (rad)}}{\text{temps (s)}} \quad (13.8)$$

La pulsation est désignée par la lettre grecque oméga ( $\omega$ ). Nous pouvons alors écrire:

$$\omega = \frac{\alpha}{t} \quad (13.9)$$

Le temps qu'il faut au vecteur rayon illustré à la figure 13.8 pour décrire un tour complet est égal à la période ( $T$ ) de l'onde

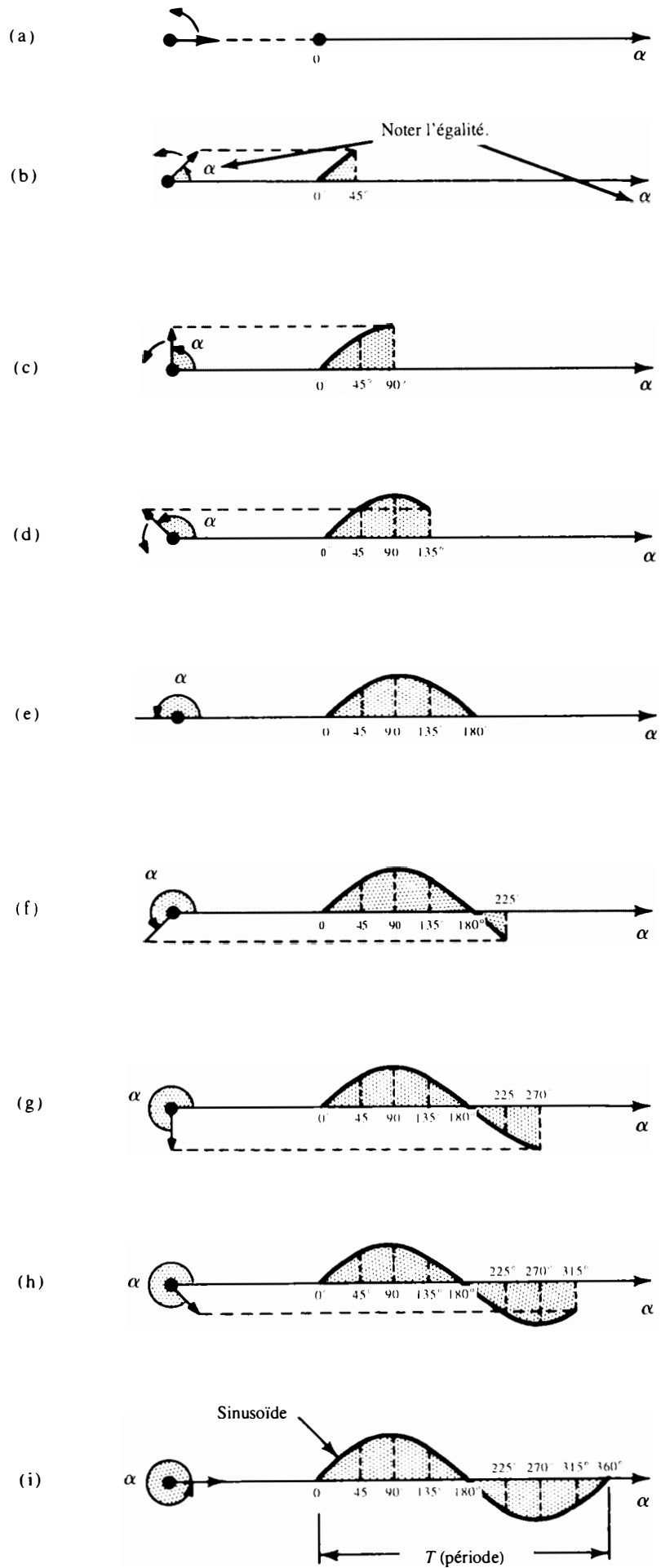


FIG. 13.18



sinusoïdale (figure 13.18i). L'angle en radians sous-tendu par les deux positions extrêmes du vecteur rayon est  $2\pi$ :

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}} \quad (\text{rad/s}) \quad (13.10)$$

Cette équation montre bien que plus petite est la période de l'onde sinusoïdale, ou plus petit est l'intervalle de temps nécessaire au vecteur rayon pour décrire un tour complet, plus grande doit être la pulsation de ce vecteur rayon. Tout ce que nous avons énoncé à ce sujet est donc cohérent. Puisque la fréquence est l'inverse de la période, nous pouvons écrire:

$$\boxed{\omega = 2\pi f} \quad (\text{rad/s}) \quad (13.11)$$

Plus grande est la fréquence de l'onde sinusoïdale générée plus grande est par conséquent sa pulsation. La figure 13.19, où le même vecteur rayon a une pulsation  $\omega = 100 \text{ rad/s}$  et  $500 \text{ rad/s}$ , montre bien la validité des équations (13.10) et (13.11).

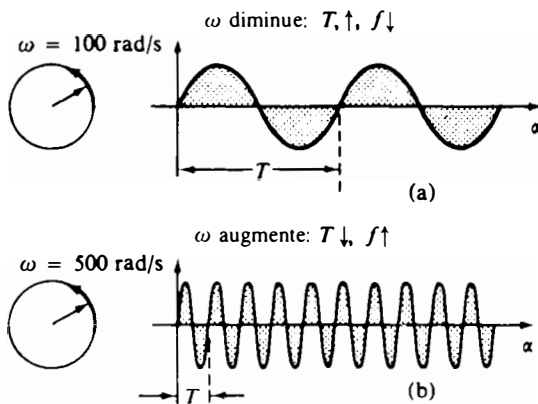


FIG. 13.19

**EXEMPLE 13.4** Déterminer la pulsation d'une onde sinusoïdale dont la fréquence est de 60 Hz.

*Solution:*

$$\begin{aligned} \omega &= 2\pi f = (6,28)(60) \\ &\cong 377 \text{ rad/s} \quad (\text{autre valeur à retenir en raison} \\ &\quad \text{de la prédominance du 60 Hz}) \end{aligned}$$

**EXEMPLE 13.5** Déterminer la fréquence et la période de l'onde sinusoïdale illustrée à la figure 13.19b.

*Solution:*

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{2\pi}{T}, \quad \therefore T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{500} = \frac{6,28}{500} = 12,56 \text{ ms} \\ f &= \frac{1}{T} = \frac{1}{12,56 \times 10^{-3}} = 79,62 \text{ Hz} \end{aligned}$$



## 13.6 FORME GÉNÉRALE DE LA SINUSOÏDE DE TENSION OU DE COURANT

La forme mathématique fondamentale de la sinusoïdale est:

$$A_m \sin \alpha \quad (13.12)$$

dans laquelle  $A_m$  est la valeur de crête de la forme d'onde et  $\alpha$  est l'unité de graduation de l'axe horizontal (voir la figure 13.20).

Notons que:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\alpha}{t}$$

Par conséquent:

$$\alpha = \omega t \quad (13.13)$$

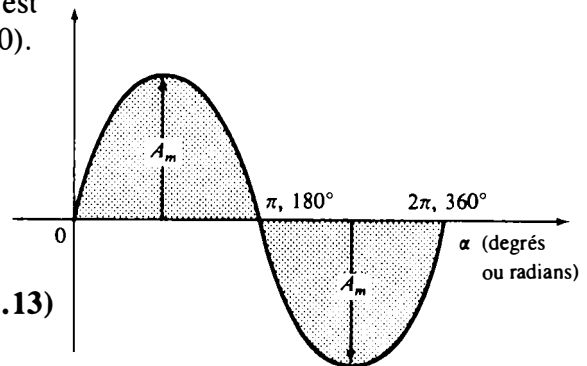


FIG. 13.20

L'équation (13.13) énonce que l'angle  $\alpha$  décrit par le vecteur en rotation (figure 13.18) est déterminé par sa pulsation et le temps pendant lequel il est en rotation. Ainsi, pour une pulsation donnée, plus le vecteur rayon tourne longtemps, plus grand est l'angle qu'il décrit, que cet angle soit mesuré en degrés ou en radians. Dans le cas particulier de la sinusoïde, cela revient à dire que pour une pulsation donnée, plus grand est le temps de rotation et plus grand est le nombre de cycles accomplis par la forme d'onde. De façon semblable, pour un intervalle de temps fixe, plus grande est la pulsation et plus grand est le nombre de cycles engendrés.

L'équation (13.13) permet également d'écrire la forme générale de la sinusoïde de la façon suivante:

$$A_m \sin \omega t \quad (13.14)$$

dans laquelle  $\omega t$  est l'unité de graduation de l'axe horizontal.

Dans le cas de grandeurs électriques, comme le courant et la tension, la forme générale est:

$$i = I_m \sin \omega t = I_m \sin \alpha$$

$$e = E_m \sin \omega t = E_m \sin \alpha$$

où les majuscules accompagnées de l'indice inférieur  $m$  représentent l'amplitude de la forme d'onde et les minuscules  $i$  et  $e$ , les valeurs instantanées de la forme d'onde, à l'instant  $t$ .

Il est aussi possible de tracer une sinusoïde en fonction du temps. À chaque valeur que prend la sinusoïde à un angle donné, on peut en effet faire correspondre un instant précis, déterminé à partir de la pulsation de la forme d'onde. La technique à utiliser sera montrée à l'exemple 13.6.

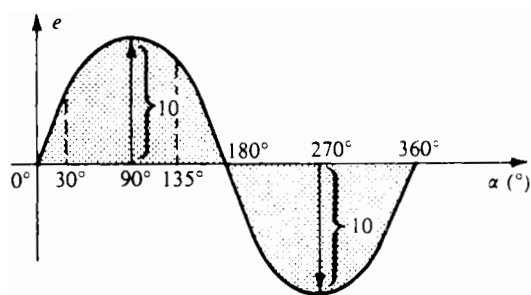


FIG. 13.21

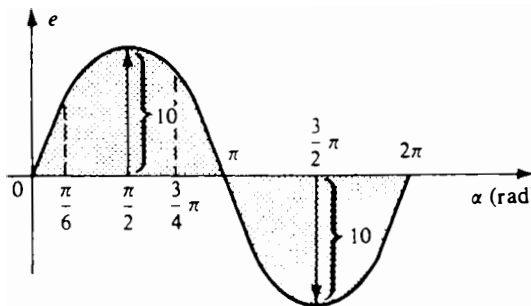


FIG. 13.22

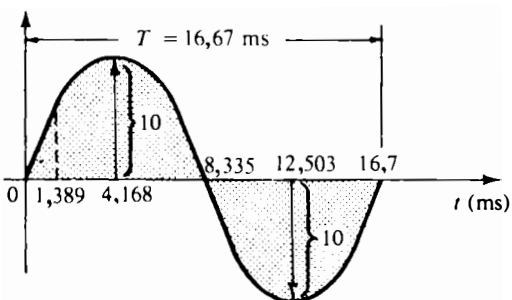


FIG. 13.23

Avant de passer à cet exemple, notons la simplicité relative de l'équation mathématique représentant la sinusoïde. Les formes d'onde alternatives dont les caractéristiques diffèrent de celles d'une sinusoïde ne peuvent pas être représentées par une expression ne contenant qu'un seul terme; leur représentation exacte peut nécessiter deux, quatre, six et même une infinité de termes. Le chapitre 22 présente une analyse approfondie de la représentation mathématique des formes d'onde non sinusoïdales.

**EXEMPLE 13.6** Dessiner la forme d'onde  $e = 10 \sin 377t$  en fonction:

- a. de l'angle en degrés ( $\alpha$ );
- b. de l'angle en radians ( $\alpha$ );
- c. du temps en secondes ( $t$ ).

Solution:

a. Voir la figure 13.21.

b. Voir la figure 13.22.

c.  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , ou  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{6,28}{377} = 16,67 \text{ ms}$

$$\frac{T}{2} = \frac{16,67}{2} \times 10^{-3} = 8,335 \text{ ms}$$

$$\frac{T}{4} = \frac{16,67}{4} \times 10^{-3} = 4,168 \text{ ms}$$

$$\frac{T}{12} = \frac{16,67}{12} \times 10^{-3} = 1,389 \text{ ms}$$

Voir la figure 13.23.

### 13.7 RELATIONS DE PHASE

Jusqu'ici, nous n'avons vu que des ondes sinusoïdales passant par des maximums à  $\pi/2$  et à  $3\pi/2$ , et passant à zéro à  $0$ ,  $\pi$ , et  $2\pi$ , comme l'onde de la figure 13.21. Si l'onde est décalée à la droite ou à la gauche de  $0^\circ$ , son expression mathématique devient:

$$A_m \sin(\omega t \pm \theta) \tag{13.15}$$

dans laquelle  $\theta$  est l'angle en degrés ou en radians du décalage.

Si, comme à la figure 13.24, l'onde traverse l'axe horizontal en étant de *sens positif* (c'est-à-dire que sa valeur augmente avec le temps) avant le point  $0^\circ$ , son expression est:

$$A_m \sin(\omega t + \theta) \tag{13.16}$$

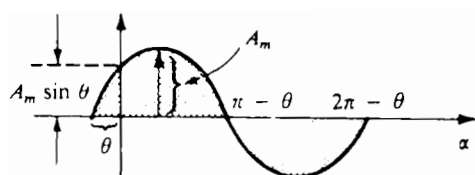


FIG. 13.24



À  $\omega t = \alpha = 0^\circ$ , sa valeur est  $A_m \sin \theta$ . Si au contraire l'onde traverse l'axe horizontal après le point  $0^\circ$  en étant de sens positif, comme à la figure 13.25, son expression est:

$$A_m \sin(\omega t - \theta) \tag{13.17}$$

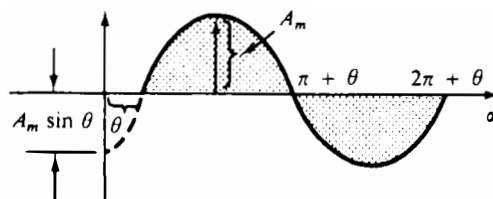


FIG. 13.25

et à  $\omega t = \alpha = 0^\circ$ , sa valeur est  $A_m \sin(-\theta)$ , ce qui est par identité trigonométrique  $-A_m \sin \theta$ .

L'onde de sens positif qui traverse l'axe horizontal  $90^\circ (\pi/2)$  avant le point  $0^\circ$  (figure 13.26) est appelée *onde cosinusoidale*. On a alors:

$$\sin(\omega t + 90^\circ) = \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \omega t \tag{13.18}$$

ou:

$$\sin \omega t = \cos(\omega t - 90^\circ) = \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \tag{13.19}$$

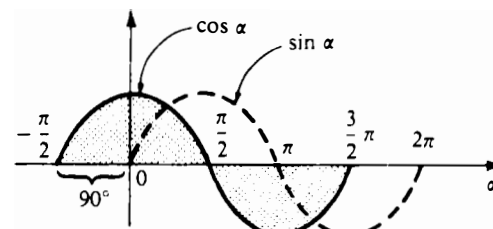


FIG. 13.26

On utilise les expressions *en avance* et *en retard* pour décrire la relation de phase qui existe entre deux ondes sinusoidales de même fréquence tracées sur un même graphique. À la figure 13.26, la courbe cosinusoidale est *en avance* de  $90^\circ$  sur la courbe sinusoidale; on peut aussi dire, cela revient au même, que la courbe sinusoidale est *en retard* de  $90^\circ$  sur la courbe cosinusoidale. L'angle de  $90^\circ$  est le déphasage entre les deux ondes. On dira donc que les deux ondes sont *déphasées* de  $90^\circ$ . À noter que le déphasage entre deux ondes se mesure entre deux points de l'axe horizontal que traversent les ondes lorsqu'elles sont de même sens.

Voici quelques relations trigonométriques qui seront utiles dans notre étude des relations de phase.

$$\begin{aligned} \sin(-\alpha) &= -\sin \alpha \\ \cos(-\alpha) &= \cos \alpha \\ -\sin(\alpha) &= \sin(\alpha \pm 180^\circ) \\ -\cos(\alpha) &= \cos(\alpha \pm 180^\circ) \end{aligned} \tag{13.20}$$

Dans l'expression d'une onde sinusoidale:

$$e = -E_m \sin \omega t$$

le signe moins est associé à la fonction sinus et non à la valeur de la crête  $E_m$ . En d'autres termes, l'expression rigoureuse de l'onde serait:

$$e = E_m(-\sin \omega t)$$





Puisque:

$$-\sin \omega t = \sin(\omega t \pm 180^\circ)$$

l'expression peut également s'écrire ainsi:

$$e = E_m \sin(\omega t \pm 180^\circ)$$

À noter qu'il existe deux possibilités pour l'expression ci-dessus, puisqu'il est indifférent d'ajouter ou de retrancher le  $180^\circ$  du terme  $\omega t$ ; c'est donc dire que:

$$e = -E_m \sin \omega t = E_m \sin(\omega t + 180^\circ) = E_m \sin(\omega t - 180^\circ)$$

Un tracé de ces expressions montrerait en toute évidence leur équivalence. Par conséquent, il existe deux représentations mathématiques correctes de ces fonctions.

Bref, la *relation de phase* entre deux ondes indique laquelle précède l'autre, et de combien de degrés ou de radians.

**EXEMPLE 13.7** Quelle est la relation de phase entre les paires d'ondes sinusoïdales ci-dessous?

- $v = 10 \sin(\omega t + 30^\circ)$   
 $i = 5 \sin(\omega t + 70^\circ)$
- $i = 15 \sin(\omega t + 60^\circ)$   
 $v = 10 \sin(\omega t - 20^\circ)$
- $i = 2 \cos(\omega t + 10^\circ)$   
 $v = 3 \sin(\omega t - 10^\circ)$
- $i = -\sin(\omega t + 30^\circ)$   
 $v = 2 \sin(\omega t + 10^\circ)$
- $i = -2 \cos(\omega t - 60^\circ)$   
 $v = 3 \sin(\omega t - 150^\circ)$

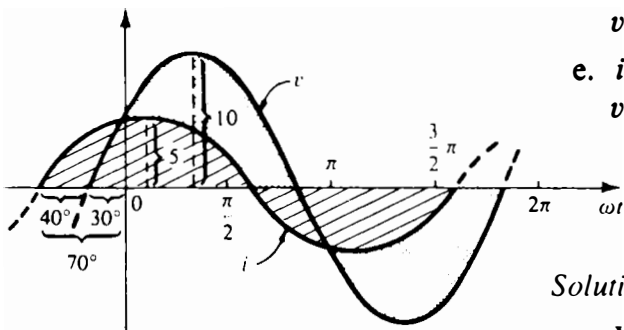


FIG. 13.27

*Solution:*

- Voir la figure 13.27.  
 $i$  est en avance de  $40^\circ$  sur  $v$  (ou  $v$  est en retard de  $40^\circ$  sur  $i$ ).

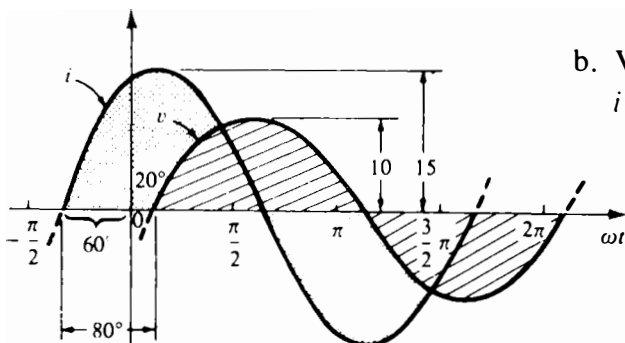


FIG. 13.28

- Voir la figure 13.28.  
 $i$  est en avance de  $80^\circ$  sur  $v$  (ou  $v$  est en retard de  $80^\circ$  sur  $i$ ).



- c. Voir la figure 13.29.  
*i* est en avance de  $110^\circ$  sur *v* (ou *v* est en retard de  $110^\circ$  sur *i*).

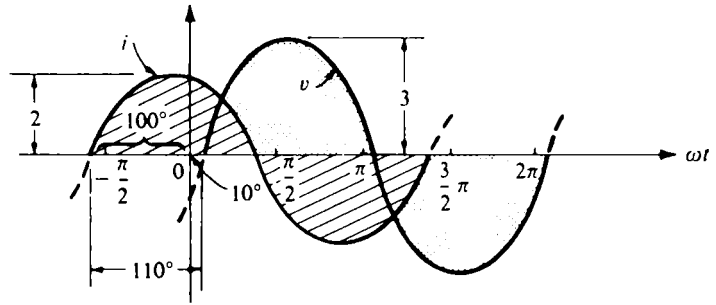


FIG. 13.29

- d. Voir la figure 13.30.  
 $-\sin(\omega t + 30^\circ) = \sin(\omega t + 30^\circ - 180^\circ)$   
 $= \sin(\omega t - 150^\circ)$

*v* est en avance de  $160^\circ$  sur *i* (ou *i* est en retard de  $160^\circ$  sur *v*).

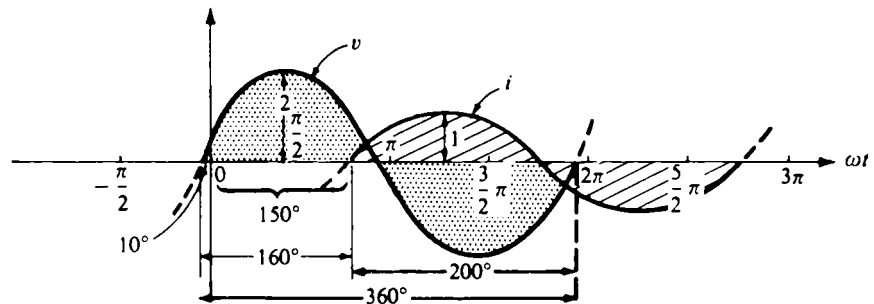


FIG. 13.30

- On peut aussi écrire:  
 $-\sin(\omega t + 30^\circ) = \sin(\omega t + 30^\circ + 180^\circ)$   
 $= \sin(\omega t + 210^\circ)$

et *i* est en avance de  $200^\circ$  sur *v* (ou *v* est en retard de  $200^\circ$  sur *i*), ce qui est aussi correct.

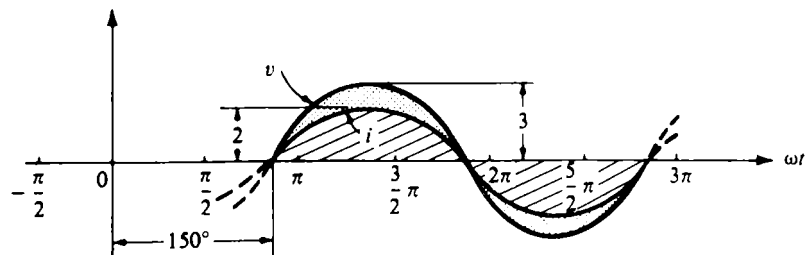


FIG. 13.31

- e. Voir la figure 13.31.  
 $i = -2 \cos(\omega t - 60^\circ) = 2 \cos(\omega t - 60^\circ - 180^\circ)$   
 $= 2 \cos(\omega t - 240^\circ)$

mais:

$$\cos \alpha = \sin(\alpha + 90^\circ)$$

de sorte que:

$$2 \cos(\omega t - 240^\circ) = 2 \sin(\omega t - 240^\circ + 90^\circ)$$

$$= 2 \sin(\omega t - 150^\circ)$$

Dans ce cas, *v* et *i* sont en phase.



### 13.8 VALEUR MOYENNE

Après avoir franchi une distance considérable, certains automobilistes aiment à calculer la vitesse moyenne à laquelle ils se sont déplacés. Cette moyenne s'obtient habituellement à l'aide du quotient du nombre de kilomètres parcourus par le nombre d'heures de déplacement. Ainsi l'automobiliste qui parcourt 180 km en 5 h se déplace à une vitesse moyenne de  $180/5$ , soit 36 km/h. La vitesse moyenne n'est évidemment pas la vitesse à laquelle a constamment roulé l'automobiliste, comme l'indique la figure 13.32.

À partir d'une telle figure, la moyenne s'obtient par le calcul de l'aire totale des surfaces hachurées divisée par 5 h (durée totale du déplacement):

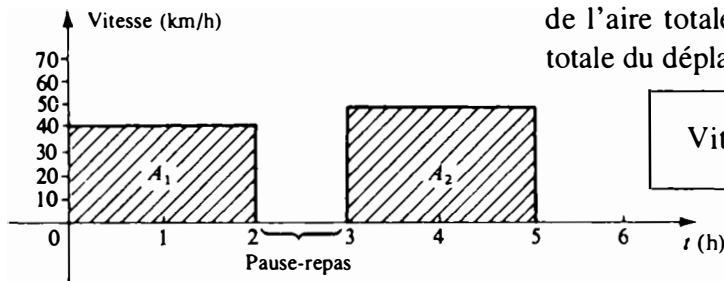


FIG. 13.32

$$\text{Vitesse moyenne} = \frac{\text{aire sous la courbe}}{\text{longueur de la courbe}} \quad (13.21)$$

$$= \frac{A_1 + A_2}{5}$$

$$= \frac{(40)(2) + (50)(2)}{5}$$

$$= \frac{180}{5}$$

$$= 36 \text{ km/h}$$

L'équation (13.21) nous indique la façon de calculer la moyenne de toute grandeur variable, comme un courant ou une tension; nous avons donc, en utilisant la lettre  $G$  pour représenter la valeur moyenne:

$$G \text{ (valeur moyenne)} = \frac{\text{somme algébrique des aires}}{\text{longueur de la courbe}}$$

(13.22)

Dans la relation ci-dessus, par l'expression « longueur de la courbe » il faut entendre en réalité « longueur de la projection de la courbe sur l'axe horizontal ». C'est par ailleurs la somme algébrique des aires qu'il faut faire, puisque certaines surfaces seront sous l'axe horizontal. Les aires des surfaces au-dessus de l'axe horizontal seront affectées du signe plus, celles des surfaces au-dessous de l'axe horizontal du signe moins. Une moyenne positive signifie donc que l'aire des surfaces au-dessus de l'axe horizontal est plus grande que celle des surfaces au-dessous de cet axe.

C'est la valeur moyenne du courant ou de la tension qu'indique un appareil de mesure en courant continu. En d'autres termes, la valeur moyenne d'une onde alternative sur un cycle complet est l'équivalent d'une valeur en courant continu. Sou-



vent le circuit électronique qu'on veut analyser contient à la fois des sources de f.é.m. alternatives et continues. Il est alors nécessaire de savoir ou de déterminer la composante continue (ou la valeur moyenne) et la composante alternative de la tension et du courant pour chacune des parties du circuit.

**EXEMPLE 13.8** Calculer les valeurs moyennes sur un cycle complet des formes d'onde ci-dessous.

a. Voir la figure 13.33.

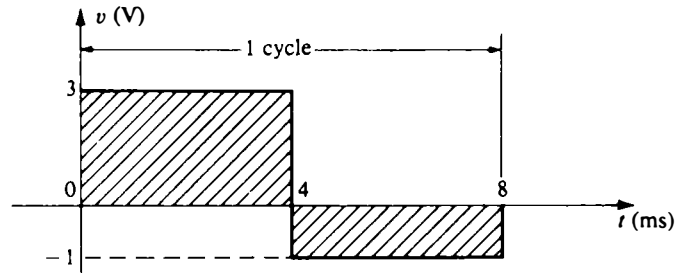


FIG. 13.33

b. Voir la figure 13.34.

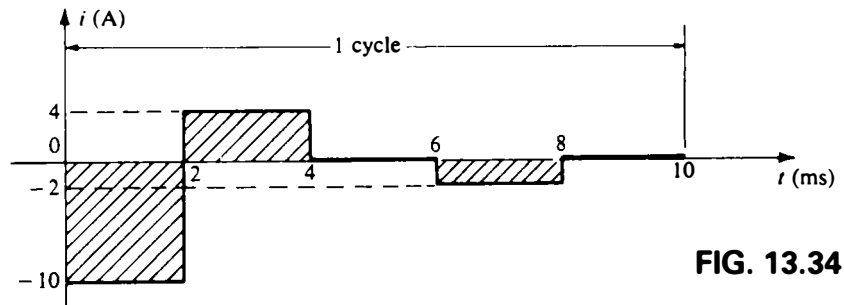


FIG. 13.34

Solution:

$$a. G = \frac{+(3)(4) - (1)(4)}{8} = \frac{12 - 4}{8} = 1 \text{ V}$$

Le résultat est illustré à la figure 13.35.

$$\begin{aligned}
 b. G &= \frac{-(10)(2) + (4)(2) - (2)(2)}{10} \\
 &= \frac{-20 + 8 - 4}{10} \\
 &= -\frac{16}{10} \\
 &= -1,6 \text{ A}
 \end{aligned}$$

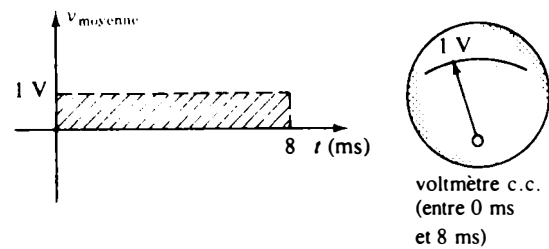


FIG. 13.35

Le résultat est illustré à la figure 13.36.

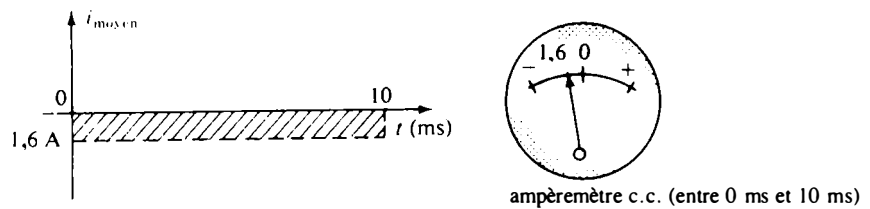


FIG. 13.36

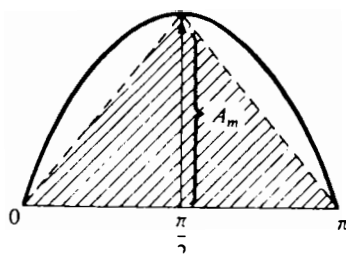


FIG. 13.37

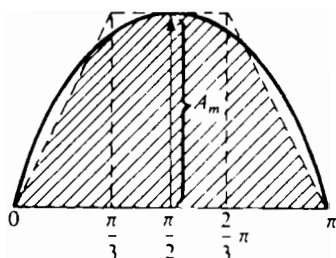


FIG. 13.38

Dans l'exemple précédent, nous avons réussi à calculer les aires sous les courbes à l'aide d'une formule géométrique simple. Dans le cas d'une onde sinusoïdale ou d'une onde d'une forme quelconque, il nous faut toutefois avoir recours à d'autres moyens. On peut ainsi estimer raisonnablement l'aire sous la courbe en tentant de reproduire la surface délimitée par la forme d'onde originale ou moyen de rectangles ou de figures géométriques dont l'aire peut être calculée par des formules simples. Par exemple, l'aire réelle de l'alternance positive (ou négative) d'une onde sinusoïdale est  $2A_m$ . En utilisant en première approximation deux triangles (figure 13.37), on obtient (aire =  $\frac{1}{2}$  base  $\times$  hauteur):

$$\begin{aligned} \text{Aire (hachurée)} &= 2\left(\frac{1}{2}bh\right) = 2\left[\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)(A_m)\right] = \frac{\pi}{2}A_m \\ &\cong 1,58A_m \end{aligned}$$

Une meilleure approximation consisterait à remplacer l'aire sous la courbe par un rectangle et deux triangles identiques adjacents à ce rectangle (figure 13.38); on obtiendrait alors:

$$\begin{aligned} \text{Aire} &= A_m \frac{\pi}{3} + 2\left(\frac{1}{2}bh\right) = A_m \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}A_m \\ &= 1,05A_m + 1,05A_m = 2,1A_m \end{aligned}$$

résultat qui s'approche d'assez près de l'aire réelle. On pourrait raffiner l'approximation et trouver la valeur exacte  $2A_m$  en utilisant un nombre infini de figures géométriques. Cette technique peut être particulièrement utile dans le cas de formes d'onde irrégulières.

La méthode qui donne la solution exacte  $2A_m$  est appelée intégration. L'intégrale de l'alternance positive d'une onde sinusoïdale s'écrit ainsi:

$$\text{Aire} = \int_0^{\pi} A_m \sin \alpha \, d\alpha$$

où  $\int$  est le symbole de l'intégration;

$\pi$  et 0 sont les bornes de l'intervalle d'intégration;

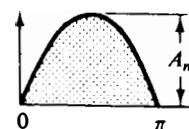
$A_m \sin \alpha$  est la fonction à intégrer; et

$d\alpha$  indique que l'intégration se fait par rapport à la variable  $\alpha$ .

L'intégration donne:

$$\begin{aligned} \text{Aire} &= A_m[-\cos \alpha]_0^{\pi} \\ &= -A_m(\cos \pi - \cos 0^\circ) \\ &= -A_m[-1 - (+1)] = -A_m(-2) \end{aligned}$$

Aire =  $2A_m$



(13.23)



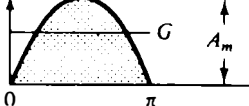
Nous ne présentons ici l'intégration que dans le but de la faire connaître du lecteur; il n'est pas nécessaire de savoir les techniques d'intégration pour poursuivre l'étude du manuel. Mais comme elle est un outil mathématique commode, le lecteur aurait avantage à l'apprendre.

Puisque nous connaissons maintenant l'aire de l'alternance positive (ou négative) de l'onde sinusoïdale, nous pouvons facilement déterminer la valeur moyenne de cette alternance à l'aide de l'équation (13.22). Nous obtenons:

$$G = \frac{2A_m}{\pi}$$

et:

$G = 0,637 A_m$


(13.24)

Dans le cas de la forme d'onde illustrée à la figure 13.39,

on a:  $G = \frac{(2A_m/2)}{\pi/2} = \frac{2A_m}{\pi}$  (résultat identique à celui pour toute l'alternance)

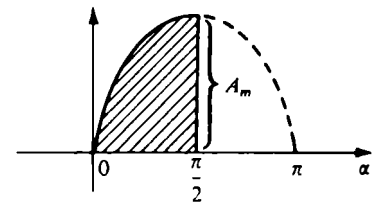


FIG. 13.39

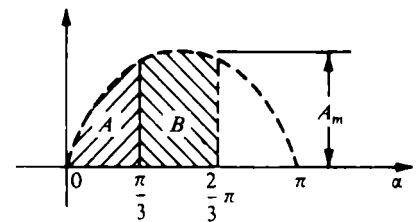


FIG. 13.40

À la figure 13.40, l'aire de A ou de B n'est pas égale à 1/3(2Am) et doit être déterminée au moyen du calcul intégral.

**EXEMPLE 13.9** Calculer la valeur moyenne, sur un cycle complet, des formes d'onde suivantes.

- a. Voir la figure 13.41.
- b. Voir la figure 13.42.
- c. Voir la figure 13.43. Pour cette forme d'onde, indiquer simplement si la valeur moyenne est positive et donner sa valeur approximative.

Solution:

a.  $G = \frac{\overbrace{(2)(10)}^{2A_m} - (2)(\pi)}{2\pi} = \frac{20 - 2\pi}{2\pi} = \frac{10 - \pi}{\pi}$   
 $= 2.183 \text{ V}$

b.  $G = \frac{+2A_m - 2A_m}{2\pi} = 0$

- c. Il est clair que la valeur moyenne est positive; elle est d'environ 2 mV. Il arrive que l'on ait ainsi à déterminer à l'estime une valeur moyenne.

Soulignons enfin que la valeur moyenne d'une onde sinusoïdale (ou d'une onde cosinusoidale) est nulle, puisqu'elle est constituée d'une alternance positive et d'une alternance négative.

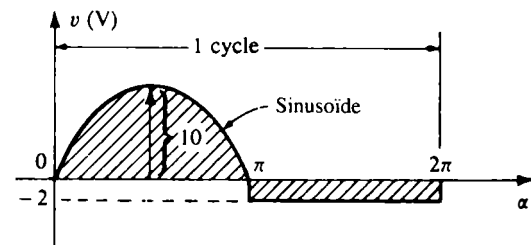


FIG. 13.41

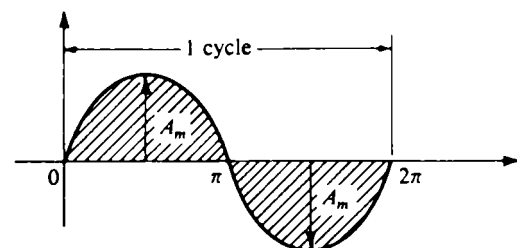


FIG. 13.42

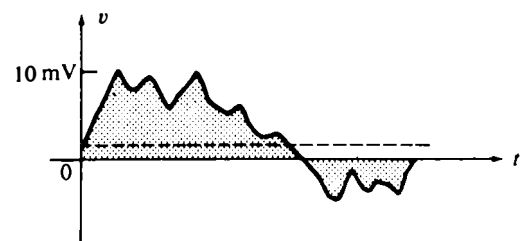


FIG. 13.43



### 13.9 VALEUR EFFICACE

Dans la présente section, nous allons commencer à associer des grandeurs continues et alternatives, du seul point de vue de la puissance fournie à une charge. Cette approche nous aidera à déterminer l'amplitude du courant alternatif sinusoïdal qui fournit à une charge la même puissance qu'un courant continu donné. Comment se peut-il qu'un courant alternatif sinusoïdal débite une puissance nette non nulle puisque, en un cycle complet, sa valeur moyenne est nulle? Cette question, les étudiants se la posent souvent. Ils pensent en effet que la puissance débitée par l'alternance positive de l'onde sinusoïdale est soustraite de la charge par l'alternance négative, et que la puissance nette débitée est nulle puisque les deux alternances sont identiques. En raisonnant ainsi, ils oublient un principe important: *peu importe son sens*, le courant qui passe dans une résistance fournit de l'énergie à cette résistance. En d'autres termes, à tout instant, aussi bien pendant l'alternance positive que pendant l'alternance négative, la résistance reçoit de l'énergie. La puissance débitée à un instant donné dépend bien sûr de l'intensité instantanée du courant sinusoïdal, mais il n'en demeure pas moins que de la puissance est cédée pendant les deux alternances et que le bilan net est positif sur un cycle entier. De fait, la puissance nette fournie à une charge est égale au double de la puissance fournie pendant l'une ou l'autre des alternances.

Le montage expérimental illustré à la figure 13.44 permet d'établir une relation fixe entre les tensions et les courants continus et alternatifs. La résistance plongée dans un bain d'eau est reliée par l'intermédiaire de deux interrupteurs à une source continue et à une source alternative. Lorsque l'interrupteur 1 est fermé, un courant continu  $I$ , dont l'intensité est déterminée par la résistance  $R$  et la tension  $E$  de la batterie, passe à travers la résistance. La température à laquelle parvient l'eau dépend de la puissance continue que dissipe la résistance sous la forme de chaleur.

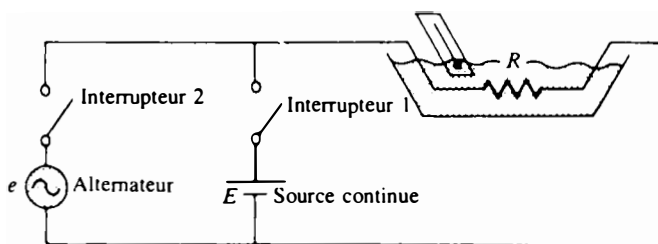


FIG. 13.44

Lorsque l'interrupteur 2 est fermé et que l'interrupteur 1 est ouvert, c'est un courant alternatif de valeur de crête  $I_m$  qui traverse la résistance. La température à laquelle parvient l'eau dépend maintenant de la puissance alternative que dissipe la résistance sous la forme de chaleur. Faisons varier l'intensité de crête du courant alternatif pour que l'eau atteigne la température mesurée dans la première partie de l'expérience. Lorsque cette



condition est réalisée, la puissance électrique moyenne fournie à la résistance  $R$  par la source alternative est la même que celle que débitait la source continue.

La puissance débitée par la source alternative à tout instant est:

$$P_{c.a.} = (i_{c.a.})^2 R = (I_m \sin \omega t)^2 R = (I_m^2 \sin^2 \omega t) R$$

mais:

$$\sin^2 \omega t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega t) \quad (\text{identité trigonométrique})$$

$$\therefore P_{c.a.} = I_m^2 \left[ \frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega t) \right] R$$

et:

$$P_{c.a.} = \frac{I_m^2 R}{2} - \frac{I_m^2 R}{2} \cos 2\omega t \quad (13.25)$$

La puissance moyenne débitée par la source alternative est le premier terme de cette équation, la valeur moyenne d'une onde cosinusoidale étant nulle même quand sa pulsation est le double de celle de la forme d'onde du courant d'entrée. L'égalité entre la puissance moyenne débitée par l'alternateur et celle débitée par la source continue permet d'écrire:

$$P_{m(c.a.)} = P_{c.c.}$$

$$\frac{I_m^2 R}{2} = I_{c.c.}^2 R$$

et:

$$I_m = \sqrt{2} I_{c.c.}$$

ou encore:

$$I_{c.c.} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 I_m$$

En d'autres termes, la valeur continue équivalant à une grandeur sinusoidale est égale à  $1/\sqrt{2}$  ou à 0,707 fois sa valeur maximale. Cette valeur continue équivalente est la valeur efficace de la grandeur sinusoidale.

En résumé, nous avons:

$$I_{(c.c. \text{ équivalent})} = I_{\text{eff}} = 0,707 I_m \quad (13.26)$$

ou:

$$I_m = \sqrt{2} I_{\text{eff}} = 1,414 I_{\text{eff}} \quad (13.27)$$

et:

$$E_{\text{eff}} = 0,707 E_m \quad (13.28)$$

ou encore:

$$E_m = \sqrt{2} E_{\text{eff}} = 1,414 E_{\text{eff}} \quad (13.29)$$





Ainsi, un courant alternatif dont la valeur de crête est de  $\sqrt{2}(10)$  ou 14,14 A fournirait à la résistance du circuit illustré à la figure 13.44 la même puissance qu'un courant continu de 10 A. La valeur efficace de toute grandeur tracée en fonction du temps peut se déterminer à l'aide de l'équation ci-dessous, dérivée à partir de l'expérience que nous venons de décrire:

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{\int_0^T [i(t)]^2 dt}{T}} \quad (13.30)$$

ou:

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{\sum \text{Aires } [i(t)]^2}{T}} \quad (13.31)$$

Cela veut dire: la valeur efficace de l'intensité du courant est égale à la racine carrée de la moyenne des carrés des valeurs instantanées. L'expression anglaise rms que l'on voit fréquemment sur les plaques signalétiques signifie valeur efficace et provient de *root* (racine) *mean* (moyenne) *square* (carrée).

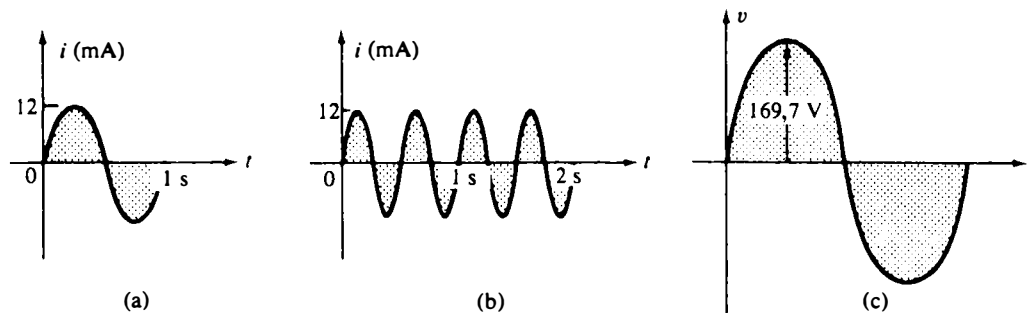


FIG. 13.45

**EXEMPLE 13.10** Calculer les valeurs efficaces des ondes sinusoïdales illustrées à la figure 13.45.

*Solution:*

- a.  $I_{\text{eff}} = 0,707(12 \times 10^{-3}) = 8,484 \text{ mA}$
- b.  $I_{\text{eff}} = 8,484 \text{ mA}$

On peut noter, en comparant ce dernier résultat au premier, que la fréquence n'influe pas sur la valeur efficace.

- c.  $V_{\text{eff}} = 0,707(169,7) \cong 120 \text{ V}$  (c'est la tension du secteur).

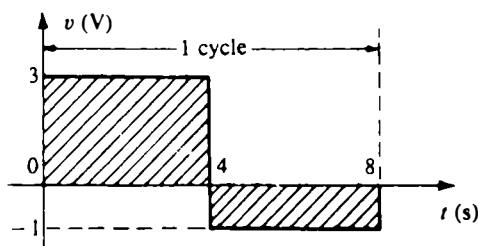


FIG. 13.46

**EXEMPLE 13.11** Calculer la valeur efficace de la forme d'onde illustrée à la figure 13.46.



Solution:

La forme d'onde  $v^2$  apparaît à la figure 13.47.

$$V_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{(9)(4) + (1)(4)}{8}} = \sqrt{\frac{40}{8}}$$

$$V_{\text{eff}} = 2,236 \text{ V}$$

**EXEMPLE 13.12** Calculer la valeur efficace de la forme d'onde de tension illustrée à la figure 13.48.

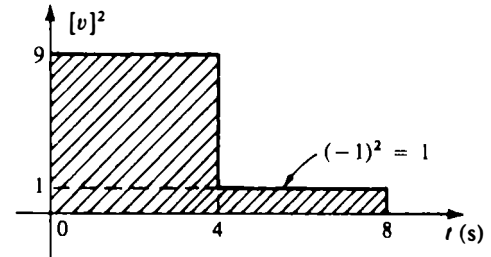


FIG. 13.47

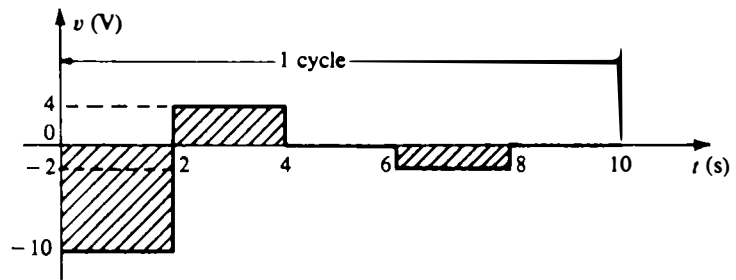


FIG. 13.48

Solution:

La forme d'onde  $v^2$  apparaît à la figure 13.49.

$$V_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{(100)(2) + (16)(2) + (4)(2)}{10}} = \sqrt{\frac{240}{10}}$$

$$V_{\text{eff}} \cong 4,899 \text{ V}$$

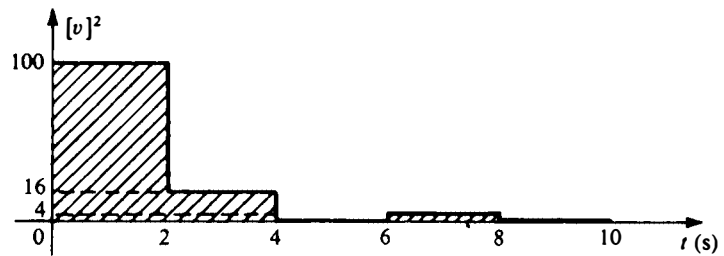


FIG. 13.49

**EXEMPLE 13.13** Déterminer les valeurs moyenne et efficace de l'onde carrée illustrée à la figure 13.50.

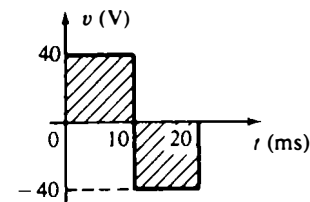


FIG. 13.50

Solution:

(À l'estime, la valeur moyenne est nulle.)

La forme d'onde  $v^2$  apparaît à la figure 13.51.

$$V_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{(1600)(10 \times 10^{-3}) + (1600)(10 \times 10^{-3})}{20 \times 10^{-3}}}$$

$$V_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{32\,000 \times 10^{-3}}{20 \times 10^{-3}}} = \sqrt{1600}$$

et par suite  $V_{\text{eff}} = 40 \text{ V}$  (valeur maximale de l'onde).

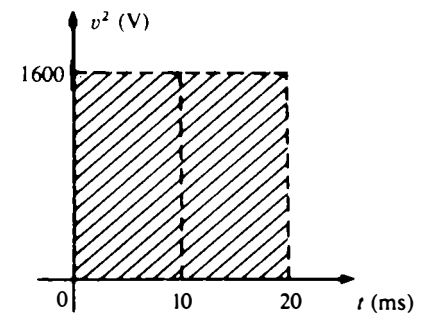


FIG. 13.51



Les formes d'onde de ces exemples sont les mêmes que celles que nous avons utilisées dans les exemples de calcul de la valeur moyenne. Il est certes instructif de comparer les valeurs moyenne et efficace de celles-ci.

Les valeurs efficaces de grandeurs sinusoïdales comme le courant et la tension seront représentées par des majuscules:  $E$  et  $I$  par exemple. Ces symboles étant aussi employés pour représenter les tensions et les courants continus, la valeur de crête d'une forme d'onde sera toujours affectée de l'indice inférieur  $m$ :  $I_m \sin \omega t$ . *Attention*: Dans le calcul de la valeur efficace de l'alternance positive d'une sinusoïde, le carré de l'aire n'est pas  $(2A_m)^2 = 4A_m^2$ ; ce carré ne peut s'évaluer que par calcul intégral. La mise en garde vaut pour toute forme d'onde qui n'est pas rectangulaire.

### 13.10 LA DÉRIVÉE

Pour être en mesure de faire l'analyse de quelques circuits alternatifs fondamentaux, nous devons pouvoir calculer la dérivée d'une fonction sinusoïdale (ou cosinusoidale), puisque celle-ci apparaît très tôt dans cette analyse.

Rappelons de la section 9.7 que la dérivée  $dx/dt$  est définie comme étant le taux de variation de  $x$  par rapport au temps. Si  $x$  ne varie pas à un instant donné, alors  $dx = 0$  et la dérivée est nulle. Dans le cas d'une onde sinusoïdale,  $dx/dt$  est nulle uniquement aux crêtes positive et négative ( $\omega t = \pi/2$  et  $3/2\pi$  à la figure 13.52), puisque la variation de  $x$  est nulle à ces deux instants.

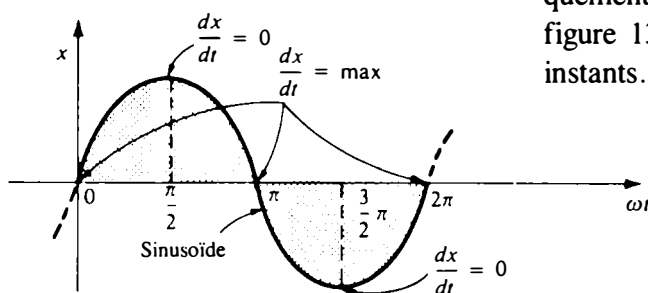


FIG. 13.52

Un examen attentif de l'onde sinusoïdale montre également que la variation de  $x$  est maximale aux instants  $\omega t = 0, \pi$  et  $2\pi$ . La dérivée de la fonction sinusoïdale est donc maximale en grandeur à ces points. Entre ces points maximaux et minimaux, la dérivée existe, sa valeur oscillant entre son maximum et son minimum inclusivement. La figure 13.53 illustre le tracé de la dérivée de la fonction sinusoïdale; on y voit qu'elle est une fonction sinusoïdale.

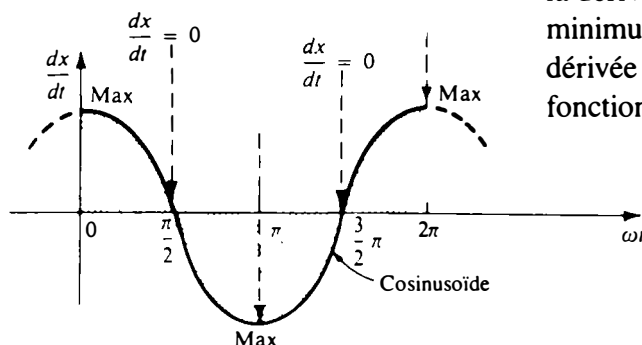


FIG. 13.53



La valeur de crête de l'onde cosinusoidale est liée directement à la fréquence de l'onde originale. Plus grande est la fréquence plus grande est la pente de la courbe lorsqu'elle croise l'abscisse, et plus grande est la valeur de  $dx/dt$ , comme l'illustre la figure 13.54.

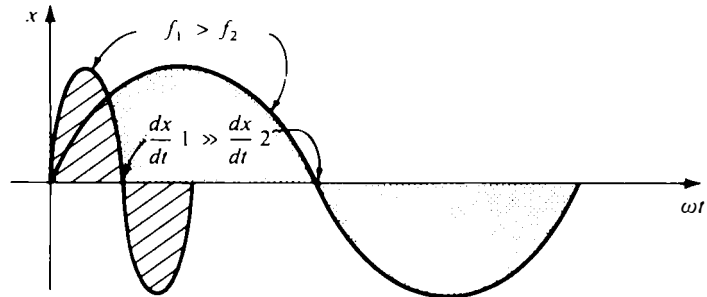


FIG. 13.54

Le calcul différentiel permet d'établir directement la dérivée d'une onde sinusoïdale:

$$\frac{d}{dt} [E_m \sin(\omega t \pm \theta)] = \omega E_m \cos(\omega t \pm \theta) \quad (13.32)$$

De façon semblable, si:

$$x(t) = e(t) = E_m \cos(\omega t \pm \theta)$$

on a alors:

$$\frac{d}{dt} [E_m \cos(\omega t \pm \theta)] = -\omega E_m \sin(\omega t \pm \theta) \quad (13.33)$$

Dans le cas de l'onde sinusoïdale illustrée à la figure 13.52, nous avons  $\theta = 0$  et  $x = x_m \sin \omega t$ , de sorte que:

$$\frac{dx}{dt} = \omega X_m \cos \omega t$$

ou:

$$\frac{dx}{dt} = \overbrace{2\pi f X_m}^{\text{valeur de crête}} \cos \omega t$$

À noter l'effet de la pulsation ( $2\pi f$ ) sur la valeur de crête de l'onde. Ainsi que nous l'avons souligné auparavant, plus grande est la pulsation et plus grande est la valeur de crête de la dérivée.

### 13.11 RÉPONSE DES ÉLÉMENTS FONDAMENTAUX (R, L ET C) À UNE TENSION SINUSOÏDALE ET À UN COURANT SINUSOÏDAL

Connaissant la loi d'Ohm et les équations fondamentales du condensateur et de la bobine, nous sommes maintenant en



mesure d'appliquer une tension sinusoïdale ou un courant sinusoïdal aux éléments fondamentaux ( $R$ ,  $L$  et  $C$ ) et d'en déterminer la caractéristique de réponse.

## Résistance

Aux fréquences industrielles et aux fréquences allant jusqu'à quelques kilohertz, la valeur ohmique d'une résistance ne dépend pas, à toutes fins pratiques, de la fréquence de la tension sinusoïdale appliquée ou du courant sinusoïdal qui traverse la résistance. Dans cette gamme de fréquences, on peut supposer que la valeur ohmique de la résistance  $R$  (figure 13.55) est constante; l'application de la loi d'Ohm donne donc:

$$i = \frac{v}{R} = \frac{V_m \sin \omega t}{R} = \frac{V_m}{R} \sin \omega t = I_m \sin \omega t$$

où:

$$I_m = \frac{V_m}{R}$$

En outre, pour un courant  $i$  donné, on a:

$$v = iR = (I_m \sin \omega t)R = I_m R \sin \omega t = V_m \sin \omega t$$

dans laquelle:

$$V_m = I_m R$$

Le tracé de  $v$  et de  $i$  à la figure 13.56 montre que pour un élément purement résistif la tension aux bornes de cet élément est *en phase* avec le courant qui le traverse.

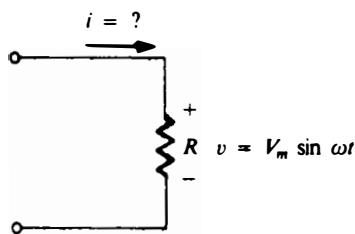


FIG. 13.55

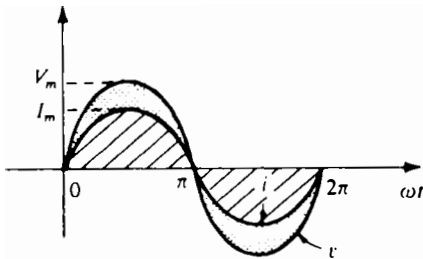


FIG. 13.56

## Bobine

Dans le montage série à la figure 13.57, la tension qui apparaît aux bornes de la boîte s'oppose à la source de f.é.m. et fait chuter par conséquent l'intensité  $i$  du courant. La grandeur de la tension aux bornes de la boîte est liée directement à l'opposition qu'offre la boîte au passage des charges, ou du courant  $i$ . Dans le cas d'un élément résistif, nous avons trouvé que cette opposition est la résistance de la boîte et que  $v_{\text{boîte}}$  et  $i$  sont liés par la relation  $v_{\text{boîte}} = iR$ .

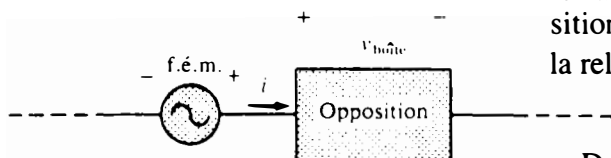


FIG. 13.57

Dans le cas d'une bobine, nous avons trouvé au chapitre 11 que la force contre-électromotrice (c'est-à-dire la tension qui se développe à ses bornes) est liée directement à la vitesse de la variation du courant qui traverse la bobine. Par conséquent, plus grande est la pulsation du courant, plus grande est sa vitesse de variation dans la bobine et plus grande est la grandeur de la force contre-électromotrice. En outre, nous avons trouvé au même chapitre que c'est l'inductance d'une bobine qui détermine la vitesse de variation du flux embrassé par la bobine correspondant à une variation donnée du courant qui parcourt la



bobine. Plus grande est l'inductance de la bobine, plus grande est la vitesse de variation du flux embrassé et plus grande est la tension résultante apparaissant aux bornes de la bobine.

La force contre-électromotrice est par conséquent liée directement à la pulsation du courant et à l'inductance de la bobine. À la figure 13.58, la force contre-électromotrice (f.c.é.m.) est représentée par  $v_L$  et l'intensité du courant dans la bobine par  $i_L$ . Si la pulsation  $\omega$  et l'inductance  $L$  augmentent, la tension  $v_L$  augmente également. Ainsi que le laisse deviner la figure, le produit de la pulsation et de l'inductance représente l'opposition au passage du courant  $i_L$ : pour une f.é.m. donnée, plus grande en effet est la tension  $v_L$ , plus petite est l'intensité  $i_L$  du courant.

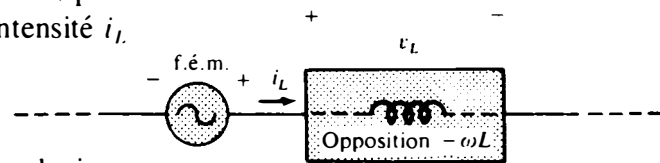


FIG. 13.58

Nous allons maintenant vérifier certaines des conclusions ci-dessus en adoptant une approche plus mathématique et nous définirons ensuite certaines grandeurs importantes qui seront employées dans les sections et les chapitres qui suivent.

Dans le cas de la bobine illustrée à la figure 13.59, nous savons que:

$$v_L = L \frac{di_L}{dt}$$

et par calcul différentiel nous avons:

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{d}{dt} (I_m \sin \omega t) = \omega I_m \cos \omega t$$

$$\therefore v_L = L \frac{di_L}{dt} = L(\omega I_m \cos \omega t) = \omega L I_m \cos \omega t$$

ou:

$$v_L = V_m \sin(\omega t + 90^\circ)$$

dans laquelle:

$$V_m = \omega L I_m$$

Notons que la valeur de crête de  $v_L$  est liée directement à la pulsation  $\omega$  et à l'inductance  $L$ , comme nous l'avons établi précédemment.

Le tracé de  $v_L$  et de  $i_L$  à la figure 13.60 révèle que  $v_L$  est en avance de  $90^\circ$  sur  $i_L$ .

On a donc:

$$i_L = I_m \sin(\omega t \pm \theta)$$

$$v_L = \omega L I_m \sin(\omega t \pm \theta + 90^\circ)$$

L'opposition au passage du courant qu'offre la bobine dans un circuit alternatif sinusoïdal se détermine au moyen de l'équation (4.1):

$$\text{Effet} = \frac{\text{cause}}{\text{opposition}}$$

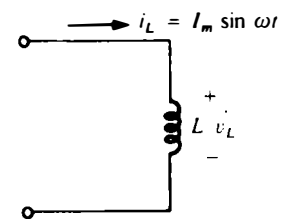


FIG. 13.59

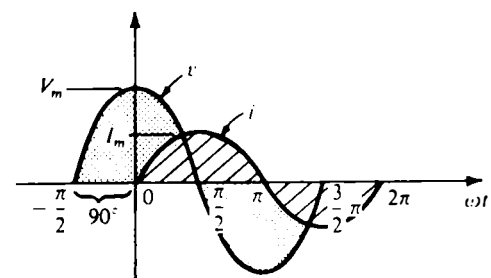


FIG. 13.60



ce qui s'écrit encore:

$$\text{Opposition} = \frac{\text{cause}}{\text{effet}}$$

Par substitution, on a:

$$\text{Opposition} = \frac{V_m}{I_m} = \frac{\omega L I_m}{I_m} = \omega L$$

ce qui confirme nos résultats antérieurs.

La grandeur  $\omega L$ , appelée la *réactance* de la bobine, est représentée par le symbole  $X_L$  et se mesure en *ohms*:

$$\boxed{X_L = \omega L} \quad (\text{ohms}) \quad (13.34)$$

La réactance inductive est donc l'opposition au passage du courant; elle résulte d'un transfert constant d'énergie entre la source et le champ magnétique créé par la bobine. En d'autres termes, la réactance ne provoque pas de dissipation d'énergie électrique, contrairement à la résistance.

## Condensateur

Revenons maintenant au montage série illustré à la figure 13.58 et substituons un condensateur à la bobine. Pour ce condensateur, nous allons déterminer l'intensité  $i$  du courant pour une tension donnée à ses bornes. Une fois la présente analyse terminée, nous aurons établi la relation qui existe entre la tension et le courant et serons ainsi en mesure de calculer la tension d'opposition ( $v_{\text{boite}}$ ) en fonction de l'intensité  $i$  du courant sinusoïdal.

Notre étude de la réponse de la bobine a montré que la f.c.é.m. développée aux bornes de la bobine s'opposait à la variation instantanée du courant dans la bobine. Dans un réseau capacitif, la tension aux bornes du condensateur est limitée par la vitesse avec laquelle la charge peut s'accumuler sur les armatures du condensateur pendant sa charge et la vitesse avec laquelle on peut l'en retirer pendant la décharge. En d'autres termes, une variation instantanée de la tension aux bornes du condensateur rencontre une certaine opposition en raison du fait qu'il faut un certain temps pour que la charge s'accumule sur les armatures (ou en soit retirée), comme l'indique la relation  $V = Q/C$ .

La capacité étant une mesure de la vitesse avec laquelle un condensateur emmagasine une charge sur ses armatures *pour une tension donnée à ses bornes, plus grande est la capacité et plus grande est l'intensité du courant capacitif résultant*. En outre, l'équation fondamentale liant la tension aux bornes d'un condensateur à l'intensité du courant qui parcourt ce condensateur ( $i = C dv/dt$ ) indique que pour une capacité



donnée, plus grand est le taux de variation de la tension aux bornes du condensateur, plus grande est l'intensité du courant capacitif. Par suite, une augmentation de la pulsation accroît le taux de variation de la tension aux bornes du condensateur et par conséquent l'intensité du courant capacitif.

L'intensité du courant capacitif est donc directement liée à la pulsation du courant et à la capacité du condensateur. Toute augmentation de l'une ou l'autre de ces grandeurs entraîne une augmentation de l'intensité du courant. Dans le montage fondamental illustré à la figure 13.61, ce qui nous intéresse c'est toutefois de déterminer l'opposition qu'offre le condensateur au passage du courant, comme nous l'avons fait pour la résistance et la bobine. Puisqu'une augmentation de l'intensité du courant correspond à une diminution de l'opposition du condensateur, et puisque  $i_C$  est proportionnelle à  $\omega$  et à  $C$ , on peut conclure que l'opposition d'un condensateur est directement liée à l'inverse du produit  $\omega C$ , c'est-à-dire à  $1/\omega C$ , comme l'indique la figure 13.61. En d'autres termes, plus grandes sont la pulsation et la capacité, plus petite est l'opposition au passage du courant  $i_C$  ou encore plus petite est la f.c.é.m. ( $v_C$ ) du condensateur; c'est cette force contre-électromotrice qui limite l'intensité  $i_C$  du courant, comme le laisse deviner la figure 13.57.

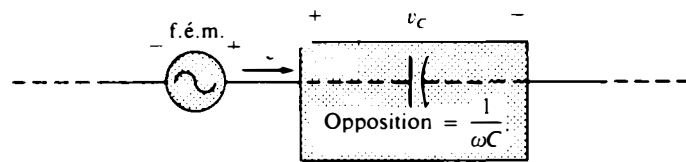


FIG. 13.61

Comme nous l'avons fait pour la bobine, nous allons maintenant vérifier certaines de nos conclusions en adoptant une approche plus mathématique. Nous définirons ensuite certaines importantes grandeurs fréquemment utilisées.

Dans le cas du condensateur illustré à la figure 13.62, nous savons que:

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt}$$

et que:

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{d}{dt} (V_m \sin \omega t) = \omega V_m \cos \omega t$$

$$\therefore i_C = C \frac{dv_C}{dt} = C(\omega V_m \cos \omega t) = \omega C V_m \cos \omega t$$

ou encore:

$$i_C = I_m \sin(\omega t + 90^\circ)$$

dans laquelle:

$$I_m = \omega C V_m$$

Notons que la valeur de crête de  $i_C$  est directement liée à la pulsation  $\omega$  et à la capacité  $C$ , comme nous l'avons établi précédemment.

Le tracé de  $v_C$  et de  $i_C$  à la figure 13.63 révèle que  $i_C$  est en avance de  $90^\circ$  sur  $v_C$ , ou que  $v_C$  est en retard de  $90^\circ$  sur  $i_C$ .

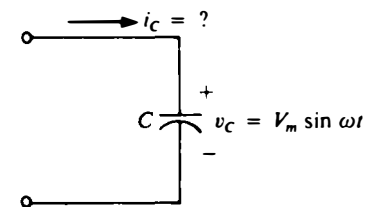


FIG. 13.62

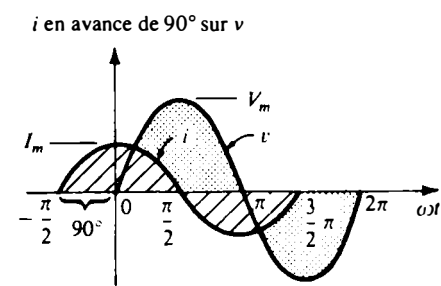


FIG. 13.63





On peut donc écrire:

$$v_c = V_m \sin(\omega t \pm \theta)$$

$$i_c = \omega C V_m \sin(\omega t \pm \theta + 90^\circ)$$

Par application de la relation:

$$\text{Opposition} = \frac{\text{cause}}{\text{effet}}$$

et par substitution des valeurs, on a:

$$\text{Opposition} = \frac{V_m}{I_m} = \frac{V_m}{\omega C V_m} = \frac{1}{\omega C}$$

ce qui confirme nos résultats antérieurs.

La grandeur  $1/\omega C$  est appelée la *réactance* du condensateur; on la représente par le symbole  $X_c$  et on la mesure en ohms:

$$\boxed{X_c = \frac{1}{\omega C}} \quad (\text{ohms}) \quad (13.35)$$

La réactance capacitive est l'opposition au passage du courant qui résulte d'un transfert constant d'énergie entre la source et le champ électrique créé par le condensateur. Tout comme dans le cas de la bobine, le condensateur *ne dissipe pas* d'énergie (abstraction faite des pertes par courant de fuite).

Jusqu'à maintenant, nous avons précisé l'intensité du courant qui parcourait le circuit inductif et la tension qui était appliquée au circuit capacitif. Cela a été fait dans un but bien simple: éviter le recours à l'intégration pour déterminer les grandeurs inconnues. Dans le circuit inductif:

$$v_L = L \frac{di_L}{dt}$$

ce qui permet de déterminer le courant puisque:

$$\boxed{i_L = \frac{1}{L} \int v_L dt} \quad (13.36)$$

De même, dans le circuit capacitif:

$$i_c = C \frac{dv_c}{dt}$$

ce qui permet de déterminer la tension puisque:

$$\boxed{v_c = \frac{1}{C} \int i_c dt} \quad (13.37)$$



Nous considérerons sous peu une méthode d'analyse des circuits alternatifs qui nous permettra de déterminer une grandeur inconnue d'un courant sinusoïdal sans avoir à utiliser directement le calcul intégral ou différentiel.

Il est possible de déterminer si un circuit contenant un ou plusieurs éléments est surtout capacitif ou surtout inductif du moment qu'on connaît la relation de phase entre la tension d'entrée et le courant d'entrée. *Si le courant est en avance sur la tension, le circuit est surtout capacitif; si par contre la tension est en avance sur le courant, il est surtout inductif.*

Connaissant maintenant les équations permettant de calculer la réactance d'une bobine et d'un condensateur, il ne nous sera pas nécessaire d'utiliser le calcul différentiel et intégral dans les exemples qui suivront. Il nous suffira simplement d'appliquer la loi d'Ohm  $I_m = E_m / X_L$  (ou  $X_C$ ) et de déterminer la relation de phase entre la tension et le courant de chacun des éléments pour résoudre les problèmes posés.

**EXEMPLE 13.14** La tension présente aux bornes d'une résistance est précisée ci-dessous. Trouver l'expression sinusoïdale du courant, si la résistance est de  $10 \Omega$ . Tracer les courbes de  $v$  et de  $i$  en fonction de l'angle  $\omega t$ .

*Solution:*

$$a. i = \frac{v}{R} = \frac{100}{10} \sin 377t$$

et:

$$i = 10 \sin 377t$$

Les courbes sont tracées à la figure 13.64.

$$b. i = \frac{v}{R} = \frac{25}{10} \sin(377t + 60^\circ)$$

et:

$$i = 2,5 \sin(377t + 60^\circ)$$

Les courbes sont tracées à la figure 13.65.

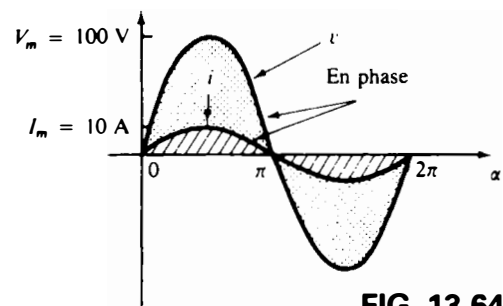


FIG. 13.64

**EXEMPLE 13.15** Déterminer l'expression sinusoïdale de la tension aux bornes d'une résistance de  $5 \Omega$ , si le courant est  $i = 40 \sin(377t + 30^\circ)$ .

*Solution:*

$$v = iR = (40)(5) \sin(377t + 30^\circ)$$

et:

$$v = 200 \sin(377t + 30^\circ)$$

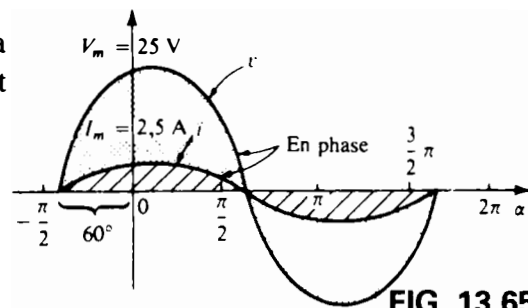


FIG. 13.65



**EXEMPLE 13.16** Le courant parcourant une bobine de 0,1 H est précisé ci-dessous. Déterminer l'expression sinusoidale de la tension aux bornes de la bobine et tracer les courbes de  $v$  et de  $i$ .

- $i = 10 \sin 377t$
- $i = 7 \sin(377t - 70^\circ)$

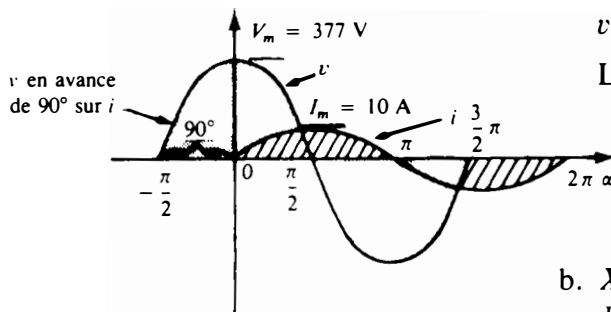
*Solution:*

- $X_L = \omega L = 37,7 \Omega$   
 $V_m = I_m X_L = (10)(37,7) = 377 \text{ V}$

et nous savons que dans une bobine la tension  $v$  est en avance de  $90^\circ$  sur le courant  $i$ . Par conséquent:

$$v = 377 \sin(377t + 90^\circ)$$

Les courbes sont tracées à la figure 13.66.



**FIG. 13.66**

- $X_L = 37,7 \Omega$   
 $V_m = I_m X_L = (7)(37,7) = 263,9 \text{ V}$

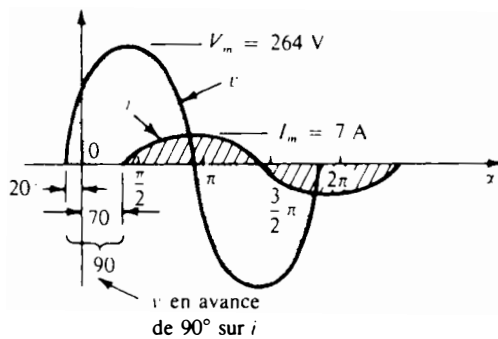
et nous savons que dans une bobine la tension  $v$  est en avance de  $90^\circ$  sur le courant  $i$ . Par conséquent:

$$v = 263,9 \sin(377t - 70^\circ + 90^\circ)$$

et:

$$v = 263,9 \sin(377t + 20^\circ)$$

Les courbes sont tracées à la figure 13.67.



**FIG. 13.67**

**EXEMPLE 13.17** Déterminer l'expression sinusoidale du courant parcourant une bobine de 0,5 H, si la tension aux bornes de la bobine est:

$$v = 100 \sin 20t$$

*Solution:*

$$X_L = \omega L = (20)(0,5) = 10 \Omega$$

$$I_m = \frac{V_m}{X_L} = \frac{100}{10} = 10 \text{ A}$$

et nous savons que dans une bobine le courant  $i$  est en retard de  $90^\circ$  sur la tension  $v$ . Par conséquent:

$$i = 10 \sin(20t - 90^\circ)$$

**EXEMPLE 13.18** La tension aux bornes d'un condensateur de  $1 \mu\text{F}$  est donnée ci-dessous. Quelle est l'expression sinusoidale du courant? Tracer les courbes de  $v$  et de  $i$ .

$$v = 30 \sin 400t$$



Solution:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{(400)(1 \times 10^{-6})} = \frac{10^6}{400} = 2500 \Omega$$

$$I_m = \frac{V_m}{X_C} = \frac{30}{2500} = 0,012 \text{ A}$$

et nous savons que dans un condensateur le courant  $i$  est en avance de  $90^\circ$  sur la tension  $v$ . Par conséquent:

$$i = 0,012 \sin(400t + 90^\circ)$$

Les courbes sont tracées à la figure 13.68.

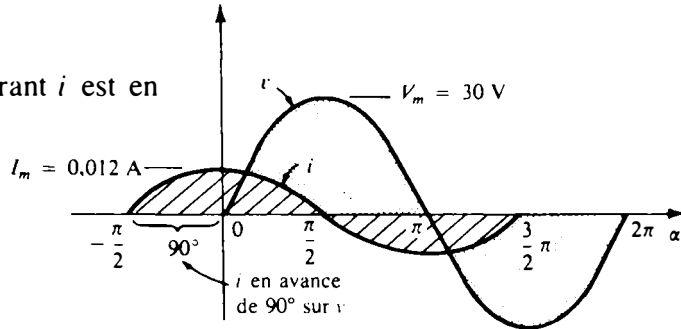


FIG. 13.68

**EXEMPLE 13.19** Le courant aux bornes d'un condensateur de  $100 \mu\text{F}$  est donné ci-dessous. Déterminer l'expression sinusoidale de la tension aux bornes du condensateur.

$$i = 40 \sin(500t + 60^\circ)$$

Solution:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{(500)(100 \times 10^{-6})} = \frac{10^6}{5 \times 10^4} = \frac{10^2}{5} = 20 \Omega$$

$$V_m = I_m X_C = (40)(20) = 800 \text{ V}$$

et nous savons que dans un condensateur la tension  $v$  est en retard de  $90^\circ$  sur le courant  $i$ . Par conséquent:

$$v = 800 \sin(500t + 60^\circ - 90^\circ)$$

et:

$$v = 800 \sin(500t - 30^\circ)$$

**EXEMPLE 13.20** Pour chacune des paires de tension et de courant données ci-dessous, indiquer si l'élément en cause est un condensateur, une bobine ou une résistance et en préciser la valeur (figure 13.69).

a.  $v = 100 \sin(\omega t + 40^\circ)$   
 $i = 20 \sin(\omega t + 40^\circ)$

b.  $v = 1000 \sin(377t + 10^\circ)$   
 $i = 5 \sin(377t - 80^\circ)$

c.  $v = 500 \sin(157t + 30^\circ)$   
 $i = 1 \sin(157t + 120^\circ)$

d.  $v = 50 \cos(\omega t + 20^\circ)$   
 $i = 5 \sin(\omega t + 110^\circ)$

Solution:

a. Puisque  $v$  et  $i$  sont en phase, l'élément est une résistance.

$$R = \frac{V_m}{I_m} = \frac{100}{20} = 5 \Omega$$

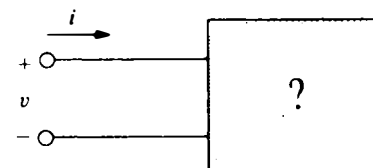


FIG. 13.69



- b. Puisque  $v$  est *en avance* de  $90^\circ$  sur  $i$ , l'élément est une bobine.

$$X_L = \frac{V_m}{I_m} = \frac{1000}{5} = 200 \Omega$$

de sorte que:

$$X_L = \omega L = 200 \Omega \quad \text{ou} \quad L = \frac{200}{\omega} = \frac{200}{377}$$

et:

$$L = \mathbf{0,531 \text{ H}}$$

- c. Puisque  $i$  est *en avance* de  $90^\circ$  sur  $v$ , l'élément est un condensateur.

$$X_C = \frac{V_m}{I_m} = \frac{500}{1} = 500 \Omega$$

de sorte que:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = 500 \Omega \quad \text{ou} \quad C = \frac{1}{\omega 500} = \frac{1}{(157)(500)}$$

et:

$$C = \mathbf{12,74 \text{ H}}$$

- d.  $v = 50 \cos(\omega t + 20^\circ) = 50 \sin(\omega t + 20^\circ + 90^\circ)$   
 $= 50 \sin(\omega t + 110^\circ)$

Puisque  $v$  et  $i$  sont *en phase*, l'élément est une résistance.

$$R = \frac{V_m}{I_m} = \frac{50}{5} = \mathbf{10 \Omega}$$

Dans les circuits en courant continu, la pulsation du courant est nulle puisque son intensité est constante. La réactance d'une bobine dans un tel circuit est donc:

$$X_L = 2\pi f L = 2\pi 0 L = 0 \Omega$$

et on représente la bobine par un court-circuit (chapitre 11). Aux très hautes fréquences,  $X_L \uparrow = 2\pi f \uparrow L$  est très grande, et aux fins de certaines applications, la bobine peut être remplacée par un circuit ouvert.

Quant au condensateur, il peut être remplacé par un circuit ouvert dans les circuits en courant continu puisque  $f = 0$  et que:

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2\pi 0 C} = \infty \Omega$$

ce qui justifie l'analyse faite au chapitre 9. Aux très hautes fréquences, nous avons pour une capacité finie:

$$X_C \downarrow = \frac{1}{2\pi f \uparrow C}$$



La réactance capacitive est donc très petite et aux fins de certaines applications on peut substituer un court-circuit au condensateur.

### 13.12 PUISSANCE MOYENNE ET FACTEUR DE PUISSANCE

La puissance instantanée que fournit une onde sinusoïdale à la charge illustrée à la figure 13.70 est:

$$p = vi$$

Considérons le cas général pour lequel:

$$v = V_m \sin(\omega t + \beta) \quad \text{et} \quad i = I_m \sin(\omega t + \psi)$$

Nous avons alors:

$$\begin{aligned} p &= vi = V_m \sin(\omega t + \beta) I_m \sin(\omega t + \psi) \\ &= V_m I_m \sin(\omega t + \beta) \sin(\omega t + \psi) \end{aligned}$$

Une identité trigonométrique permet d'écrire:

$$\sin A \sin B = \frac{\cos(A - B) - \cos(A + B)}{2}$$

$$\begin{aligned} &\sin(\omega t + \beta) \sin(\omega t + \psi) \\ &= \frac{\cos[(\omega t + \beta) - (\omega t + \psi)] - \cos[(\omega t + \beta) + (\omega t + \psi)]}{2} \\ &= \frac{\cos(\beta - \psi) - \cos(2\omega t + \beta + \psi)}{2} \end{aligned}$$

et par suite:

$$p = \left[ \frac{V_m I_m}{2} \cos(\beta - \psi) \right] - \left[ \frac{V_m I_m}{2} \cos(2\omega t + \beta + \psi) \right]$$

Les tracés du courant, de la tension et de la puissance sont illustrés à la figure 13.71 sur le même graphique.

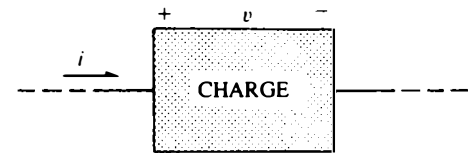


FIG. 13.70

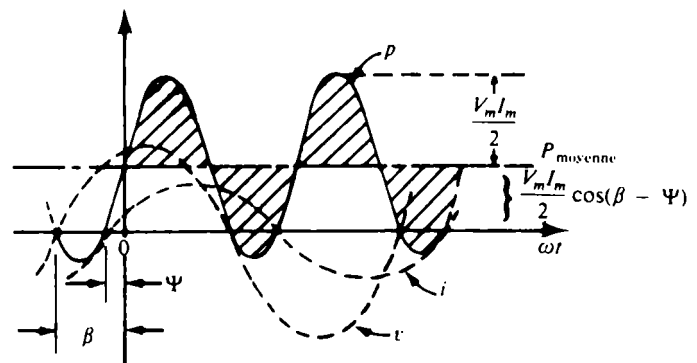


FIG. 13.71

Notons que le deuxième terme de l'équation précédente est une onde cosinusoidale d'amplitude  $V_m I_m / 2$  et d'une pulsation deux fois plus grande que celle de la tension ou du courant. La valeur moyenne de ce terme est nulle, le transfert net d'énergie dans un sens ou dans l'autre étant par conséquent nul.



Le premier terme de cette équation est toutefois d'une amplitude constante (c'est-à-dire indépendante du temps) et le transfert net d'énergie n'est donc pas nul. Ce terme représente la *puissance moyenne*, pour une raison qui apparaît dans toute son évidence à la figure 13.71. La puissance moyenne, ou la *puissance réelle* comme on l'appelle parfois, est la puissance fournie à la charge et dissipée par cette charge. Son expression correspond à l'expression obtenue dans le cas des réseaux en courant continu. L'angle  $(\beta - \psi)$  est le déphasage entre la tension  $v$  et le courant  $i$ . Puisque  $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ , la *grandeur de la puissance moyenne est indépendante de la relation de phase entre  $v$  et  $i$* . Définissons maintenant  $\theta$  égal à la valeur absolue du déphasage  $|\beta - \psi|$ ; nous avons alors:

$$P = \frac{V_m I_m}{2} \cos \theta \quad (\text{watts, W}) \quad (13.38)$$

où  $P$  est la puissance moyenne en watts. Cette équation peut aussi s'écrire:

$$P = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cos \theta$$

Puisque:

$$V_{\text{eff}} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad I_{\text{eff}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

l'équation (13.38) devient:

$$P = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \theta \quad (13.39)$$

Appliquons ces deux équations aux trois éléments fondamentaux,  $R$ ,  $L$  et  $C$ .

## Résistance

Dans un circuit purement résistif, puisque  $v$  et  $i$  sont en phase, on a  $|\beta - \psi| = \theta = 0^\circ$ , et  $\cos \theta = \cos 0^\circ = 1$ , de sorte que:

$$P = \frac{V_m I_m}{2} = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \quad (\text{W}) \quad (13.40)$$

Et puisque:

$$I_{\text{eff}} = \frac{V_{\text{eff}}}{R}$$

$$P = \frac{V_{\text{eff}}^2}{R} = I_{\text{eff}}^2 R \quad (\text{W}) \quad (13.41)$$



### Bobine

Dans un circuit purement inductif, puisque  $v$  est en avance de  $90^\circ$  sur  $i$ , on a  $|\beta - \psi| = \theta = 90^\circ$ . Par conséquent:

$$P = \frac{V_m I_m}{2} \cos 90^\circ = \frac{V_m I_m}{2} (0) = 0$$

*La puissance moyenne absorbée par la bobine idéale (ne présentant aucune composante résistive) est donc toujours nulle.*

### Condensateur

Dans un circuit purement capacitif, puisque  $i$  est en avance de  $90^\circ$  sur  $v$ , on a  $|\beta - \psi| = \theta = |-90^\circ| = 90^\circ$ . Par conséquent:

$$P = \frac{V_m I_m}{2} \cos(90^\circ) = \frac{V_m I_m}{2} (0) = 0$$

*La puissance moyenne absorbée par le condensateur idéal (ne présentant aucune composante résistive) est donc toujours nulle.*

**EXEMPLE 13.21** Calculer la puissance moyenne dissipée dans un circuit, si le courant et la tension sont:

$$i = 5 \sin(\omega t + 40^\circ)$$

$$v = 10 \sin(\omega t + 40^\circ)$$

*Solution:* Puisque  $v$  et  $i$  sont en phase, le circuit présente à ses bornes une charge purement résistive. Par conséquent:

$$P = \frac{V_m I_m}{2} = \frac{(10)(5)}{2} = 25 \text{ W}$$

ou:

$$R = \frac{V_m}{I_m} = \frac{10}{5} = 2 \Omega$$

et:

$$P = \frac{V_{\text{eff}}^2}{R} = \frac{[(0,707)(10)]^2}{2} = 25 \text{ W}$$

ou encore:

$$P = I_{\text{eff}}^2 R = [(0,707)(5)]^2 (2) = 25 \text{ W}$$

Dans l'exemple qui suit, le circuit est constitué de résistances et de bobines; il se produit donc un déphasage entre le courant et la tension différent de  $0^\circ$  et de  $90^\circ$ .

**EXEMPLE 13.22** Déterminer la puissance moyenne fournie au réseau, si la tension et le courant sont:

a.  $v = 100 \sin(\omega t + 40^\circ)$

$i = 20 \sin(\omega t + 70^\circ)$

b.  $v = 150 \sin(\omega t - 70^\circ)$

$i = 3 \sin(\omega t - 50^\circ)$





Solution:

a.  $V_m = 100, \beta = 40^\circ$   
 $I_m = 20, \psi = 70^\circ$   
 $\theta = |\beta - \psi| = |40^\circ - 70^\circ| = |-30^\circ| = 30^\circ$

et:

$$P = \frac{V_m I_m}{2} \cos \theta = \frac{(100)(20)}{2} \cos(30^\circ) = 1000(0,866) = 866 \text{ W}$$

b.  $V_m = 150, \beta = -70^\circ$   
 $I_m = 3, \psi = -50^\circ$   
 $\theta = |\beta - \psi| = |-70^\circ - (-50^\circ)| = |-70^\circ + 50^\circ| = |-20^\circ| = 20^\circ$

et:

$$P = \frac{V_m I_m}{2} \cos \theta = \frac{(150)(3)}{2} \cos(20^\circ) = (225)(0,9397) = 211,43 \text{ W}$$

### Facteur de puissance

La pulsation du courant et les éléments du réseau parallèle illustré à la figure 13.72a ont été choisis de telle sorte que:

$$\begin{aligned} i_1 &= 50 \sin \omega t \\ i_2 &= 50 \sin(\omega t + 90^\circ) \\ i_3 &= 50 \sin(\omega t - 90^\circ) \end{aligned}$$

Dans chacune des branches en parallèle, les valeurs de crête (ou les valeurs efficaces) de la tension et du courant sont par conséquent les mêmes. Cependant, comme l'indique la figure, la puissance fournie à deux des branches est nulle, et maximale dans le cas de la troisième. Dans l'équation (13.42), le seul facteur qui peut expliquer cette situation est le facteur  $\cos \theta$ , dont la valeur dépend du déphasage entre  $v$  et  $i$ . Ce facteur  $\cos \theta$  est le *facteur de puissance* du circuit; il est symbolisé par  $F_p$ :

Facteur de puissance =  $F_p = \cos \theta$

(13.42)

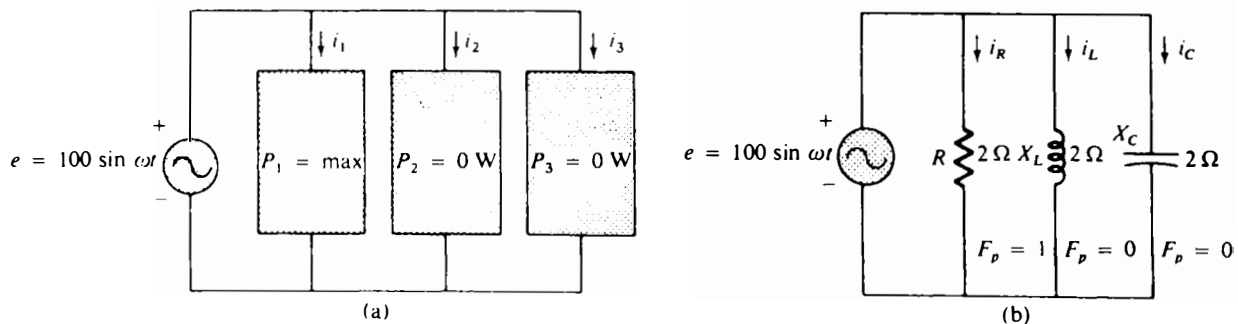


FIG. 13.72



Plus une charge est réactive, plus petit est ce facteur de puissance et plus petite par conséquent la puissance réelle fournie. De façon semblable, plus la charge est résistive plus grand est le facteur de puissance et plus grande est la puissance réelle fournie. Les éléments contenus dans chacune des boîtes noires illustrées à la figure 13.72a sont indiqués à la figure 13.72b avec leur facteur de puissance. On évite habituellement d'employer des éléments dont le facteur de puissance est petit, puisqu'il faut un courant élevé pour leur fournir une puissance appréciable. L'utilisation d'un courant élevé entraîne en effet des pertes importantes par effet Joule, le réseau étant alors d'un rendement faible.

L'équation qui lie le facteur de puissance à la puissance moyenne ainsi qu'à la tension et au courant est:

$$F_p = \cos \theta = \frac{P}{V_{\text{eff}} I_{\text{eff}}} \quad (13.43)$$

Souvent, on dit que le facteur de puissance est *capacitif* ou *inductif*. Il est *capacitif* si le courant est *en avance* sur la tension; il est *inductif* si le courant est *en retard* sur la tension.

**EXEMPLE 13.23** Déterminer le facteur de puissance de chacune des charges ci-dessous et indiquer s'il est capacitif ou inductif.

- a. Voir la figure 13.73.
- b. Voir la figure 13.74.
- c. Voir la figure 13.75.

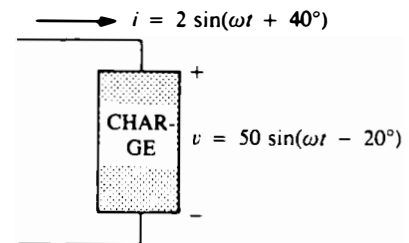


FIG. 13.73

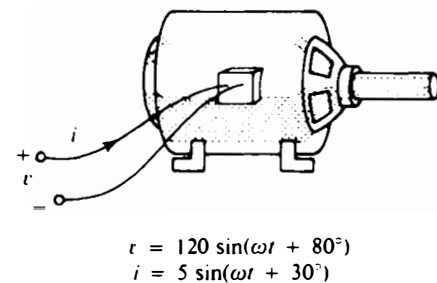


FIG. 13.74

*Solution:*

- a.  $F_p = \cos \theta = \cos 60^\circ = 0,5$  **capacitif**
- b.  $F_p = \cos \theta = \cos 50^\circ = 0,6428$  **inductif**
- c.  $F_p = \cos \theta = \frac{P}{V_{\text{eff}} I_{\text{eff}}} = \frac{100}{(20)(5)} = \frac{100}{100} = 1$

La charge est résistive et  $F_p$  n'est donc ni capacitif ni inductif.

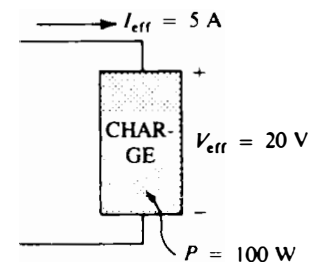


FIG. 13.75



## PROBLÈMES

### Section 13.4

- Voir la forme d'onde périodique illustrée à la figure 13.76.
  - Déterminez la période  $T$ .
  - Combien de cycles sont illustrés?
  - Quelle est la fréquence?
  - Quelle est l'amplitude?

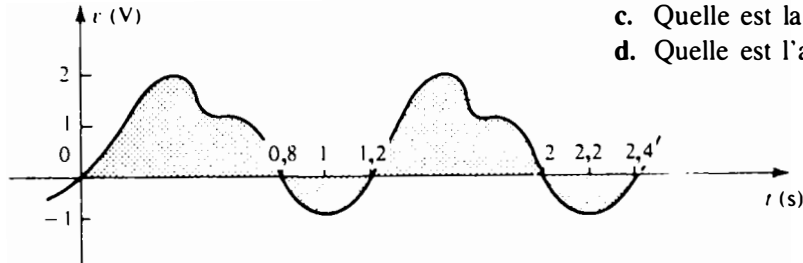


FIG. 13.76

- Refaites le problème 1 dans le cas de la forme d'onde illustrée à la figure 13.77.

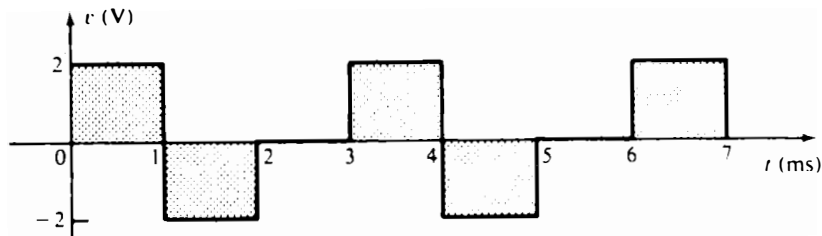


FIG. 13.77

- Calculez la période d'une onde périodique dont la fréquence est de:
  - 25 Hz
  - 35 MHz
  - 55 kHz
  - 1 Hz
- Calculez la fréquence d'une onde périodique dont la période est de:
  - 1/60 s
  - 0.01 s
  - 34 ms
  - 25  $\mu$ s
- Calculez la période d'une onde sinusoïdale qui décrit 80 cycles en 24 ms.
- La fréquence d'une onde périodique est de 20 Hz; quelle est la durée en secondes de 5 cycles entiers?
- Quelle est la fréquence d'une onde périodique qui décrit 42 cycles en 6 s?

### Section 13.5

- Exprimez les angles ci-dessous en radians.
 

a. $45^\circ$	b. $60^\circ$	c. $150^\circ$
d. $270^\circ$	e. $178^\circ$	f. $221^\circ$
- Exprimez les angles ci-dessous en degrés.
 

a. $\pi/4$	b. $\pi/6$	c. $\frac{5}{6}\pi$
d. $\frac{7}{6}\pi$	e. $\frac{4}{3}\pi$	f. $0,55\pi$
- Calculez la pulsation d'une onde dont la période est de:
 

a. 2 s	b. 0,3 ms	c. 0,5 s	d. 1/25 s
--------	-----------	----------	-----------
- Quelle est la pulsation d'une onde dont la fréquence est de:
 

a. 50 Hz	b. 600 Hz	c. 0,1 Hz	d. 0,004 MHz
----------	-----------	-----------	--------------



12. Calculez la fréquence et la période de l'onde sinusoïdale dont la pulsation est de:
- a. 754 rad/s
  - b. 8,4 rad/s
  - c. 6000 rad/s
  - d. 1/16 rad/s

## Section 13.6

13. Calculez l'amplitude et la fréquence des ondes ci-dessous.
- a.  $20 \sin 377t$
  - b.  $5 \sin 754t$
  - c.  $10^6 \sin 10\,000t$
  - d.  $0,001 \sin 942t$
  - e.  $-7,6 \sin 43,6t$
  - f.  $1/42 \sin 6,28t$
14. Tracez l'onde  $5 \sin 754t$  en graduant l'abscisse:
- a. en degrés;
  - b. en radians;
  - c. en secondes.
15. Tracez l'onde  $10^6 \sin 10\,000t$  en graduant l'abscisse:
- a. en degrés;
  - b. en radians;
  - c. en secondes.
16. Dessinez l'onde  $-7,6 \sin 43,9t$ , en graduant l'abscisse:
- a. en degrés;
  - b. en radians;
  - c. en secondes.
17. Combien de temps faut-il (exprimé en secondes) à l'onde  $e = 300 \sin 157t$  pour décrire 1/2 cycle?

## Section 13.7

18. Tracez l'onde  $\sin(377t + 60^\circ)$ , en graduant l'abscisse:
- a. en degrés;
  - b. en radians;
  - c. en secondes.
19. Tracez les ondes ci-dessous.
- a.  $50 \sin(\omega t + 0^\circ)$
  - b.  $-20 \sin(\omega t + 2^\circ)$
  - c.  $5 \sin(\omega t + 60^\circ)$
  - d.  $4 \cos \omega t$
  - e.  $2 \cos(\omega t + 10^\circ)$
  - f.  $-5 \cos(\omega t + 20^\circ)$
20. Déterminez la relation de phase entre les paires d'ondes ci-dessous.
- a.  $v = 4 \sin(\omega t + 50^\circ)$   
 $i = 6 \sin(\omega t + 40^\circ)$
  - b.  $v = 25 \sin(\omega t - 80^\circ)$   
 $i = 10 \sin(\omega t - 4^\circ)$
  - c.  $v = 0,2 \sin(\omega t - 65^\circ)$   
 $i = 0,1 \sin(\omega t + 25^\circ)$
  - d.  $v = 200 \sin(\omega t - 210^\circ)$   
 $i = 25 \sin(\omega t - 60^\circ)$
- \*21. Refaites le problème 20 dans le cas des paires d'ondes ci-dessous.
- a.  $v = 2 \cos(\omega t - 30^\circ)$   
 $i = 5 \sin(\omega t + 60^\circ)$
  - b.  $v = -1 \sin(\omega t + 20^\circ)$   
 $i = 10 \sin(\omega t - 70^\circ)$
  - c.  $v = -4 \cos(\omega t + 90^\circ)$   
 $i = -2 \sin(\omega t + 10^\circ)$



22. Écrivez l'expression analytique des ondes illustrées à la figure 13.78 en exprimant le déphasage en degrés.

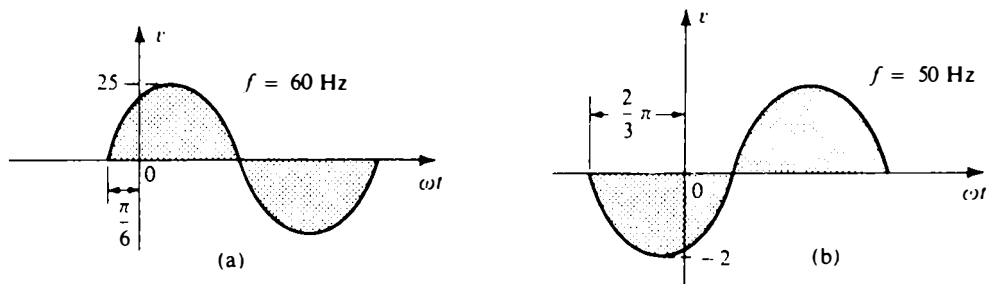


FIG. 13.78

23. Refaites le problème 22 dans le cas des ondes illustrées à la figure 13.79.

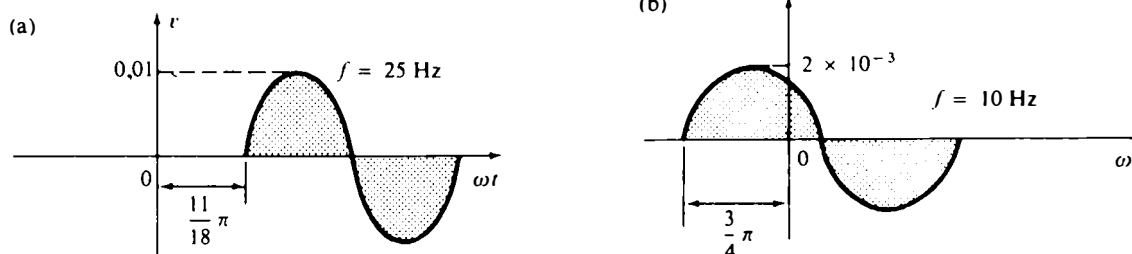


FIG. 13.79

Section 13.8

24. Calculez la valeur moyenne sur un cycle des ondes périodiques illustrées à la figure 13.80.

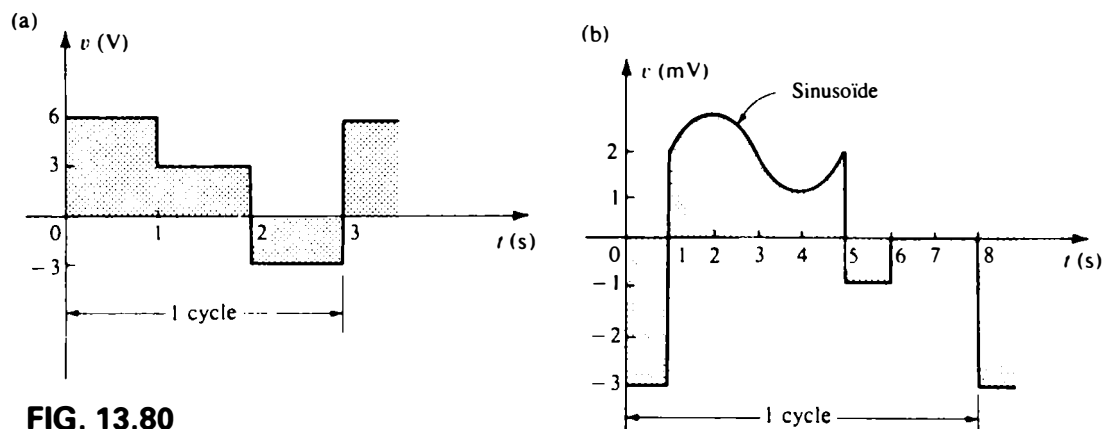


FIG. 13.80

25. Répondez au problème 24 dans le cas des ondes illustrées à la figure 13.81.

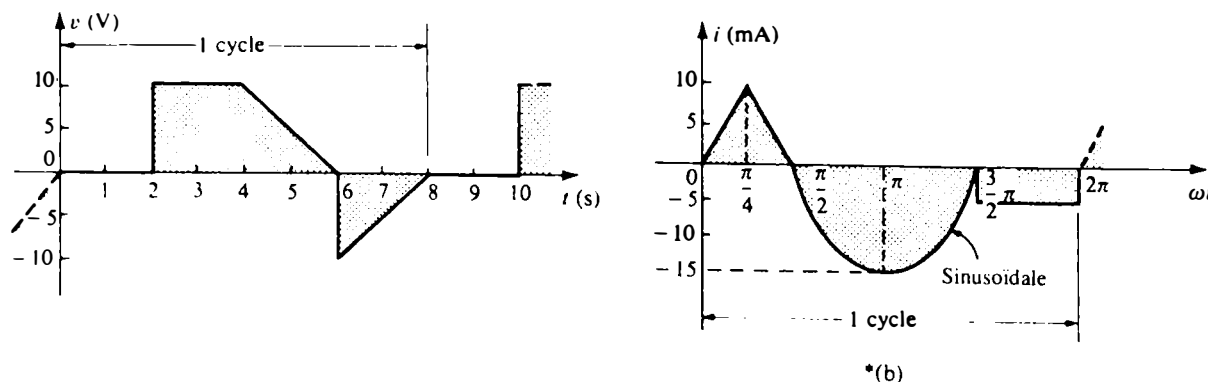


FIG. 13.81



26. a. Par approximation au moyen de figures géométriques, déterminez l'aire sous la courbe illustrée à la figure 13.82, entre 0 s et 10 s. Comparez la solution avec l'aire réelle qui est de 5 V·s.  
 b. Calculez la valeur moyenne de l'onde entre 0 s à 10 s.

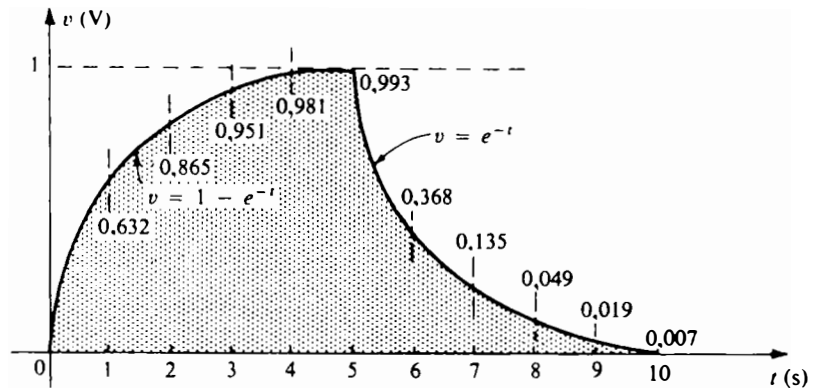


FIG. 13.82

Section 13.9

27. Calculez les valeurs efficaces des ondes sinusoïdales ci-dessous.  
 a.  $v = 20 \sin 754t$   
 b.  $v = 7,07 \sin 377t$   
 c.  $i = 0,006 \sin(400t + 20^\circ)$   
 d.  $i = 1,76 \cos(377t - 10^\circ)$
28. Écrivez les expressions sinusoïdales des tensions et des courants ci-dessous dont les valeurs efficaces à 60 Hz sont, pour un déphasage nul, de:  
 a. 1,414 V    b. 70,7 V    c. 0,06 A    d. 24  $\mu$ A
29. Calculez la valeur efficace sur un cycle entier de l'onde périodique illustrée à la figure 13.83.

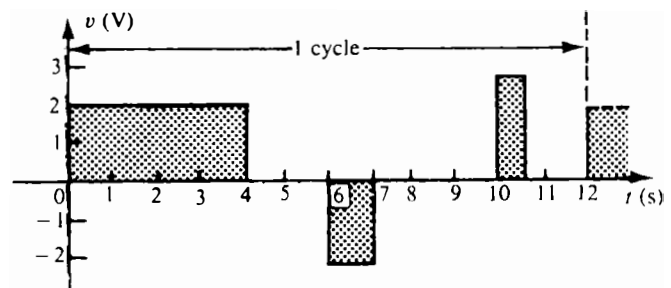


FIG. 13.83

30. Refaites le problème 29 dans l'onde illustrée à la figure 13.84.

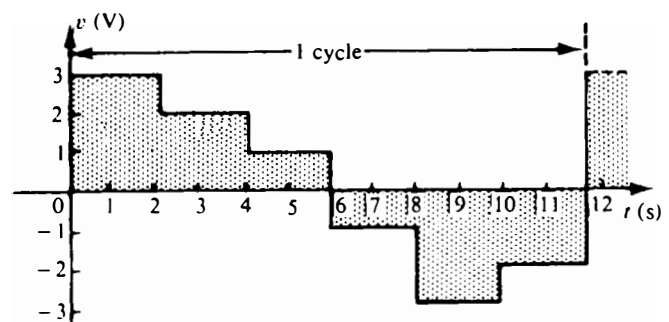


FIG. 13.84

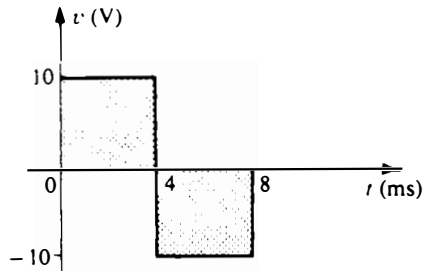


FIG. 13.85

31. Quelles sont les valeurs moyenne et efficace de l'onde carrée illustrée à la figure 13.85.

## Section 13.10

32. Quelle est la dérivée de chacune des fonctions sinusoidales ci-dessous?
- |                                 |                               |
|---------------------------------|-------------------------------|
| a. $10 \sin 377t$               | b. $0,6 \cos 754t$            |
| c. $0,05 \cos(157t - 10^\circ)$ | d. $25 \cos(20t - 150^\circ)$ |

## Section 13.11

33. La tension aux bornes d'une résistance de  $5 \Omega$  est précisée ci-dessous. Déterminez l'expression sinusoidale du courant. En outre, tracez les courbes de  $v$  et de  $i$  sur un graphique dont l'abscisse est graduée en radians.
- |                                   |                                    |
|-----------------------------------|------------------------------------|
| a. $150 \sin 377t$                | b. $30 \sin(377t + 20^\circ)$      |
| c. $40 \cos(\omega t + 10^\circ)$ | d. $-80 \sin(\omega t + 40^\circ)$ |
34. Le courant qui traverse une résistance de  $7 \text{ k}\Omega$  est précisé ci-dessous. Déterminez l'expression sinusoidale de la tension. En outre, tracez les courbes de  $v$  et de  $i$  sur un graphique dont l'abscisse est graduée en radians.
- |  |   |
|--|---|
| a. $0,03 \sin 754t$                            | b. $12 \times 10^{-3} \sin(400t - 120^\circ)$ |
| c. $6 \times 10^{-6} \cos(\omega t - 2^\circ)$ | d. $-0,004 \cos(\omega t - 90^\circ)$         |
35. Déterminez la réactance inductive (en ohms) d'une bobine de  $2 \text{ H}$ :
- |                        |                              |                      |                          |
|------------------------|------------------------------|----------------------|--------------------------|
| a. en courant continu, | et aux fréquences suivantes: |                      |                          |
| b. $25 \text{ Hz}$     | c. $60 \text{ Hz}$           | d. $2000 \text{ Hz}$ | e. $100\,000 \text{ Hz}$ |
36. Déterminez l'inductance d'une bobine dont la réactance est de:
- |  |  |
|--|--|
| a. $20 \Omega$ à $f = 2 \text{ Hz}$      | b. $1000 \Omega$ à $f = 60 \text{ Hz}$ |
| c. $5280 \Omega$ à $f = 1000 \text{ Hz}$ |  |
37. Déterminez la fréquence à laquelle la réactance inductive d'une bobine de  $10 \text{ H}$  est de:
- |                           |                  |
|---------------------------|------------------|
| a. $50 \Omega$            | b. $3770 \Omega$ |
| c. $15,7 \text{ k}\Omega$ | d. $243 \Omega$  |
38. Le courant qui traverse une bobine d'une réactance inductive de  $20 \Omega$  est précisé ci-dessous. Quelle est l'expression sinusoidale de la tension? Tracez les courbes de  $v$  et de  $i$  sur un même graphique dont l'abscisse est graduée en radians.
- |                                       |  |
|---------------------------------------|--|
| a. $i = 5 \sin \omega t$              | b. $i = 0,4 \sin(\omega t + 60^\circ)$ |
| c. $i = -6 \sin(\omega t - 30^\circ)$ | d. $i = 3 \cos(\omega t + 10^\circ)$   |
39. Le courant qui traverse une bobine de  $0,1 \text{ H}$  est précisé ci-dessous. Quelle est l'expression sinusoidale de la tension?
- |   |                              |
|---|------------------------------|
| a. $30 \sin 30t$                            | b. $0,006 \sin 377t$         |
| c. $5 \times 10^{-6} \sin(400t + 20^\circ)$ | d. $-4 \cos(20t - 70^\circ)$ |







- \*50. Répondez au problème 49 dans le cas des paires tension/courant ci-dessous.
- |                                       |                                  |
|---------------------------------------|----------------------------------|
| a. $i = 5 \cos \omega t$              | b. $i = 2 \sin(157t + 60^\circ)$ |
| $v = 2000 \sin \omega t$              | $v = 80 \sin(157t + 150^\circ)$  |
| c. $v = 35 \sin(\omega t - 20^\circ)$ |                                  |
| $i = 7 \cos(\omega t - 110^\circ)$    |                                  |

### Section 13.12

51. Calculez en watts la perte moyenne de puissance pour chacune des paires tension/courant définies au problème 49.
52. Refaites le problème 51 dans le cas des paires tension/courant définies au problème 50.
- \*53. Calculez la perte moyenne de puissance et le facteur de puissance pour les circuits dont le courant et la tension d'entrée sont:
- |                                       |  |
|---------------------------------------|--|
| a. $v = 60 \sin(\omega t + 30^\circ)$ | b. $v = -50 \sin(\omega t - 20^\circ)$ |
| $i = 15 \sin(\omega t + 60^\circ)$    | $i = -2 \sin(\omega t + 40^\circ)$     |
| c. $v = 50 \sin(\omega t + 80^\circ)$ | d. $v = 75 \sin(\omega t - 5^\circ)$   |
| $i = 3 \cos(\omega t + 20^\circ)$     | $i = 0,08 \sin(\omega t - 35^\circ)$   |
54. Le courant qui traverse un élément et la tension à ses bornes sont  $i = 8 \sin(\omega t + 40^\circ)$  et  $v = 48 \sin(\omega t + 40^\circ)$ ; calculez la puissance au moyen des formules  $I^2 R$ ,  $(V_m I_m / 2) \cos \theta$  et  $VI \cos \theta$ , et comparez les résultats.
55. Un circuit dissipe une puissance moyenne de 100 W sous 150 V (puissance d'entrée efficace), l'intensité efficace du courant d'entrée étant de 2 A. Quel est le facteur de puissance? Quel est-il si la puissance moyenne dissipée est de 0 W et de 300 W?
- \*56. Le facteur de puissance inductif d'un circuit est de 0,5. La puissance fournie est de 500 W. Sachant que la tension d'entrée est  $50 \sin(\omega t + 10^\circ)$ , écrivez l'expression sinusoïdale du courant d'entrée.
57. À la figure 13.86,  $e = 30 \sin(377t + 20^\circ)$ .
- Quelle est l'expression sinusoïdale du courant?
  - Calculez la perte de puissance du circuit.
  - Combien de temps faut-il en secondes au courant pour décrire 6 cycles entiers?
58. À la figure 13.87,  $e = 100 \sin(157t + 30^\circ)$ .
- Écrivez l'expression sinusoïdale de  $i$ .
  - Calculez l'inductance  $L$ .
  - Calculez la perte moyenne de puissance dans la bobine.
59. À la figure 13.88,  $i = 3 \sin(377t - 20^\circ)$ .
- Écrivez l'expression sinusoïdale de  $e$ .
  - Calculez la capacité  $C$  en  $\mu\text{F}$ .
  - Calculez la perte moyenne de puissance dans le condensateur.

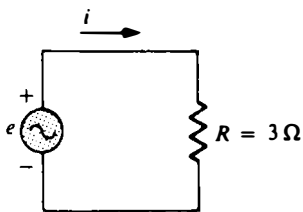


FIG. 13.86

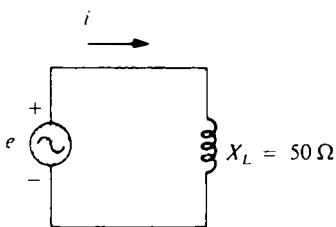


FIG. 13.87

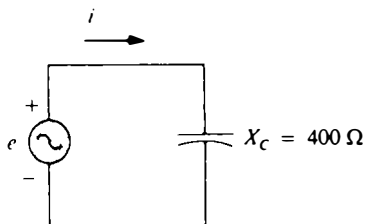


FIG. 13.88

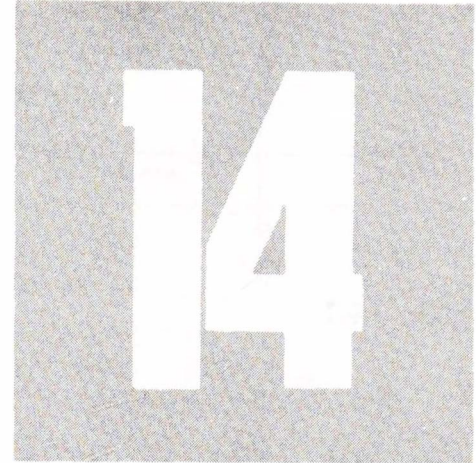


## GLOSSAIRE

- Amplitude** Valeur maximale que prend une onde.
- Cycle** Partie de l'onde contenue en une période.
- Dérivée** Taux de variation instantané d'une fonction par rapport au temps ou à une autre variable.
- Facteur de puissance ( $F_p$ )** Indication de la réactivité ou de la résistivité d'un réseau électrique. Plus il est grand, plus la charge est résistive.
- Facteur de puissance capacitif et inductif** Caractéristique indiquant si le réseau est capacitif (se comporte essentiellement comme un condensateur) ou inductif (se comporte essentiellement comme une bobine).
- Forme d'onde** Synonyme d'onde.
- Fréquence ( $f$ )** Nombre de cycles se produisant en une seconde.
- Onde** Représentation graphique d'une grandeur en fonction d'une quelconque variable (position, temps, angle, température, etc.).
- Onde alternative** Onde qui oscille autour d'un niveau de référence donné.
- Onde périodique** Onde qui se reproduit en un certain intervalle de temps.
- Onde sinusoïdale** Onde alternative de caractéristiques uniques oscillant avec une amplitude égale autour d'un axe donné.
- Période ( $T$ )** Intervalle de temps sur lequel une onde périodique se reproduit.
- Pulsation** Vitesse avec laquelle le vecteur rayon projetant une onde sinusoïdale tourne autour du centre de son cercle.
- Puissance moyenne** Puissance fournie à la charge et dissipée par cette charge sur un cycle entier.
- Puissance réelle** Synonyme de puissance moyenne.
- Radian** Unité de mesure des angles. Elle est égale à  $57,3^\circ$  environ.
- Réactance** Opposition offerte par la bobine et par le condensateur au passage des charges, qui résulte de l'échange continu d'énergie entre le circuit et le champ magnétique de la bobine et le champ électrique du condensateur.
- Relation de phase** Avance ou retard relatifs d'une onde sur une autre.
- Valeur de crête** Synonyme d'amplitude.
- Valeur efficace** Valeur équivalente en courant continu d'une onde alternative.
- Valeur instantanée** Valeur d'une onde à un instant donné.
- Valeur moyenne** Niveau tel que l'aire de l'onde au-dessus de celui-ci est égale à l'aire au-dessous.
- Vitesse angulaire** Synonyme de pulsation.



# VECTEURS DE PHASE

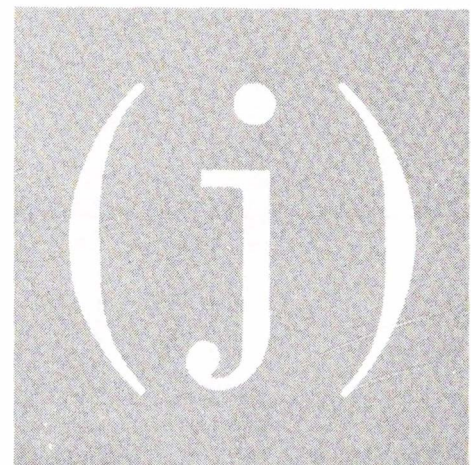


## 14.1 INTRODUCTION

Dans notre analyse des réseaux continus, il nous a fallu faire la somme algébrique de tensions et de courants. En courant alternatif, nous aurons aussi à le faire. Reste à savoir comment nous procéderons, sachant que ces grandeurs varient constamment en sinusoides. Une façon de s'y prendre est de faire la somme des valeurs instantanées, c'est-à-dire point par point (comme à la section 14.7). Mais cette méthode est laborieuse et fastidieuse, sans compter que sa précision dépend de l'échelle de la représentation employée.

C'est pourquoi nous introduisons les *nombres complexes* dans le présent chapitre. Associés à des ondes sinusoidales, ces nombres se prêtent à des opérations mathématiques qui permettent d'en combiner les caractéristiques de façon rapide, directe et exacte. Nous élaborerons dans les chapitres à venir les techniques d'utilisation des nombres complexes, pour être en mesure de faire l'analyse des réseaux sinusoidaux comme celle des réseaux continus. Les méthodes et les théorèmes utilisés en courant continu pourront alors être appliqués sans grande difficulté aux réseaux alternatifs sinusoidaux.

Tout *nombre complexe* est associé à un point d'un plan déterminé par deux axes distincts. Il représente aussi un vecteur, tracé entre l'origine et le point associé. L'axe horizontal déterminant le plan est appelé *axe réel*; l'axe vertical est appelé



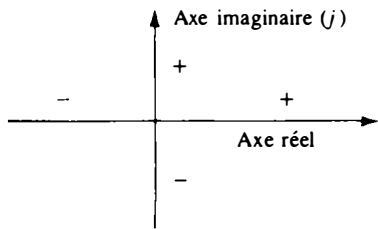


FIG. 14.1

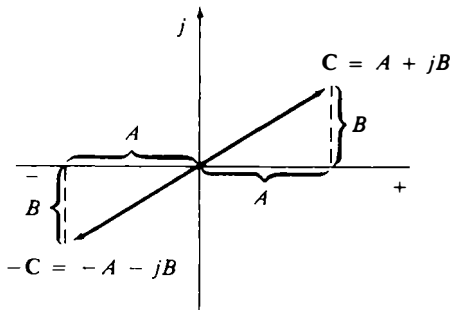


FIG. 14.2

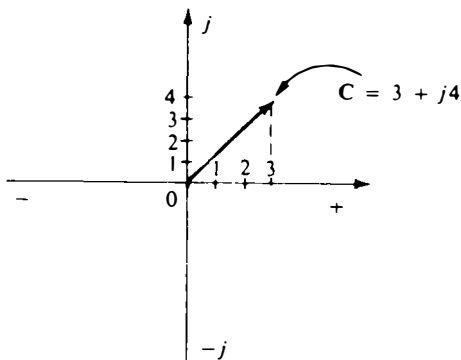


FIG. 14.3

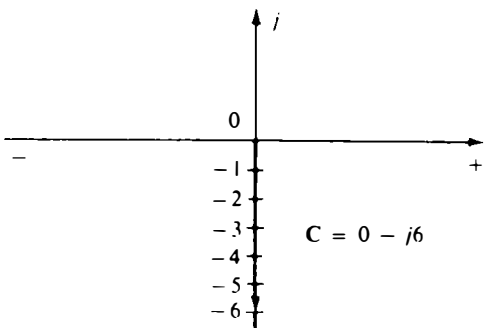


FIG. 14.4

axe imaginaire (voir la figure 14.1). Pour des raisons qui deviendront évidentes plus loin, l'axe réel est parfois appelé *axe des résistances*, et l'axe imaginaire *axe des réactances*. Tout nombre compris entre  $-\infty$  et  $+\infty$  peut être représenté par un point situé sur l'axe réel. Avant la naissance des nombres complexes, on croyait qu'il n'existait aucun nombre ne pouvant être représenté par un point de l'axe réel, d'où le qualificatif *imaginaire* pour désigner l'axe vertical.

Dans le plan complexe, l'axe réel représente tous les nombres positifs (à droite de l'origine) de même que tous les nombres négatifs (à la gauche de l'origine). Les nombres imaginaires positifs se situent dans le plan au-dessus de l'axe réel et les nombres imaginaires négatifs au-dessous de cet axe. Le symbole  $j$  (et parfois  $i$ ) est utilisé pour noter un nombre imaginaire.

Les nombres complexes peuvent s'écrire sous deux formes: sous forme *rectangulaire* et sous forme *polaire*. Peu importe la forme, le nombre complexe représente soit un point dans le plan complexe soit un vecteur tracé à partir de l'origine.

## 14.2 FORME RECTANGULAIRE

Sous forme rectangulaire, tout nombre complexe s'écrit:

$$C = \pm A \pm jB \tag{14.1}$$

La figure 14.2 montre les vecteurs associés à deux nombres complexes dont seuls les signes sont différents.

**EXEMPLE 14.1** Déterminer le vecteur ou le point du plan complexe associé à chacun des nombres complexes suivants:

- a.  $C = 3 + j4$
- b.  $C = 0 - j6$
- c.  $C = -10 - j20$

*Solution:*

- a. Voir la figure 14.3.
- b. Voir la figure 14.4.

(j)

c. Voir la figure 14.5.

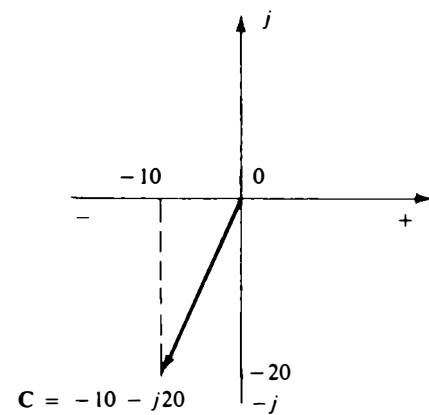


FIG. 14.5

### 14.3 FORME POLAIRE

Sous forme polaire, tout nombre complexe s'écrit:

$$C = C \angle \theta \quad (14.2)$$

où  $C$  représente le module du nombre (grandeur scalaire) et  $\theta$  son argument, soit un angle mesuré dans le sens positif à partir de l'axe réel positif comme l'illustre la figure 14.6.

La figure 14.7 montre les vecteurs associés à deux nombres complexes de mêmes modules et arguments mais de signes contraires:

$$-C = -C \angle \theta = C \angle \theta \pm \pi \quad (14.3)$$

**EXEMPLE 14.2** Déterminer le vecteur ou le point du plan complexe associé à chacun des nombres complexes suivants:

- a.  $C = 5 \angle 30^\circ$
- b.  $C = 7 \angle 120^\circ$
- c.  $C = -4,2 \angle 60^\circ$

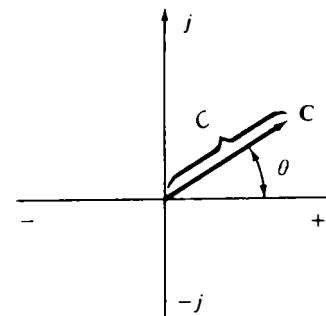


FIG. 14.6

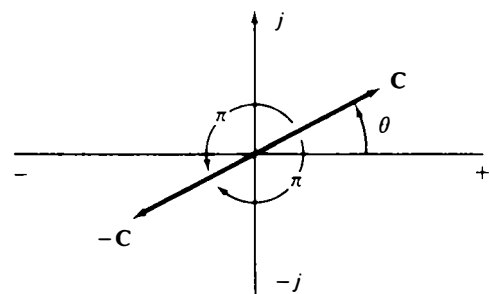


FIG. 14.7

*Solution:*

a. Voir la figure 14.8.

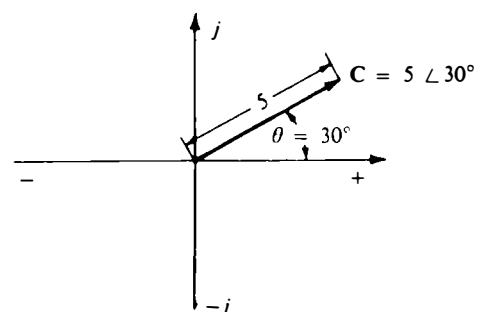


FIG. 14.8

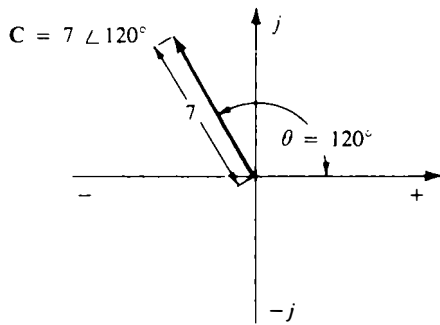


FIG. 14.9

b. Voir la figure 14.9.

$$C = -4,2 \angle 60^\circ = 4,2 \angle 60^\circ \pm 180^\circ = 4,2 \angle +240^\circ$$

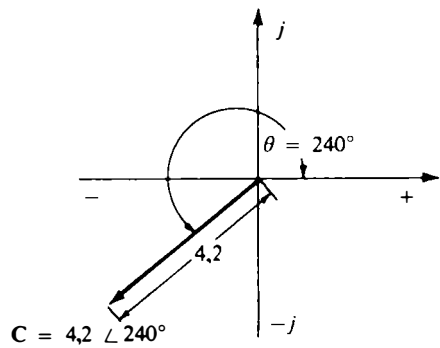


FIG. 14.10

c. Voir la figure 14.10.

### 14.4 PASSAGE D'UNE FORME À L'AUTRE

Les relations permettant de passer d'une forme à l'autre sont:

Forme rectangulaire → forme polaire

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \tag{14.4a}$$

$$\theta = \text{tg}^{-1} \frac{B}{A} \tag{14.4b}$$

Forme polaire → forme rectangulaire

$$A = C \cos \theta \tag{14.5a}$$

$$B = C \sin \theta \tag{14.5b}$$

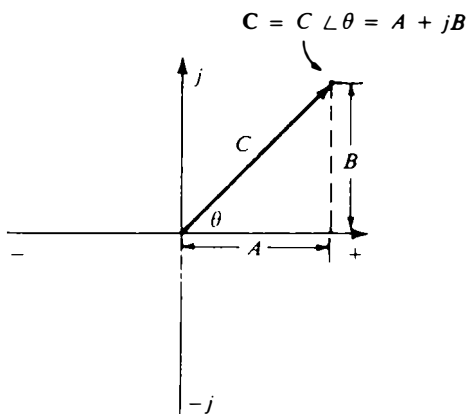


FIG. 14.11

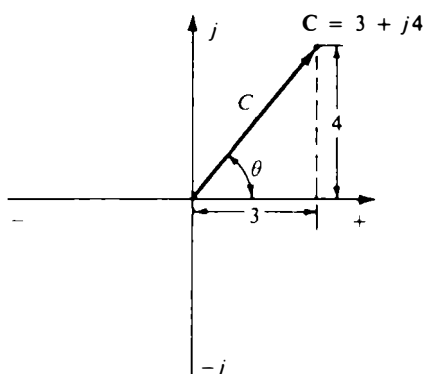


FIG. 14.12

**EXEMPLE 14.3** Écrire le nombre ci-dessous sous forme polaire.

$$C = 3 + j4 \quad (\text{Fig. 14.12})$$

Solution:

$$C = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\theta = \text{tg}^{-1} \left( \frac{4}{3} \right) = 53,13^\circ$$

$$C = 5 \angle 53,13^\circ$$

**EXEMPLE 14.4** Écrire le nombre ci-dessous sous forme rectangulaire.

$$C = 10 \angle 45^\circ \quad (\text{Fig. 14.13})$$

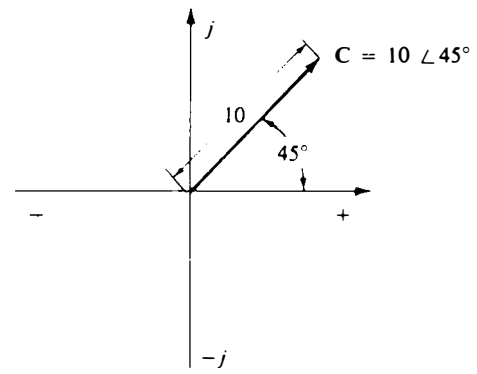
*Solution:*

$$A = 10 \cos 45^\circ = (10)(0,707) = 7,07$$

$$B = 10 \sin 45^\circ = (10)(0,707) = 7,07$$

$$C = 7,07 + j7,07$$

Si le point ou le vecteur associé au nombre complexe à écrire sous forme polaire se situe dans le deuxième, troisième ou quatrième quadrant, on prendra soin en faisant la transformation de bien en déterminer l'argument.



**FIG. 14.13**

**EXEMPLE 14.5** Écrire le nombre ci-dessous sous forme polaire.

$$C = -6 + j3 \quad (\text{Fig. 14.14})$$

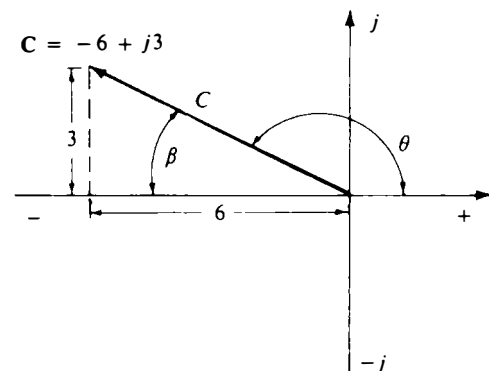
*Solution:*

$$C = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 6,71$$

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{6}\right) = 26,57^\circ$$

$$\theta = 180 - 26,57^\circ = 153,43^\circ$$

$$C = 6,71 \angle 153,43^\circ$$



**FIG. 14.14**

**EXEMPLE 14.6** Écrire le nombre ci-dessous sous forme rectangulaire.

$$C = 10 \angle 230^\circ \quad (\text{Fig. 14.15})$$

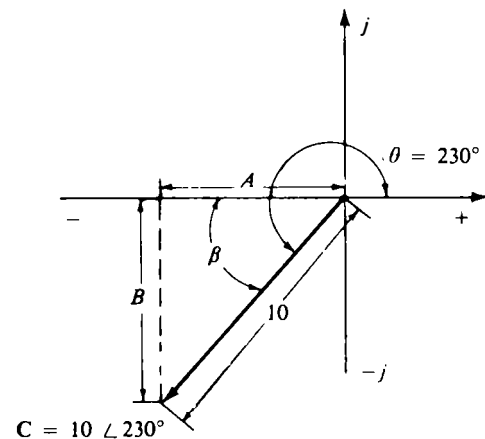
*Solution:*

$$A = -C \cos \beta = -10 \cos(230^\circ - 180^\circ) = -10 \cos 50^\circ \\ = -(10)(0,6428) = -6,428$$

$$B = -C \sin \beta = -10 \sin 50^\circ = -(10)(0,7660) = -7,660$$

$$C = -6,428 - j7,660$$

Lorsqu'on passe de la forme rectangulaire à la forme polaire, on peut généralement supposer que le module du vecteur  $C$  est égal à la plus grande des parties (réelle ou imaginaire) du nombre sous forme rectangulaire, si le rapport de la partie réelle à la partie imaginaire est plus grand que 10 ou plus petit que 0,1. L'argument  $\theta$  du vecteur se trouve de la façon usuelle.



**FIG. 14.15**



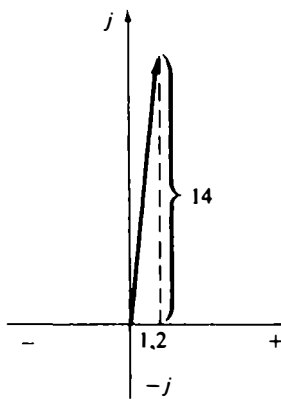


FIG. 14.16

**EXEMPLE 14.7** Écrire le nombre  $1,2 + j14$  sous forme polaire (voir la figure 14.16).

*Solution:* Le rapport est:

$$\frac{14}{1,2} = 11,7 > 10$$

$$\therefore C = 14 \quad (\text{la partie la plus grande})$$

avec:

$$\theta = \text{tg}^{-1} \left( \frac{14}{1,2} \right) = \text{tg}^{-1}(11,7) = 85,10^\circ$$

et:

$$1,2 + j14 = \mathbf{14 \angle 85,10^\circ}$$

puisque:

$$C = \sqrt{1,2^2 + 14^2} = \sqrt{1,44 + 196} \cong \sqrt{196} = 14$$

Lorsqu'on passe de la forme polaire à la forme rectangulaire, on peut généralement supposer que la partie réelle du nombre sous forme rectangulaire est égale au module du vecteur  $C$  si l'argument de ce dernier est plus petit que  $5,7^\circ$  ou que la partie imaginaire est égale au module du vecteur si le complément de l'argument de ce dernier est plus petit que  $5,7^\circ$ . L'autre partie du nombre se trouve de la façon usuelle.

**EXEMPLE 14.8** Écrire  $2 \angle 88^\circ$  sous forme rectangulaire (voir la figure 14.17).

*Solution:*

$$\beta < 5,7^\circ$$

$$\therefore B \cong C = 2$$

$$A = C \cos 88^\circ = (2)(0,0349) = 0,0698$$

et:

$$2 \angle 88^\circ = \mathbf{0,0698 + j2}$$

puisque:

$$B = 2 \sin 88^\circ = (2)(0,9994) \cong 2$$

Nous expliquons à l'annexe D comment on peut se servir d'une calculatrice pour passer d'une forme à l'autre. La calculatrice permettant de gagner énormément de temps, nous conseillons de lire attentivement cette annexe.

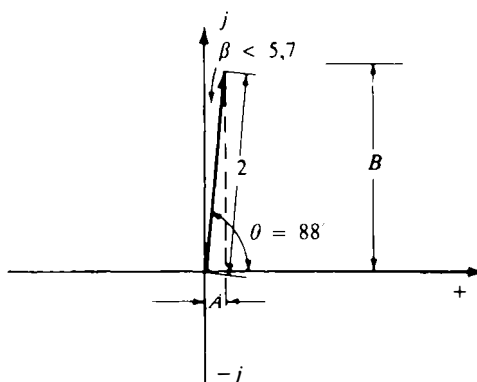


FIG. 14.17

## 14.5 OPÉRATIONS MATHÉMATIQUES SUR LES NOMBRES COMPLEXES

Les nombres complexes se prêtent facilement aux quatre opérations élémentaires: l'addition, la soustraction, la multiplication

(j)

et la division. Voyons d'abord quelques règles et définitions fondamentales avant d'examiner comment se font ces opérations.

Commençons par l'opérateur  $j$ . Par définition:

$$j = \sqrt{-1} \tag{14.6}$$

Par suite:

$$j^2 = -1 \tag{14.7}$$

et:

$$j^3 = j^2j = -1j = -j$$

$$j^4 = j^2j^2 = (-1)(-1) = +1$$
$$j^5 = j$$

L'inverse d'un nombre complexe est égal au quotient de 1 par le nombre. Ainsi l'inverse de:

$$C = A + jB$$

est:

$$\frac{1}{A + jB}$$

et l'inverse de  $C \angle \theta$  est:

$$\frac{1}{C \angle \theta}$$

On a en outre:

$$\frac{1}{j} = (1) \left( \frac{1}{j} \right) = \left( \frac{j}{j} \right) \left( \frac{1}{j} \right) = \frac{j}{j^2} = \frac{j}{-1}$$

et par suite:

$$\frac{1}{j} = -j \tag{14.8}$$

Le *conjugué* d'un nombre complexe a sous forme rectangulaire la même partie réelle mais sa partie imaginaire est de signe contraire. Sous forme polaire, le module du conjugué est le même mais son argument est affecté du signe contraire. Ainsi le conjugué de:

$$C = 2 + j3$$

est:

$$2 - j3$$

comme l'illustre la figure 14.18. Le conjugué de:

$$C = 2 \angle 30^\circ$$

est:

$$2 \angle -30^\circ$$

comme l'illustre la figure 14.19.

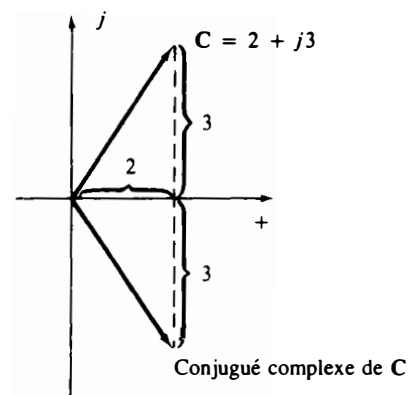


FIG. 14.18

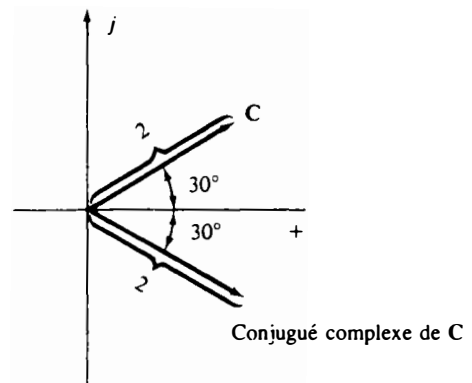


FIG. 14.19

Passons maintenant aux quatre opérations élémentaires.

### Addition

La somme de deux nombres complexes est égale à la somme des parties réelles plus la somme des parties imaginaires. Ainsi la somme de:

$$C_1 = \pm A_1 \pm jB_1 \quad \text{et} \quad C_2 = \pm A_2 \pm jB_2$$

est:

$$C_1 + C_2 = (\pm A_1 \pm A_2) + j(\pm B_1 \pm B_2) \quad (14.9)$$

Aucun besoin de mémoriser cette équation. La technique est simple: il suffit de superposer les deux nombres et de faire la somme des parties distinctes comme s'il s'agissait de termes d'ordres différents de deux polynômes (voir la deuxième partie de l'exemple 14.9).

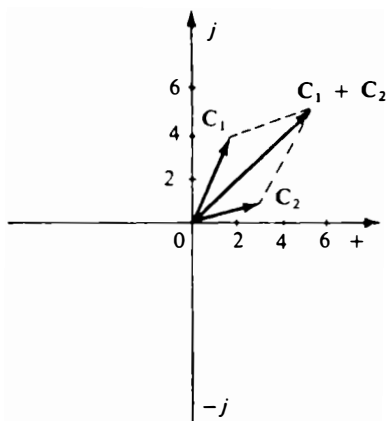


FIG. 14.20

**EXEMPLE 14.9** Faire la somme de:

- $C_1 = 2 + j4$  et de  $C_2 = 3 + j1$ .
- $C_1 = 3 + j6$  et de  $C_2 = -6 + j3$ .

*Solution:*

- L'équation (14.9) donne:

$$C_1 + C_2 = (2 + 3) + j(4 + 1) = 5 + j5$$

Voir la figure 14.20. On peut aussi procéder de la façon suivante:

$$\begin{array}{r} 2 + j4 \\ 3 + j1 \\ \hline \downarrow \quad \downarrow \\ 5 + j5 \end{array}$$

- L'équation (14.9) donne:

$$C_1 + C_2 = (3 - 6) + j(6 + 3) = -3 + j9$$

Voir la figure 14.21. On peut aussi procéder de la façon suivante:

$$\begin{array}{r} 3 + j6 \\ -6 + j3 \\ \hline \downarrow \quad \downarrow \\ -3 + j9 \end{array}$$

### Soustraction

La différence de deux nombres complexes est égale à la différence des parties réelles plus la différence des parties imaginaires. Ainsi la différence de:

$$C_1 = \pm A_1 \pm jB_1 \quad \text{et} \quad C_2 = \pm A_2 \pm jB_2$$

est:

$$C_1 - C_2 = [\pm A_1 - (\pm A_2)] + j[\pm B_1 - (\pm B_2)] \quad (14.10)$$

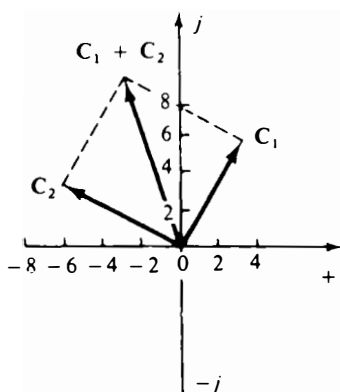


FIG. 14.21

(14.10)

Nul besoin de mémoriser cette équation si l'on fait la différence en colonnes comme à l'exemple 14.10.

**EXEMPLE 14.10** Soustraire:

- a.  $C_2 = 1 + j4$  de  $C_1 = 4 + j6$ .  
 b.  $C_2 = -2 + j5$  de  $C_1 = +3 + j3$ .

*Solution:*

- a. L'équation (14.10) donne:

$$C_1 - C_2 = (4 - 1) + j(6 - 4) = 3 + j2$$

Voir la figure 14.22. On peut aussi procéder de la façon suivante:

$$\begin{array}{r} 4 + j6 \\ -(1 + j4) \\ \hline \downarrow \quad \downarrow \\ 3 + j2 \end{array}$$

- b. L'équation (14.10) donne:

$$C_1 - C_2 = [3 - (-2)] + j(3 - 5) = 5 - j2$$

Voir la figure 14.23. On peut aussi procéder de la façon suivante:

$$\begin{array}{r} 3 + j3 \\ -(-2 + j5) \\ \hline \downarrow \quad \downarrow \\ 5 - j2 \end{array}$$

Deux nombres complexes écrits sous forme polaire ne peuvent être additionnés et soustraits que si leurs arguments sont les mêmes ou qu'ils diffèrent par des multiples de  $180^\circ$ .

**EXEMPLE 14.11**

$$2 \angle 45^\circ + 3 \angle 45^\circ = 5 \angle 45^\circ$$

Voir la figure 14.24.

$$2 \angle 0^\circ - 4 \angle 180^\circ = 6 \angle 0^\circ$$

Voir la figure 14.25.

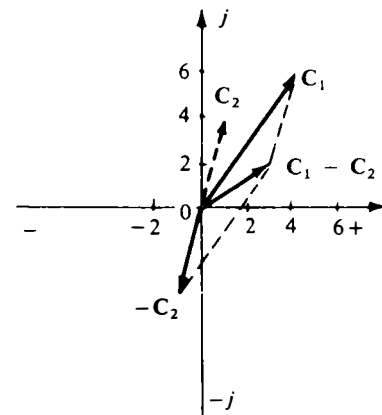


FIG. 14.22

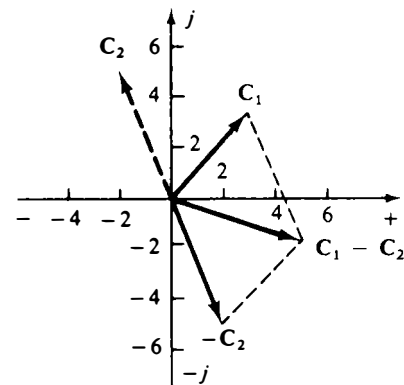


FIG. 14.23

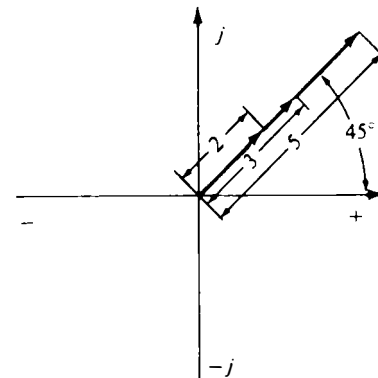


FIG. 14.24

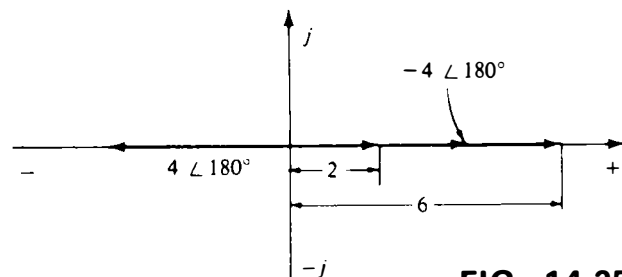


FIG. 14.25

### Multiplication

Dans la forme rectangulaire, le produit de deux nombres complexes se fait comme le produit de deux binômes. Ainsi le produit de:

$$C_1 = A_1 + jB_1 \text{ et de } C_2 = A_2 + jB_2$$

est:

$$C_1 \cdot C_2 = \begin{array}{r} A_1 + jB_1 \\ \times \quad A_2 + jB_2 \\ \hline A_1A_2 + jB_1A_2 \\ \quad + jA_1B_2 + j^2B_1B_2 \\ \hline A_1A_2 + j(B_1A_2 + A_1B_2) + B_1B_2(-1) \end{array}$$

Par suite:

$$C_1 \cdot C_2 = (A_1A_2 - B_1B_2) + j(B_1A_2 + A_1B_2)$$

(14.11)

Nous élaborons à l'exemple 14.12b une solution qui nous dispense de mémoriser l'équation (14.11). Cette solution consiste à faire au long le produit des deux nombres complexes, comme s'il s'agissait de deux binômes.

#### EXEMPLE 14.12

a. Calculer le produit  $C_1 \cdot C_2$ :

$$C_1 = 2 + j3 \quad \text{et} \quad C_2 = 5 + j10$$

b. Calculer le produit  $C_1 \cdot C_2$ :

$$C_1 = -2 - j3 \quad \text{et} \quad C_2 = +4 - j6$$

*Solution:*

a. L'équation (14.11) donne:

$$\begin{aligned} C_1 \cdot C_2 &= [(2)(5) - (3)(10)] + j[(3)(5) + (2)(10)] \\ &= -20 + j35 \end{aligned}$$

b. Le produit des deux nombres écrit au long est:

$$\begin{array}{r} -2 - j3 \\ +4 - j6 \\ \hline -8 - j12 \\ \quad + j12 + j^218 \\ \hline -8 - 18 + j(-12 + 12) \end{array}$$

$$C_1 \cdot C_2 = -26 = 26 \angle 180^\circ$$

Dans la forme polaire, le produit de deux nombres complexes s'obtient par le produit des modules et par la somme des arguments. Ainsi le produit de:

$$C_1 = C_1 \angle \theta_1 \text{ et de } C_2 = C_2 \angle \theta_2$$

est:

$$C_1 \cdot C_2 = C_1 C_2 \angle \theta_1 + \theta_2 \quad (14.12)$$

### EXEMPLE 14.13

a. Calculer le produit  $C_1 \cdot C_2$ :

$$C_1 = 5 \angle 20^\circ \text{ et } C_2 = 10 \angle 30^\circ$$

b. Calculer le produit  $C_1 \cdot C_2$ :

$$C_1 = 2 \angle -40^\circ \text{ et } C_2 = 7 \angle +120^\circ$$

*Solution:*

$$a. C_1 \cdot C_2 = (5)(10) \angle 20^\circ + 30^\circ = 50 \angle 50^\circ$$

$$b. C_1 \cdot C_2 = (2)(7) \angle -40^\circ + 120^\circ = 14 \angle +80^\circ$$

Dans la forme rectangulaire, le produit d'un nombre complexe et d'un nombre réel s'obtient par la multiplication de chacune des parties du nombre complexe par le nombre réel.

Ainsi:

$$(10)(2 + j3) = 20 + j30$$

et:

$$50 \angle 0^\circ (0 + j6) = j300 = 300 \angle 90^\circ$$

### Division

Dans la forme rectangulaire, le quotient de deux nombres complexes s'obtient par la multiplication du numérateur et du dénominateur par le conjugué du dénominateur. Ainsi le quotient de:  $C_1 = A_1 + jB_1$  et de  $C_2 = A_2 + jB_2$ ,

$$\begin{aligned} \text{est: } \frac{C_1}{C_2} &= \frac{(A_1 + jB_1)(A_2 - jB_2)}{(A_2 + jB_2)(A_2 - jB_2)} \\ &= \frac{(A_1A_2 + B_1B_2) + j(A_2B_1 - A_1B_2)}{A_2^2 + B_2^2} \end{aligned}$$

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{A_2^2 + B_2^2} + j \frac{A_2B_1 - A_1B_2}{A_2^2 + B_2^2} \quad (14.13)$$

Il n'est pas vraiment nécessaire de mémoriser cette équation, les étapes permettant de l'établir étant simples: multiplier le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur et regrouper les termes réels et imaginaires, puis diviser chaque terme du numérateur résultant par le nombre réel apparaissant au dénominateur.

**EXEMPLE 14.14**a. Calculer le quotient  $C_1/C_2$ :

$$C_1 = 1 + j4 \quad \text{et} \quad C_2 = 4 + j5$$

b. Calculer le quotient  $C_1/C_2$ :

$$C_1 = -4 - j8 \quad \text{et} \quad C_2 = +6 - j1$$

*Solution:*

a. L'équation (14.13) donne:

$$\begin{aligned} \frac{C_1}{C_2} &= \frac{(1)(4) + (4)(5)}{4^2 + 5^2} + j \frac{(4)(4) - (1)(5)}{4^2 + 5^2} \\ &= \frac{24}{41} + \frac{j11}{41} \cong \mathbf{0,585 + j0,268} \end{aligned}$$

b. En n'utilisant pas l'équation (14.13), on écrit au long:

$$\begin{array}{r} -4 - j8 \\ +6 + j1 \\ \hline -24 - j48 \\ -j4 - j^28 \\ \hline -24 - j52 + 8 = -16 - j52 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +6 - j1 \\ +6 + j1 \\ \hline 36 + j6 \\ -j6 - j^21 \\ \hline 36 + 0 + 1 = 37 \end{array}$$

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{-16}{37} - \frac{j52}{37} = \mathbf{-0,432 - j1,405}$$

Enfin, le quotient d'un nombre complexe par un nombre réel dans la forme rectangulaire s'obtient par la division de chacune des parties du nombre complexe par le nombre réel. Ainsi:

$$\frac{8 + j10}{2} = 4 + j5$$

et:

$$\frac{6.8 - j0}{2} = 3,4 - j0 = 3,4 \angle 0^\circ$$

Dans la forme polaire, le quotient de deux nombres complexes s'obtient simplement par le quotient des modules et la différence des arguments. Ainsi le quotient de:

$$C_1 = C_1 \angle \theta_1 \quad \text{et de} \quad C_2 = C_2 \angle \theta_2$$

est:

$$\boxed{\frac{C_1}{C_2} = \frac{C_1}{C_2} \angle \theta_1 - \theta_2} \quad \mathbf{(14.14)}$$

**EXEMPLE 14.15**a. Calculer le quotient  $C_1/C_2$ :

$$C_1 = 15 \angle 10^\circ \quad \text{et} \quad C_2 = 2 \angle 7^\circ$$

b. Calculer le quotient  $C_1/C_2$ :

$$C_1 = 8 \angle 120^\circ \quad \text{et} \quad C_2 = 16 \angle -50^\circ$$

*Solution:*

$$\text{a. } \frac{C_1}{C_2} = \frac{15}{2} \angle 10^\circ - 7^\circ = 7.5 \angle 3^\circ$$

$$\text{b. } \frac{C_1}{C_2} = \frac{8}{16} \angle 120^\circ - (-50^\circ) = 0.5 \angle 170^\circ$$

La division nous permet de définir l'*inverse* d'un nombre complexe. Dans la forme rectangulaire, on a:

$$\frac{1}{A + jB} = \left( \frac{1}{A + jB} \right) \left( \frac{A - jB}{A - jB} \right) = \frac{A - jB}{A^2 + B^2}$$

$$\boxed{\frac{1}{A + jB} = \frac{A}{A^2 + B^2} - j \frac{B}{A^2 + B^2}} \quad (14.15)$$

Dans la forme polaire, l'inverse de  $C \angle \theta$  est:

$$\boxed{\frac{1}{C \angle \theta} = \frac{1}{C} \angle -\theta} \quad (14.16)$$

On trouvera dans l'exemple ci-dessous des exercices combinant les quatre opérations élémentaires.

**EXEMPLE 14.16** Simplifier les expressions ci-dessous, dans la forme sous laquelle elles sont écrites.

$$\begin{aligned} \text{a. } & \frac{(2 + j3) + (4 + j6)}{(7 + j7) - (3 - j3)} \\ &= \frac{(2 + 4) + j(3 + 6)}{(7 - 3) + j(7 + 3)} \\ &= \frac{(6 + j9)(4 - j10)}{(4 + j10)(4 - j10)} \\ &= \frac{[(6)(4) + (9)(10)] + j[(4)(9) - (6)(10)]}{4^2 + 10^2} \\ &= \frac{114 - j24}{116} = 0.982 - j0.207 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{b. } \frac{(50 \angle 30^\circ)(5 + j5)}{10 \angle -20^\circ} &= \frac{(50 \angle 30^\circ)(7.07 \angle 45^\circ)}{10 \angle -20^\circ} = \frac{353 \angle 75^\circ}{10 \angle -20^\circ} \\ &= 35,3 \angle 75^\circ - (-20^\circ) = 35,3 \angle 95^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } \frac{(2 \angle 20^\circ)^2(3 + j4)}{8 - j6} &= \frac{(2 \angle 20^\circ)(2 \angle 20^\circ)(5 \angle 53^\circ)}{10 \angle -37^\circ} \\ &= \frac{(4 \angle 40^\circ)(5 \angle 53^\circ)}{10 \angle -37^\circ} = \frac{20 \angle 93^\circ}{10 \angle -37^\circ} \\ &= 2 \angle 93^\circ - (-37^\circ) = 2,0 \angle 130^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d. } 3 \angle 27^\circ - 6 \angle -40^\circ &= (2,673 + j1,362) - (4,596 - j3,857) \\ &= (2,673 - 4,596) + j(1,362 + 3,857) \\ &= -1,923 + j5,219 \end{aligned}$$

## 14.6 TECHNIQUES DE CONVERSION

Pendant de nombreuses années, le scientifique et le technicien devaient utiliser des tables, des abaques et la règle à calcul pour arriver à faire la conversion de nombres complexes. De nos jours, de petites calculatrices comme celle illustrée à la figure 14.26 peuvent faire ces conversions jusqu'au huitième chiffre significatif. De fait, la calculatrice illustrée est ainsi programmée que l'on n'a que quelques touches à enfoncer pour faire la conversion de nombres complexes. Les touches  $\boxed{\rightarrow R}$  et  $\boxed{\rightarrow P}$  représentent respectivement les fonctions « forme rectangulaire » et « forme polaire ».

On appréciera sans aucun doute la rapidité et la précision d'une telle machine après avoir employé d'autres techniques de conversion. Il existe des calculatrices peu coûteuses dotées de toutes les fonctions nécessaires à la conversion des nombres complexes; un tel achat n'est certes pas un mauvais investissement pour quiconque a l'intention de se spécialiser en électronique.



Courtoisie de Hewlett Packard Co.

FIG. 14.26 Calculatrice scientifique.

## 14.7 VECTEURS DE PHASE

Ainsi que nous l'avons souligné dans l'introduction du chapitre, nous aurons souvent à faire la somme ou la différence de tensions et de courants sinusoïdaux dans l'analyse des circuits alternatifs. Une des techniques qu'on peut adopter est de tracer les formes d'onde à additionner sur un même diagramme et de faire la somme algébrique des valeurs de chacune pour chacun

des points de l'abscisse, comme l'illustre la figure 14.27 ( $c = a + b$ ). Cette technique, longue et fastidieuse, est d'une précision limitée. La figure 13.18 illustre une technique plus rapide faisant appel à des vecteurs en rotation. Chacun des *vecteurs tournants*, de *module* (longueur) fixe et *prenant naissance à l'origine*, est appelé *vecteur de phase*, s'il représente une grandeur électrique. Les trois vecteurs à la figure 14.28a représentent les valeurs que prennent les formes d'onde à la figure 14.28b à l'instant  $t = 0$ .

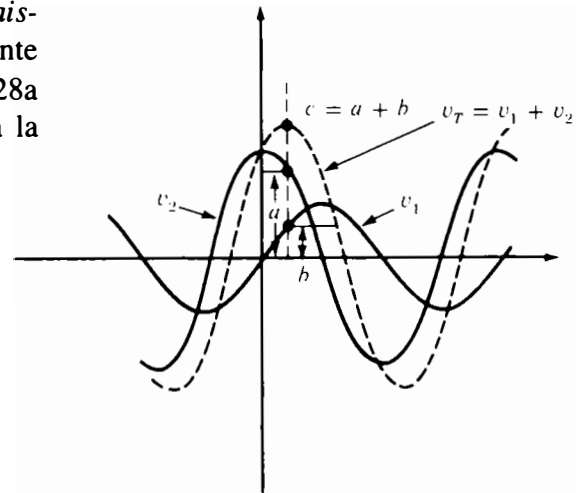


FIG. 14.27

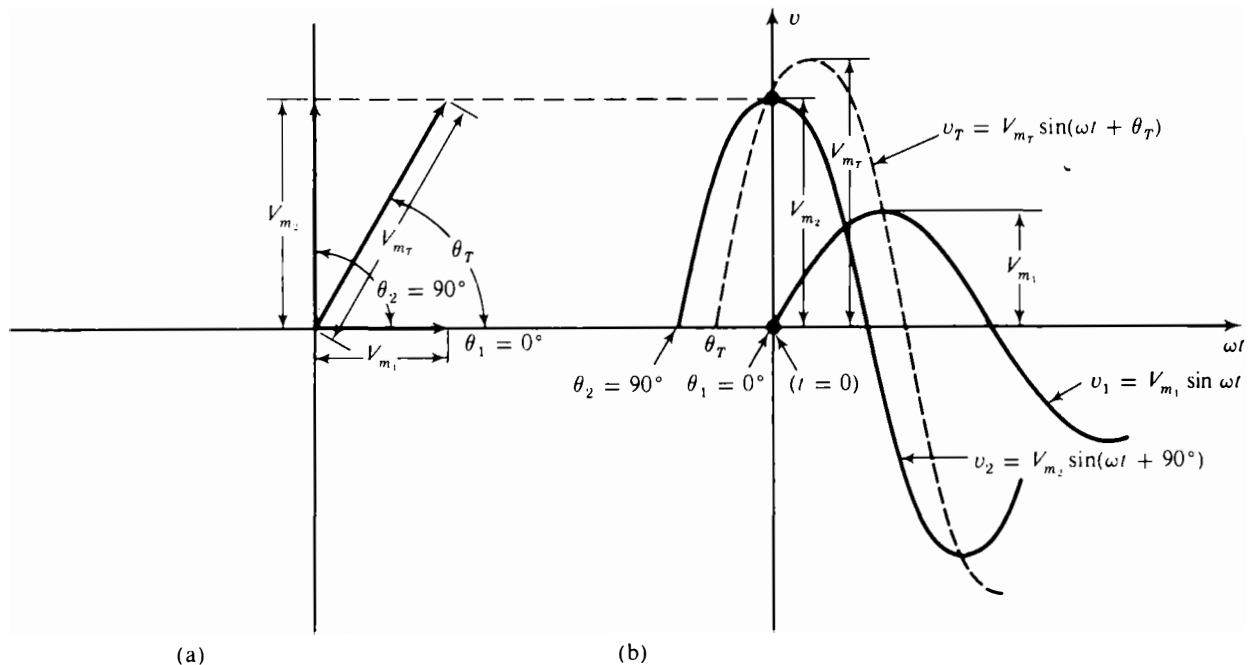


FIG. 14.28

À la figure 14.28b,  $v_1$  traverse l'axe horizontal à l'instant  $t = 0$ ; le vecteur rayon (figure 14.28a) repose alors sur cet axe. Son module est évidemment égal à la valeur de crête de la sinusoïde (figure 13.18). La deuxième sinusoïde (en réalité une cosinusoïde) représentée a déjà « tournée » de  $90^\circ$  à l'instant  $t = 0$  et sa projection verticale est en conséquence maximale, comme l'illustre la figure 14.28a. Rappelons qu'un écart de  $90^\circ$  sépare en effet le minimum et le maximum de toute fonction sinusoïdale. À l'instant  $t = 0$ ,  $v_T = v_2$ , puisque  $v_1 = 0$  à cet instant.

On peut facilement démontrer, en faisant appel aux opérations définies à la section 14.5 (voir la figure 14.28b), que:

$$V_{m_1} \angle 0^\circ + V_{m_2} \angle 90^\circ = V_{m_T} \angle \theta_T$$

En d'autres termes, on détermine  $v_T$  avec très peu de difficulté en faisant la somme de  $v_1$  et de  $v_2$  dans la forme de vecteurs de phase la relation permettant la conversion étant:

$$v = V_m \sin(\omega t \pm \theta) \Rightarrow V_m \angle \pm \theta$$

Il s'agit ensuite de réécrire l'onde  $v_T$  sous forme analytique (en fonction du temps) et de la tracer sur le diagramme, comme cela est fait à la figure 14.28b. La figure 14.28a, qui illustre les modules et les positions angulaires des trois vecteurs, est appelée *diagramme de phase*. Elle est littéralement une « photo » prise sur le vif des vecteurs tournants représentatifs des formes d'onde, à l'instant  $t = 0$ .

Pour faire la somme de deux sinusoides, nous les exprimons donc désormais sous la forme de vecteurs de phase et aurons recours à l'algèbre des nombres complexes. Au besoin, nous réexprimerons le résultat sous forme analytique.

À titre d'exemple, faisons la somme de (voir les figures 14.27 et 14.28):

$$\begin{aligned} v_1 &= 5 \sin \omega t \\ v_2 &= 10 \sin(\omega t + 90^\circ) \end{aligned}$$

Sous la forme de vecteurs de phase, nous avons:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 &= 5 \angle 0^\circ \\ \mathbf{V}_2 &= 10 \angle 90^\circ \\ \mathbf{V}_T &= \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 = 5 + j10 = 11,180 \angle 63,43^\circ = V_{m_T} \angle \theta_T \end{aligned}$$

de sorte que:

$$\begin{aligned} V_{m_T} &= 11,180 \text{ V} \\ \theta_T &= 63,43^\circ \\ v_T &= 11,180 \sin(\omega t + 63,43^\circ) \end{aligned}$$

La figure 14.29 représente le cas de deux sinusoides dont les déphasages sont différents de  $0^\circ$  et de  $90^\circ$ . Remarquez, à la figure 14.29b, que là aussi les valeurs des fonctions sont déterminées par les positions angulaires des vecteurs rayons illustrés à la figure 14.29a.

Puisque dans l'analyse des circuits alternatifs, on utilise presque exclusivement les *valeurs efficaces* plutôt que les valeurs de crête, le vecteur de phase a en général comme module la valeur efficace de la grandeur qu'il représente. Quant à l'angle associé au vecteur, il représente le déphasage. Le diagramme de phase illustré à la figure 14.29a devient donc, après normalisation, le diagramme représenté à la figure 14.30.

Dans toutes les analyses à venir, l'expression en vecteur de phase d'une tension sinusoidale ou d'un courant sinusoidal sera, en règle générale:

$$\mathbf{V} = V \angle \theta \quad \text{et} \quad \mathbf{I} = I \angle \theta$$

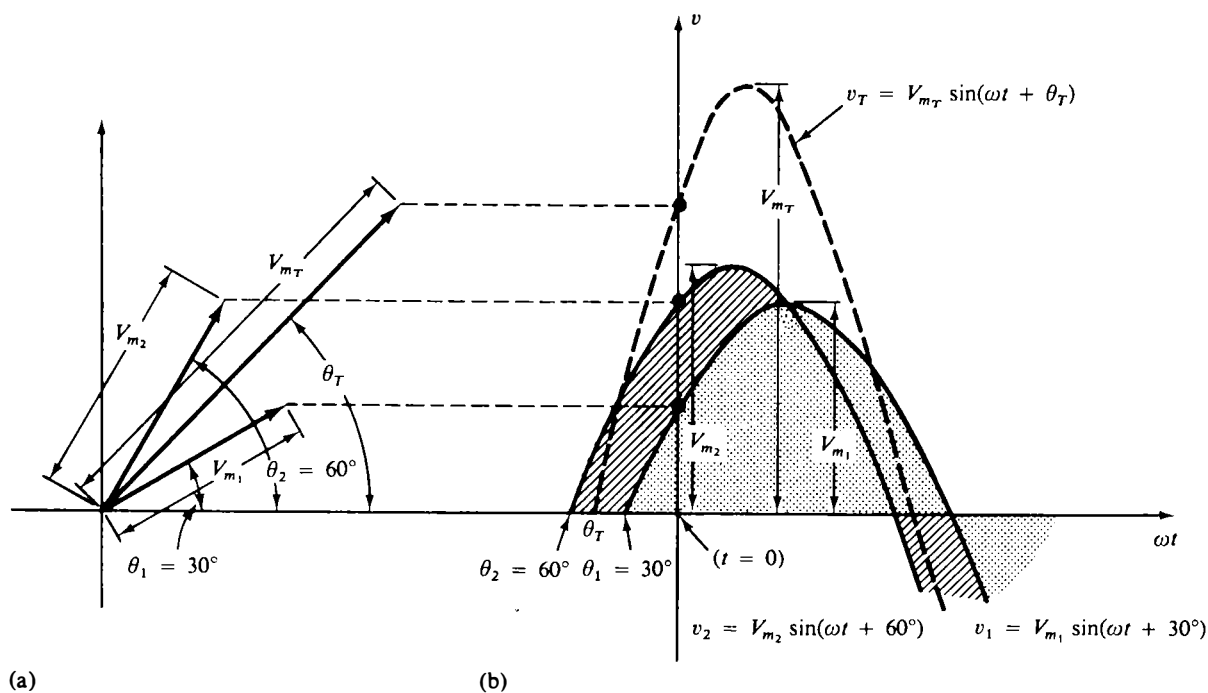


FIG. 14.29

où  $V$  et  $I$  sont les valeurs efficaces et  $\theta$ , le déphasage. Soulignons que tout vecteur écrit sous cette forme représente une grandeur sinusoïdale, et que la fréquence de cette sinusoïde de référence n'y apparaît pas. Les opérations sur les vecteurs de phase ne peuvent être effectuées que si les grandeurs sinusoïdales représentées ont la même pulsation (ou la même fréquence), à moins d'utiliser une notation très complexe.

**EXEMPLE 14.17** Écrire les expressions ci-dessous sous forme de vecteurs de phase.

Forme analytique	Vecteurs de phase
a. $\sqrt{2}(50) \sin \omega t$	$50 \angle 0^\circ$
b. $69,6 \sin(\omega t + 72^\circ)$	$(0.707)(69.6) \angle 72^\circ = 49,21 \angle 72^\circ$
c. $45 \cos \omega t$	$(0.707)(45) \angle 90^\circ = 31,82 \angle 90^\circ$

**EXEMPLE 14.18** Écrire les expressions ci-dessous sous forme analytique (la fréquence est de 60 Hz).

Vecteurs de phase	Forme analytique
a. $I = 10 \angle 30^\circ$	$i = \sqrt{2}(10) \sin(2\pi 60t + 30^\circ)$ et $i = 14,14 \sin(377t + 30^\circ)$
b. $V = 115 \angle -70^\circ$	$v = \sqrt{2}(115) \sin(377t - 70^\circ)$ et $v = 162,6 \sin(377t - 70^\circ)$

**EXEMPLE 14.19** Calculer la tension d'entrée du circuit illustré à la figure 14.31, si:

$$\left. \begin{aligned} v_a &= 50 \sin(377t + 30^\circ) \\ v_b &= 30 \sin(377t + 60^\circ) \end{aligned} \right\} f = 60 \text{ Hz}$$

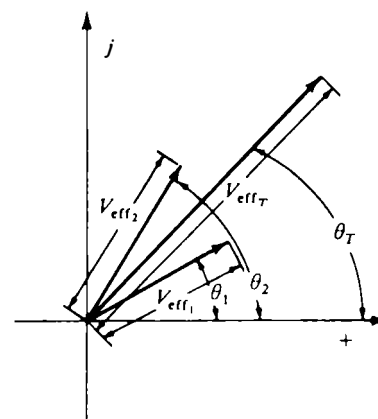


FIG. 14.30

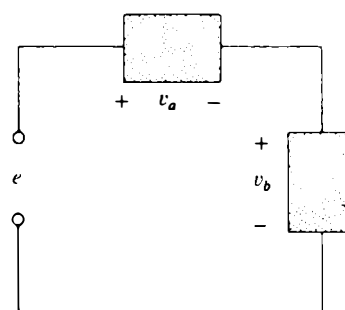


FIG. 14.31

*Solution:* La loi des tensions donne:

$$e = v_a + v_b$$

Écrivez sous forme de vecteurs de phase, les tensions sont:

$$v_a = 50 \sin(377t + 30^\circ) \Rightarrow \mathbf{V}_a = 35,35 \angle 30^\circ$$

$$v_b = 30 \sin(377t + 60^\circ) \Rightarrow \mathbf{V}_b = 21,21 \angle 60^\circ$$

Mises sous forme rectangulaire, elles deviennent:

$$\mathbf{V}_a = 35,35 \angle 30^\circ = 30,61 + j17,68$$

$$\mathbf{V}_b = 21,21 \angle 60^\circ = 10,61 + j18,37$$

et leur somme est:

$$\mathbf{E} = \mathbf{V}_a + \mathbf{V}_b = (30,61 + j17,68) + (10,61 + j18,37)$$

$$\mathbf{E} = 41,22 + j36,05$$

La tension d'entrée sous forme polaire est:

$$\mathbf{E} = 41,22 + j36,05 = 54,76 \angle 41,17^\circ$$

Par suite, on a sous forme analytique:

$$\mathbf{E} = 54,76 \angle 41,17^\circ \Rightarrow e_{in} = \sqrt{2}(54,76) \sin(377t + 41,17^\circ)$$

et:

$$e = 77,43 \sin(377t + 41,17^\circ)$$

La figure 14.31 illustre le tracé des trois formes d'onde. À chaque instant, la valeur de  $e$  est la somme des valeurs des deux ondes. À  $t = 0$  ( $\omega t = 0$ ),  $e$  est la somme de deux valeurs positives. Quand  $\omega t$  se situe presque à mi-chemin entre  $\pi/2$  et  $\pi$ ,  $e$  est la somme de la valeur positive de  $v_a$  et de la valeur négative de la valeur négative de  $v_b$ , ce qui donne zéro.

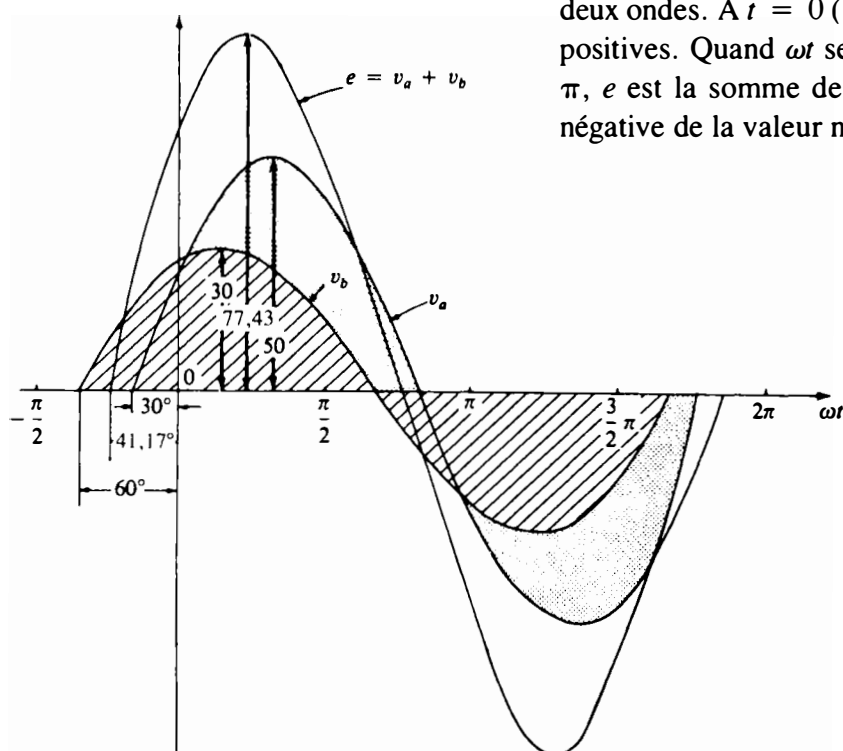
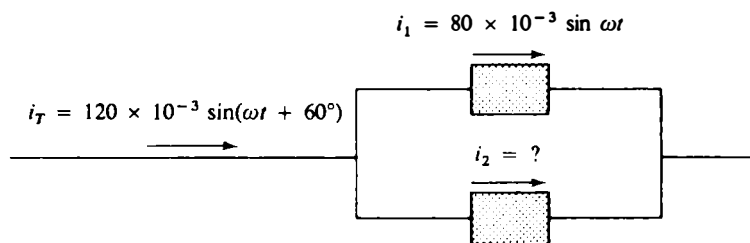


FIG. 14.32

(j)

**EXEMPLE 14.20** Calculer le courant  $i_2$  dans le réseau illustré à la figure 14.33.



*Solution:* La loi des courants donne:

$$i_T = i_1 + i_2$$

$$i_2 = i_T - i_1$$

Sous forme de vecteurs, on a:

$$i_T = 120 \times 10^{-3} \sin(\omega t + 60^\circ) \Rightarrow 84,84 \times 10^{-3} \angle 60^\circ$$

$$i_1 = 80 \times 10^{-3} \sin \omega t \Rightarrow 56,56 \times 10^{-3} \angle 0^\circ$$

et sous forme rectangulaire:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_T &= 84,84 \times 10^{-3} \angle 60^\circ \\ &= 42,42 \times 10^{-3} + j73,46 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1 &= 56,56 \times 10^{-3} \angle 0^\circ \\ &= 56,56 \times 10^{-3} + j0 \end{aligned}$$

dont la différence est:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_2 &= \mathbf{I}_T - \mathbf{I}_1 \\ &= (42,42 \times 10^{-3} + j73,46 \times 10^{-3}) \\ &\quad - (56,56 \times 10^{-3} + j0) \end{aligned}$$

et:

$$\mathbf{I}_2 = -14,14 \times 10^{-3} + j73,46 \times 10^{-3}$$

Sous forme polaire, ce courant est:

$$\mathbf{I}_2 = 74,82 \times 10^{-3} \angle 100,89^\circ$$

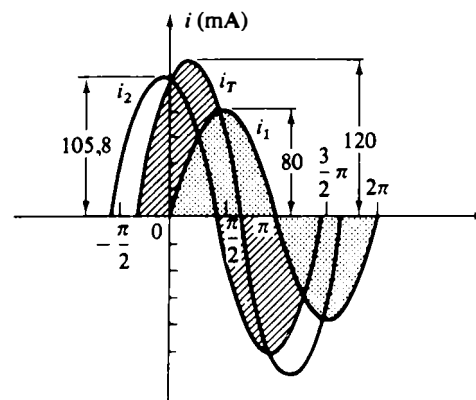
Enfin sous forme analytique, on a:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_2 &= 74,82 \times 10^{-3} \angle 100,89^\circ \Rightarrow \\ i_2 &= \sqrt{2}(74,82 \times 10^{-3}) \sin(\omega t + 100,89^\circ) \end{aligned}$$

et:

$$i_2 = 105,8 \times 10^{-3} \sin(\omega t + 100,89^\circ)$$

La figure 14.34 représente le tracé des trois formes d'onde. Il y apparaît nettement que  $i_T = i_1 + i_2$ .



**FIG. 14.34**

## PROBLÈMES

### Section 14.4

1. Écrivez les expressions ci-dessous sous forme polaire.

- |                    |  |
|--------------------|--|
| a. $4 + j3$        | b. $2 + j2$                                |
| c. $3,5 + j16$     | d. $100 + j650$                            |
| e. $1000 + j750$   | f. $0,001 + j0,0065$                       |
| g. $7,6 - j9$      | h. $-5,4 + j4$                             |
| i. $-15 - j60$     | j. $+78 - j65$                             |
| k. $-2400 + j3600$ | l. $5 \times 10^{-3} - j25 \times 10^{-3}$ |

2. Écrivez les expressions ci-dessous sous forme rectangulaire.

- |                             |                                      |
|-----------------------------|--------------------------------------|
| a. $6 \angle 30^\circ$      | b. $42 \angle 45^\circ$              |
| c. $7400 \angle 70^\circ$   | d. $4 \times 10^{-4} \angle 8^\circ$ |
| e. $8,49 \angle 80^\circ$   | f. $0,0093 \angle 23^\circ$          |
| g. $65 \angle 150^\circ$    | h. $1,2 \angle 135^\circ$            |
| i. $540 \angle 210^\circ$   | j. $6320 \angle -35^\circ$           |
| k. $7,52 \angle -125^\circ$ | l. $0,008 \angle 310^\circ$          |

3. Écrivez les expressions ci-dessous sous forme polaire.

- |                  |                   |
|------------------|-------------------|
| a. $1 + j15$     | b. $60 + j5$      |
| c. $0,01 + j0,3$ | d. $150 - j2500$  |
| e. $-5,6 + j86$  | f. $-2,7 - j38,6$ |

4. Écrivez les expressions ci-dessous sous forme rectangulaire.

- |                                      |                            |
|--------------------------------------|----------------------------|
| a. $13 \angle 5^\circ$               | b. $160 \angle 87^\circ$   |
| c. $7 \times 10^{-6} \angle 2^\circ$ | d. $8,7 \angle 177^\circ$  |
| e. $76 \angle -4^\circ$              | f. $396 \angle +265^\circ$ |

### Section 14.5

Effectuez les opérations indiquées.

5. Addition et soustraction (écrivez les résultats sous forme rectangulaire).

- $(4,2 + j6,8) + (7,6 + j0,02)$
- $(142 + j7) + (9,8 + j42) + (0,1 + j0,9)$
- $(4 \times 10^{-6} + j76) + (7,2 \times 10^{-7} - j0,9)$
- $(9,8 + j6,2) - (4,6 + j4,6)$
- $(167 + j243) - (-42,3 - j68)$
- $(-36,0 + j78) - (-4 - j6) + (10,8 - j72)$
- $6 \angle 20^\circ + 10 \angle 30^\circ$
- $42 \angle 45^\circ + 62 \angle 60^\circ - 70 \angle 120^\circ$

6. Multiplication [écrivez les résultats des parties (i) à (l) sous forme rectangulaire et les autres, sous forme polaire].

- $(2 + j3)(6 + j8)$
- $(7,8 + j1)(4 + j2)(7 + j6)$
- $(0,002 + j0,006)(-2 + j2)$
- $(460 - j260)(-0,01 - j0,5)(-1 + j3)$
- $(2 \angle 60^\circ)(4 \angle 22^\circ)$
- $(6,9 \angle 8^\circ)(7,2 \angle -72^\circ)$
- $(0,002 \angle 120^\circ)(0,5 \angle 200^\circ)(40 \angle -60^\circ)$
- $(540 \angle -20^\circ)(-5 \angle 180^\circ)(6,2 \angle 0^\circ)$

7. Division (écrivez les résultats sous forme polaire).

- $(42 \angle 10^\circ)/(7 \angle 60^\circ)$
- $(0,006 \angle 120^\circ)/(50 \angle -20^\circ)$

- s.  $(4360 \angle -20^\circ)/(40 \angle 210^\circ)$   
 t.  $(650 \angle -80^\circ)/(8,5 \angle 360^\circ)$   
 u.  $(8 + j8)/(2 + j2)$   
 v.  $(8 + j42)/(-6 + j66)$   
 w.  $(0,05 + j0,25)/(8 - j60)$   
 x.  $(-4,5 - j6)/(0,1 - j0,4)$

Simplifiez les expressions ci-dessous (écrivez les résultats sous forme rectangulaire).

8. a.  $\frac{(4 + j3) + (6 - j8)}{(3 + j3) - (2 + j3)}$   
 b.  $\frac{(1 + j5)(7 \angle 60^\circ)}{(2 \angle 0^\circ) + (100 + j100)}$   
 c.  $\frac{(6 \angle 20^\circ)(120 \angle -40^\circ)(3 + j4)}{2 \angle -30^\circ}$   
 d.  $\frac{(0,4 \angle 60^\circ)^2(300 \angle 40^\circ)}{(3 + j6) - (27 + j6)}$   
 e.  $\frac{(150 \angle 2^\circ)(4 \times 10^{-6} \angle 88^\circ)}{(1 \angle 10^\circ)^3(4 \angle 30^\circ)}$

#### Section 14.7

9. Écrivez les expressions ci-dessous sous forme de vecteurs de phase.
- a.  $\sqrt{2}(100) \sin(\omega t + 30^\circ)$   
 b.  $\sqrt{2}(0,25) \sin(157t - 40^\circ)$   
 c.  $100 \sin(\omega t - 90^\circ)$   
 d.  $42 \sin(377t + 0^\circ)$   
 e.  $6 \times 10^{-6} \cos \omega t$   
 f.  $3,6 \times 10^{-6} \cos(754t - 20^\circ)$
10. Écrivez les expressions ci-dessous sous forme analytique (la fréquence est de 60 Hz).
- a.  $I = 40 \angle 20^\circ$                       b.  $V = 120 \angle 0^\circ$   
 c.  $I = 8 \times 10^{-3} \angle 120^\circ$         d.  $V = 7,6 \angle 90^\circ$   
 e.  $I = 1200 \angle -120^\circ$             f.  $V = \frac{6000}{\sqrt{2}} \angle -180^\circ$
11. Voir le réseau illustré à la figure 14.35. Écrivez l'expression analytique de la tension inconnue  $v_a$ , si:

$$e = 60 \sin(377t + 20^\circ)$$

$$v_b = 20 \sin 377t$$

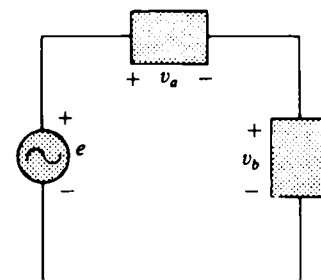


FIG. 14.35

12. Voir le réseau illustré à la figure 14.36. Écrivez l'expression analytique du courant inconnu  $i_1$ , si:

$$i_T = 20 \times 10^{-6} \sin(\omega t + 90^\circ)$$

$$i_2 = 6 \times 10^{-6} \sin(\omega t - 60^\circ)$$

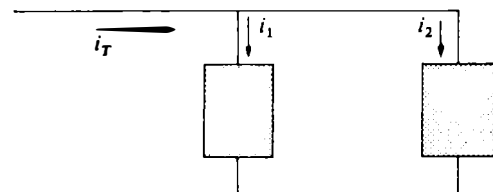


FIG. 14.36



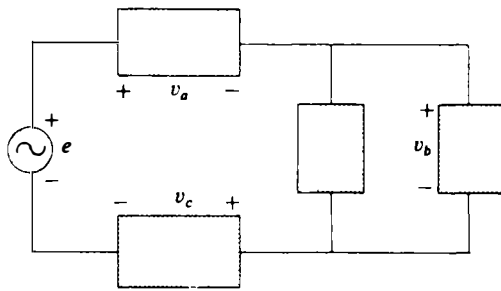


FIG. 14.37

13. Voir le réseau illustré à la figure 14.37. Écrivez l'expression analytique de la tension  $v_c$ , si:

$$e = 120 \sin(\omega t - 30^\circ)$$

$$v_a = 60 \cos \omega t$$

$$v_b = 30 \sin \omega t$$

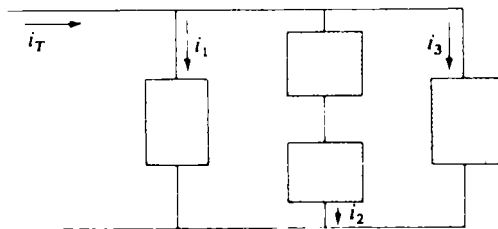


FIG. 14.38

14. Voir le réseau illustré à la figure 14.38. Écrivez l'expression analytique du courant  $i_T$ , si:

$$i_1 = 6 \times 10^{-3} \sin(377t + 180^\circ)$$

$$i_2 = 8 \times 10^{-3} \sin(377t - 20^\circ)$$

$$i_3 = 2i_2$$

## GLOSSAIRE

**Conjugué d'un nombre complexe** Nombre complexe que l'on obtient en gardant le module d'un autre nombre complexe et en changeant le signe de l'argument de celui-ci.

**Diagramme de phase** « Photo » prise sur le vif des vecteurs de phase représentatifs des formes d'onde, à l'instant  $t = 0$ .

**Forme polaire** Méthode de définition d'un point dans un plan complexe selon laquelle un nombre représente le module du nombre complexe associé au point et un angle mesuré dans le sens positif, son argument.

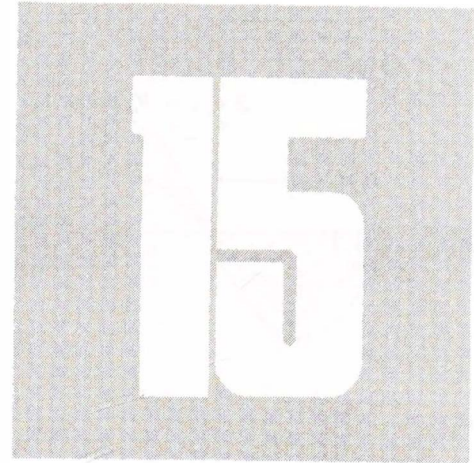
**Forme rectangulaire** Méthode de définition d'un point du plan complexe selon laquelle un nombre représente le module du nombre complexe associé au point et un second nombre, affecté de la lettre  $j$ , son argument.

**Inverse d'un nombre complexe** Quotient de 1 par le nombre complexe.

**Nombre complexe** Nombre représentant un point d'un plan déterminé par deux axes et définissant un vecteur tracé entre l'origine du plan et ce point.

**Vecteur de phase** Vecteur rayon de module fixe représentant une tension sinusoïdale ou un courant sinusoïdal.

# CIRCUITS SÉRIE ET PARALLÈLE À COURANT ALTERNATIF



## 15.1 INTRODUCTION

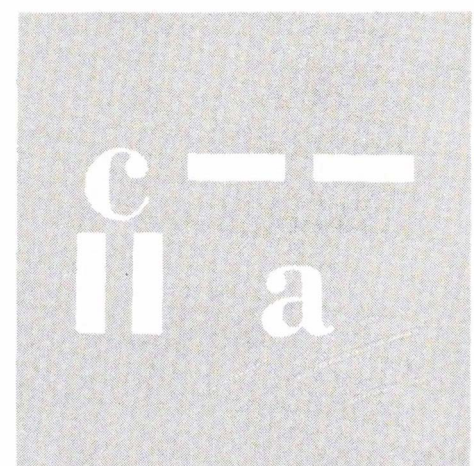
Dans le présent chapitre, nous utiliserons les vecteurs de phase pour mettre au point une méthode rapide et directe de résolution des problèmes ayant trait aux circuits série et parallèle à courant alternatif. L'étroite relation qui existe entre cette méthode et l'approche adoptée pour les circuits à courant continu deviendra apparente après quelques exemples simples. Une fois cette relation bien comprise, on pourra appliquer facilement aux circuits à courant alternatif de nombreuses règles (règle du diviseur de courant, règle du diviseur de tension, etc.) établies lors de l'étude des circuits à courant continu.

## CIRCUITS SÉRIE À COURANT ALTERNATIF

### 15.2 IMPÉDANCE ET DIAGRAMME DE PHASE

Au chapitre 13, nous avons établi que dans un circuit purement résistif (figure 15.1), la tension  $v$  et le courant  $i$  sont en phase, et que l'amplitude du courant ou de la tension est:

$$I_m = \frac{V_m}{R} \quad \text{ou} \quad V_m = I_m R$$



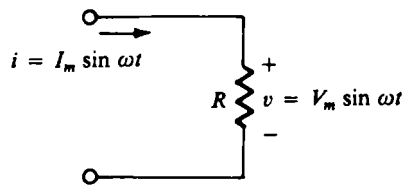


FIG. 15.1

Sous forme de vecteur de phase, on a:

$$v = V_m \sin \omega t \Rightarrow \mathbf{V} = V \angle 0^\circ \quad \text{et} \quad V = 0,707V_m$$

Appliquons maintenant la loi d'Ohm en utilisant les propriétés des vecteurs de phase; nous obtenons:

$$\mathbf{I} = \frac{V \angle 0^\circ}{R \angle \theta_R} = \frac{V}{R} \angle 0^\circ - \theta_R$$

Puisque  $i$  et  $v$  sont en phase, l'angle associé au courant  $i$  doit être de  $0^\circ$ . Par conséquent,  $\theta_R$  est égal à  $0^\circ$ . Substituons  $0^\circ$  à l'angle  $\theta_R$ :

$$\mathbf{I} = \frac{V \angle 0^\circ}{R \angle 0^\circ} = \frac{V}{R} \angle 0^\circ - 0^\circ = \frac{V}{R} \angle 0^\circ$$

de sorte que, sous forme analytique:

$$i = \sqrt{2} \left( \frac{V}{R} \right) \sin \omega t$$

Le nombre complexe apparaissant au dénominateur de l'équation ci-dessus:

$$\mathbf{R} = R \angle 0^\circ \quad (15.1)$$

ne représente pas une fonction sinusoïdale sous forme de vecteur de phase même si sa notation est semblable. Il s'agit plutôt d'un vecteur tournant du plan complexe dont la grandeur  $R$  est fixe et fait un angle de  $0^\circ$  (le vecteur coïncide donc avec l'axe réel positif). Les avantages relatifs qu'offre l'association d'un angle de  $0^\circ$  aux éléments purement résistifs apparaissent dans les exemples qui suivent. On s'apercevra d'autre part qu'il n'est plus nécessaire de se souvenir que  $v$  et  $i$  sont en phase. C'est en effet la signification implicite de l'angle de  $0^\circ$  associé à  $R$ .

**EXEMPLE 15.1** Utiliser les vecteurs de phase pour déterminer le courant  $i$  du circuit illustré à la figure 15.2. Dessiner les formes d'onde de  $v$  et de  $i$ .

*Solution:* Voir la figure 15.3.

$$v = 100 \sin \omega t \Rightarrow \mathbf{V} = 70,7 \angle 0^\circ$$

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{R}} = \frac{70,7 \angle 0^\circ}{5 \angle 0^\circ} = 14,14 \angle 0^\circ$$

$$i = \sqrt{2}(14,14) \sin \omega t = 20 \sin \omega t$$

**EXEMPLE 15.2** Utiliser les vecteurs de phase pour déterminer la tension  $v$  dans le circuit illustré à la figure 15.4. Dessiner les formes d'onde de  $v$  et de  $i$ .

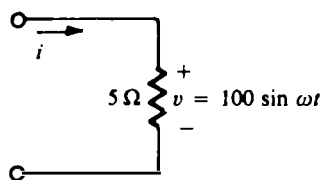


FIG. 15.2

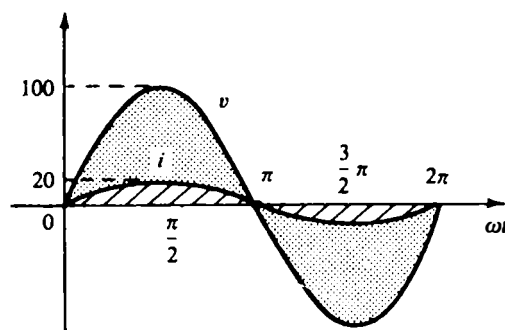


FIG. 15.3

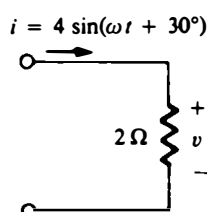


FIG. 15.4

Solution: Voir la figure 15.5.

$$i = 4 \sin(\omega t + 30^\circ) \Rightarrow \mathbf{I} = 2,828 \angle 30^\circ$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{IR} = (2,828 \angle 30^\circ)(2 \angle 0^\circ) = 5,656 \angle 30^\circ$$

de sorte que:

$$v = \sqrt{2}(5,656) \sin(\omega t + 30^\circ) = 8,0 \sin(\omega t + 30^\circ)$$

Il est souvent utile dans l'analyse des réseaux de recourir à un *diagramme de phase*, qui montre graphiquement les *grandeurs* et les *relations de phase* des diverses quantités du réseau. Ainsi, les diagrammes de phase des circuits des deux exemples précédents seraient ceux qu'illustre la figure 15.6. Dans les deux cas, il apparaît immédiatement que la tension  $v$  et le courant  $i$  sont en phase, puisque les deux grandeurs font le même angle avec l'axe horizontal.

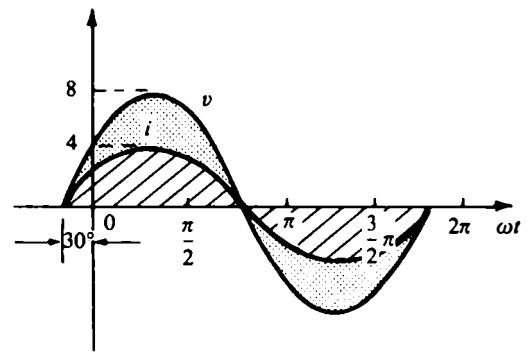


FIG. 15.5

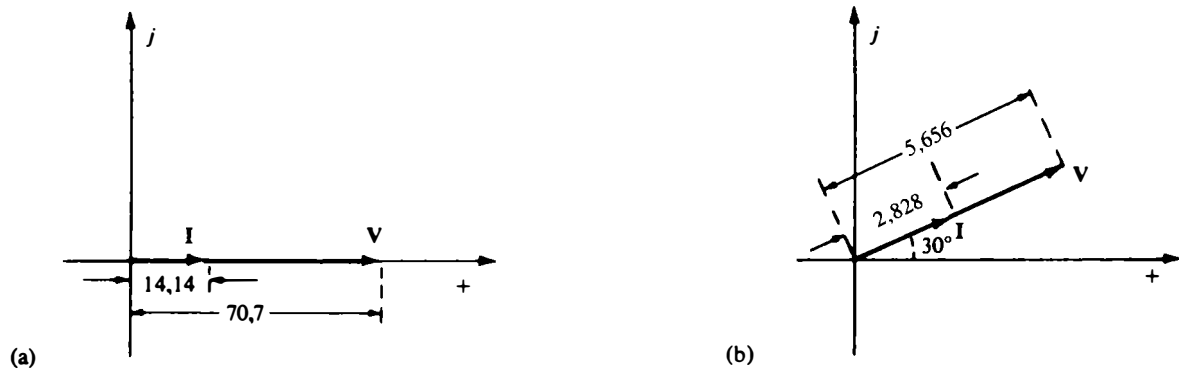


FIG. 15.6

Dans le cas du circuit purement inductif illustré à la figure 15.7, nous avons appris, au chapitre 13, que la tension est en avance de  $90^\circ$  sur le courant et que la réactance  $X_L$  de la bobine est déterminée par  $\omega L$ .

$$v = V_m \sin \omega t \Rightarrow \mathbf{V} = V \angle 0^\circ$$

La loi d'Ohm donne:

$$\mathbf{I} = \frac{V \angle 0^\circ}{X_L \angle \theta_L} = \frac{V}{X_L} \angle 0^\circ - \theta_L$$

Puisque  $v$  est en avance de  $90^\circ$  sur  $i$ , l'angle associé à ce dernier doit être de  $-90^\circ$ . Pour que cette condition soit satisfaite, l'angle  $\theta_L$  doit être égal à  $+90^\circ$ . Substituons la valeur de  $90^\circ$  à l'angle  $\theta_L$  dans l'équation ci-dessus; nous obtenons:

$$\mathbf{I} = \frac{V \angle 0^\circ}{X_L \angle 90^\circ} = \frac{V}{X_L} \angle 0^\circ - 90^\circ = \frac{V}{X_L} \angle -90^\circ$$

et sous forme analytique:

$$i = \sqrt{2} \left( \frac{V}{X_L} \right) \sin(\omega t - 90^\circ)$$

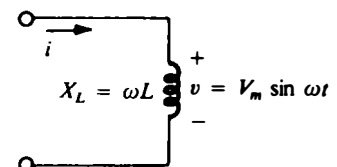


FIG. 15.7

Le nombre complexe apparaissant au dénominateur de l'équation ci-dessus:

$$\mathbf{X}_L = X_L \angle 90^\circ \tag{15.2}$$

ne représente pas une fonction sinusoïdale sous forme de vecteur de phase même si sa notation est semblable. Il s'agit d'un vecteur tournant du plan complexe de grandeur  $X_L$  fixe faisant un angle de  $90^\circ$  avec l'axe horizontal.

**EXEMPLE 15.3** Utiliser les vecteurs de phase pour déterminer le courant  $i$  du circuit illustré à la figure 15.8. Dessiner les formes d'onde de  $v$  et de  $i$ .

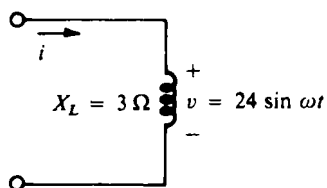


FIG. 15.8

*Solution:* Voir la figure 15.9.

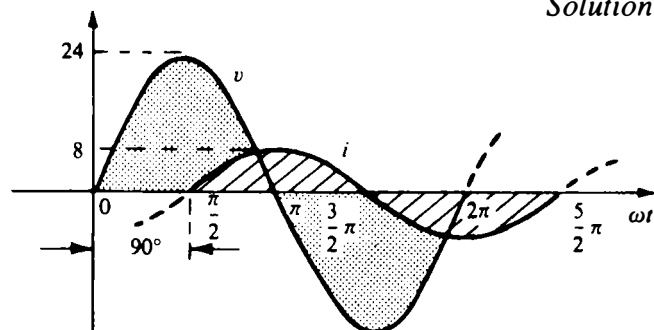


FIG. 15.9

$$v = 24 \sin \omega t \Rightarrow \mathbf{V} = 16,968 \angle 0^\circ$$

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{X}_L} = \frac{16,968 \angle 0^\circ}{3 \angle 90^\circ} = 5,656 \angle -90^\circ$$

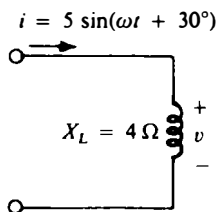


FIG. 15.10

de sorte que:

$$i = \sqrt{2}(5,656) \sin(\omega t - 90^\circ) = 8,0 \sin(\omega t - 90^\circ)$$

**EXEMPLE 15.4** Utiliser les vecteurs de phase pour déterminer la tension  $v$  dans le circuit illustré à la figure 15.10. Dessiner les formes d'onde de  $v$  et de  $i$ .

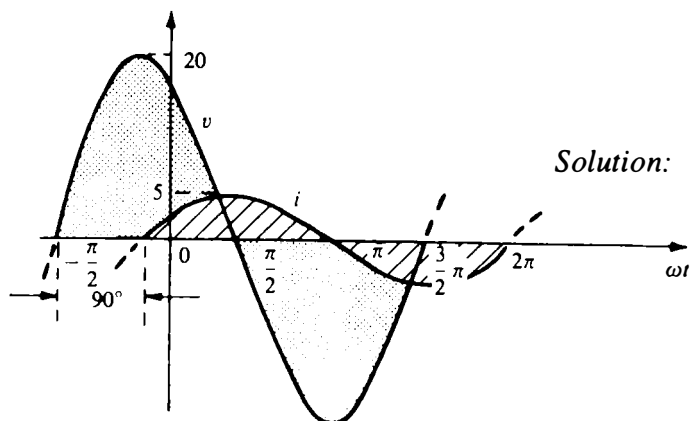


FIG. 15.11

*Solution:* Voir la figure 15.11.

$$i = 5 \sin(\omega t + 30^\circ) \Rightarrow \text{phasor form } \mathbf{I} = 3,535 \angle 30^\circ$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{I}X_L = (3,535 \angle 30^\circ)(4 \angle +90^\circ) = 14,140 \angle 120^\circ$$

$$v = \sqrt{2}(14,140) \sin(\omega t + 120^\circ) = 20 \sin(\omega t + 120^\circ)$$

La figure 15.12 représente les diagrammes de phase pour les deux circuits des exemples ci-dessus. Les deux diagrammes indiquent de toute évidence que la tension est en avance de 90° sur le courant.

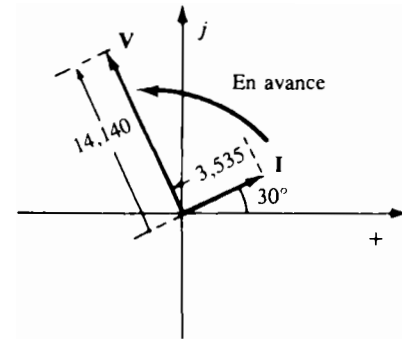
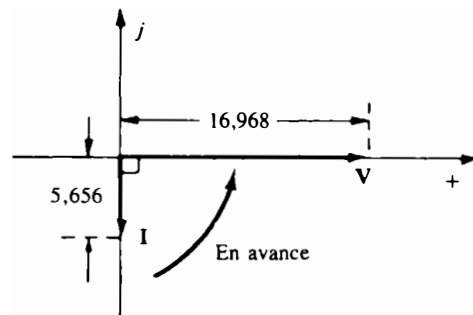


FIG. 15.12

Dans le cas du circuit purement capacitif illustré à la figure 15.13, nous avons appris, au chapitre 13, que le courant est en avance de 90° sur la tension et que la réactance  $X_C$  du condensateur est déterminée par  $1/\omega C$ .

$$v = V_m \sin \omega t \Rightarrow \mathbf{V} = V \angle 0^\circ$$

Appliquons la loi d'Ohm; sous forme de vecteur de phase, nous avons:

$$\mathbf{I} = \frac{V \angle 0^\circ}{X_C \angle \theta_C} = \frac{V}{X_C} \angle 0^\circ - \theta_C$$

Puisque  $i$  est en avance de 90° sur  $v$ , l'angle qui lui est associé doit être de +90°. Pour que cette condition soit satisfaite, l'angle  $\theta_C$  doit être égal à -90°. La substitution donne:

$$\mathbf{I} = \frac{V \angle 0^\circ}{X_C \angle -90^\circ} = \frac{V}{X_C} \angle 0^\circ - (-90^\circ) = \frac{V}{X_C} \angle 90^\circ$$

et sous forme analytique:

$$i = \sqrt{2} \left( \frac{V}{X_C} \right) \sin(\omega t + 90^\circ)$$

Soulignons une fois de plus que le nombre complexe apparaissant au dénominateur de l'équation ci-dessus:

$$\mathbf{X}_C = X_C \angle -90^\circ \quad (15.3)$$

ne représente pas une fonction sinusoïdale sous forme de vecteur de phase même s'il est de notation semblable. Il s'agit plutôt d'un vecteur tournant dans le plan complexe de grandeur fixe  $X_C$  et qui fait un angle de -90° avec l'axe horizontal.

**EXEMPLE 15.5** Utiliser les vecteurs de phase pour déterminer le courant  $i$  du circuit illustré à la figure 15.14. Dessiner les formes d'onde de  $v$  et de  $i$ .

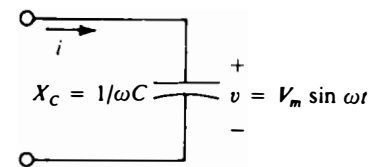


FIG. 15.13

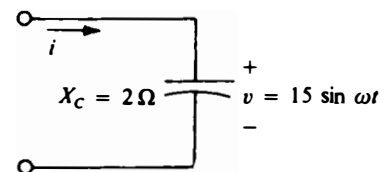
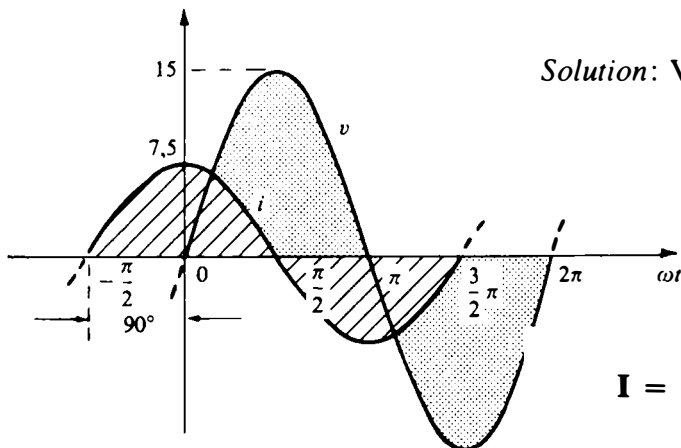


FIG. 15.14



Solution: Voir la figure 15.15.

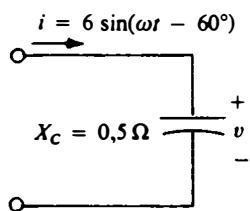
$$v = 15 \sin \omega t \Rightarrow V = 10,605 \angle 0^\circ$$

$$I = \frac{V}{X_C} = \frac{10,605 \angle 0^\circ}{2 \angle -90^\circ} = 5,303 \angle 90^\circ$$

de sorte que:

$$i = \sqrt{2}(5,303) \sin(\omega t + 90^\circ) = 7,5 \sin(\omega t + 90^\circ)$$

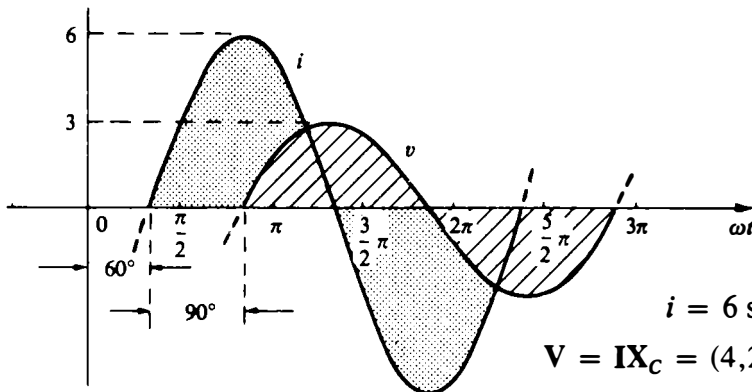
FIG. 15.15



**EXEMPLE 15.6** Utiliser les vecteurs de phase pour déterminer la tension  $v$  dans le circuit illustré à la figure 15.16. Dessiner les formes d'onde de  $v$  et de  $i$ .

Solution: Voir la figure 15.17.

FIG. 15.16



$$i = 6 \sin(\omega t - 60^\circ) \Rightarrow I = 4,242 \angle -60^\circ$$

$$V = IX_C = (4,242 \angle -60^\circ)(0,5 \angle -90^\circ) = 2,121 \angle -150^\circ$$

de sorte que:

$$v = \sqrt{2}(2,121) \sin(\omega t - 150^\circ) = 3,0 \sin(\omega t - 150^\circ)$$

FIG. 15.17

La figure 15.18 représente les diagrammes de phase pour les deux circuits des exemples ci-dessus. On y voit facilement que le courant  $i$  est en avance de  $90^\circ$  sur la tension.

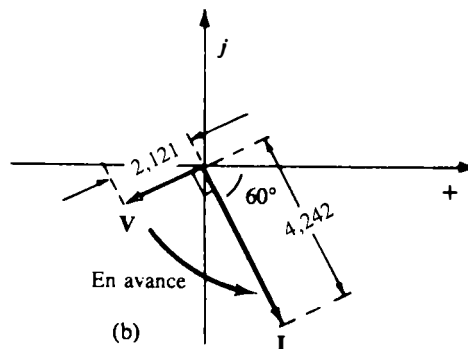
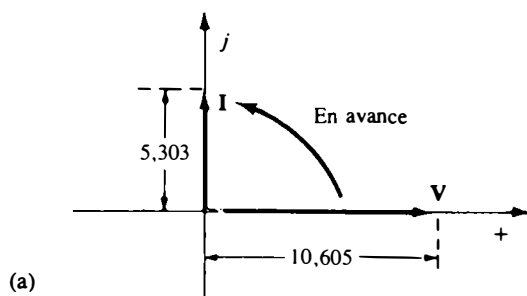


FIG. 15.18

La figure 15.19 illustre sur le même diagramme les vecteurs représentant la résistance, la réactance inductive et la réactance capacitive. Quel que soit le réseau, le vecteur résistance coïncide *toujours* avec l'axe réel positif, le vecteur réactance inductive avec l'axe imaginaire positif et le vecteur réactance capacitive avec l'axe imaginaire négatif.

Toute combinaison de ces trois grandeurs ou de deux d'entre elles dans un circuit alternatif est appelée *impédance* du circuit. L'impédance est une mesure de l'*opposition* totale du circuit au passage du courant. Le symbole de l'impédance est  $Z$ . Le diagramme de la figure 15.19 est naturellement appelé *diagramme d'impédance*.

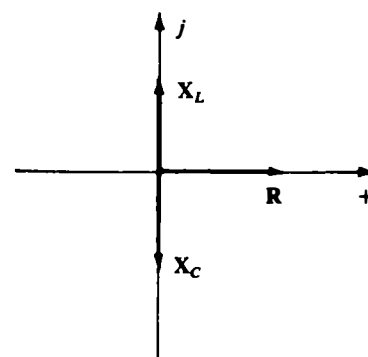


FIG. 15.19

Pour chacune des grandeurs, on a:

Résistance : $Z = \mathbf{R} = R \angle 0^\circ = R + j0$	(15.4)
Réactance inductive : $Z = \mathbf{X}_L$ $= X_L \angle 90^\circ = 0 + jX_L$	(15.5)
Réactance capacitive : $Z = \mathbf{X}_C$ $= X_C \angle -90^\circ = 0 - jX_C$	(15.6)

### 15.3 MONTAGE SÉRIE

Les caractéristiques générales des circuits série à courant alternatif (figure 15.20) sont les mêmes que celles des circuits série à courant continu, c'est-à-dire que *le courant est le même dans tous les éléments* et que l'impédance totale du circuit est la somme des impédances des éléments.

$$\mathbf{Z}_T = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 + \dots + \mathbf{Z}_N \quad (15.7)$$

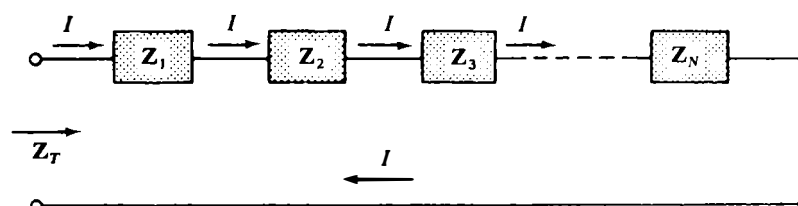


FIG. 15.20

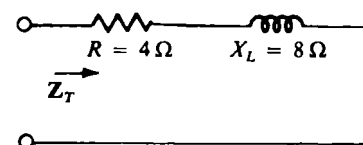


FIG. 15.21

**EXEMPLE 15.7** Tracer le diagramme d'impédance du circuit illustré à la figure 15.21 et calculer l'impédance totale.

*Solution:* Comme l'illustre la figure 15.22, on peut déterminer graphiquement l'impédance totale à partir du diagramme d'impédance, en traçant à l'échelle la résistance et la réactance inductive sur les axes imaginaire et réel et en trouvant le vecteur

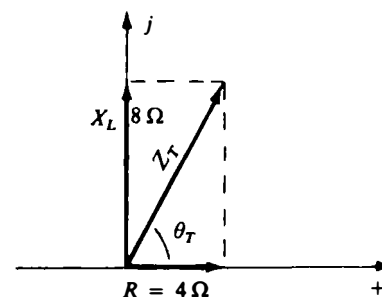


FIG. 15.22



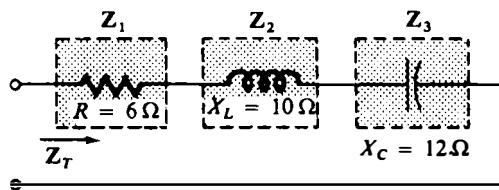


FIG. 15.23

résultant  $Z_T$  ainsi que l'angle  $\theta_T$ . On peut également se servir du calcul vectoriel:

$$\begin{aligned} Z_T &= Z_1 + Z_2 \\ &= R \angle 0^\circ + X_L \angle 90^\circ \\ &= R + jX_L = 4 + j8 \\ Z_T &= 8,944 \angle 63,43^\circ \end{aligned}$$

**EXEMPLE 15.8** Déterminer l'impédance d'entrée du réseau série illustré à la figure 15.23. Tracer le diagramme d'impédance.

*Solution:*

$$\begin{aligned} Z_T &= Z_1 + Z_2 + Z_3 \\ &= R \angle 0^\circ + X_L \angle 90^\circ + X_C \angle -90^\circ \\ &= R + jX_L - jX_C \\ &= R + j(X_L - X_C) = 6 + j(10 - 12) = 6 - j2 \\ Z_T &= 6,325 \angle -18,43^\circ \end{aligned}$$

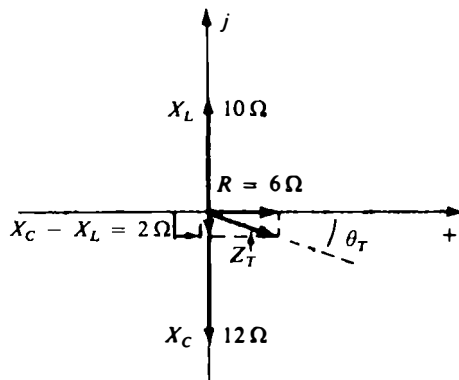


FIG. 15.24

Le diagramme d'impédance est illustré à la figure 15.24. Notons que la réactance inductive et que la réactance capacitive sont tracées dans des sens opposés dans le cas d'un circuit série. Si la réactance inductive du circuit illustré à la figure 15.23 était égale à la réactance capacitive, l'impédance d'entrée serait purement résistive. Nous étudierons de plus près cette condition particulière dans un chapitre ultérieur.

Comme nous l'avons souligné au chapitre 13, il est possible de déterminer si un circuit est surtout inductif ou surtout capacitif à partir de la relation de phase entre le courant et la tension d'entrée. L'angle  $\theta_T$  associé à l'impédance totale  $Z_T$  nous permet de faire la même chose. Si l'angle appartient au premier quadrant, c'est-à-dire si  $0^\circ < \theta_T < 90^\circ$ , le circuit est surtout inductif, et si l'angle appartient au quatrième quadrant, c'est-à-dire si  $-90^\circ < \theta_T < 0^\circ$ , le circuit est surtout capacitif. Le circuit est résistif si  $\theta_T = 0^\circ$ .

Dans de nombreux circuits que nous étudierons,  $3 + j4 = 5 \angle 53,13^\circ$  et  $4 + j3 = 5 \angle 36,87^\circ$  sont des relations que nous utiliserons fréquemment dans le but d'émonder notre approche et de ne pas nous perdre dans des relations mathématiques complexes.

Examinons maintenant les réseaux série  $R-L$ ,  $R-C$  et  $R-L-C$ . Ces circuits sont des circuits fondamentaux et méritent une étude détaillée. Les valeurs numériques des éléments des circuits ont été choisies pour simplifier les calculs le plus possible.

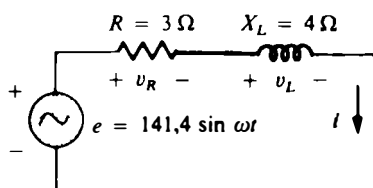


FIG. 15.25

**R-L** (figure 15.25)

*Vecteurs de phase:*

$$e = 141,4 \sin \omega t \Rightarrow E = 100 \angle 0^\circ$$

Voir la figure 15.26.

$Z_T$ :

$$Z_T = Z_1 + Z_2 = 3 \angle 0^\circ + 4 \angle 90^\circ = 3 + j4$$

de sorte que:

$$Z_T = 5 \angle 53,13^\circ$$

Diagramme d'impédance (voir la figure 15.27):

$I$ :

$$I = \frac{E}{Z_T} = \frac{100 \angle 0^\circ}{5 \angle 53,13^\circ} = 20 \angle -53,13^\circ$$

$V_R, V_L$ :

Loi des tensions de Kirchhoff:

$$\Sigma \odot V = E - V_R - V_L = 0$$

ou:

$$E = V_R + V_L$$

Les résultats deviennent dans la forme rectangulaire:

$$V_R = 60 \angle -53,13^\circ = 36,0 - j48,0$$

$$V_L = 80 \angle +36,87^\circ = 64,0 + j48,0$$

et:

$$E = V_R + V_L = (36 - j48) + (64 + j48) = 100 + j0 \\ = 100 \angle 0^\circ \text{ (tension appliquée)}$$

Diagramme de phase: Notons que le diagramme de phase illustré à la figure 15.28 indique que  $I$  est en phase avec la tension aux bornes de la résistance et qu'il est en retard de  $90^\circ$  sur la tension aux bornes de la bobine.

Puissance: La puissance totale en watts fournie au circuit est:

$$P_T = EI \cos \theta_T \\ = (100)(20) \cos 53,13^\circ = 2000(0,6) \\ = 1200 \text{ W}$$

où  $E$  et  $I$  sont les valeurs efficaces et où  $\theta_T$  est le déphasage entre  $E$  et  $I$ ; on peut donc écrire:

$$P_T = I^2 R \\ = (20^2)(3) = (400)(3) \\ = 1200 \text{ W}$$

où  $I$  est la valeur efficace; enfin:

$$P_T = P_R + P_L = V_R I \cos \theta_R + V_L I \cos \theta_L \\ = (60)(20) \cos 0^\circ + (80)(20) \cos 90^\circ \\ = 1200 + 0 \\ = 1200 \text{ W}$$

où  $\theta_R$  est le déphasage entre  $V_R$  et  $I$ , et où  $\theta_L$  est le déphasage entre  $V_L$  et  $I$ .

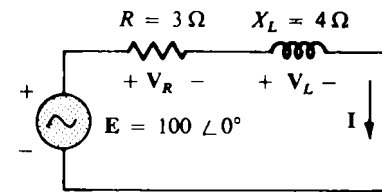


FIG. 15.26

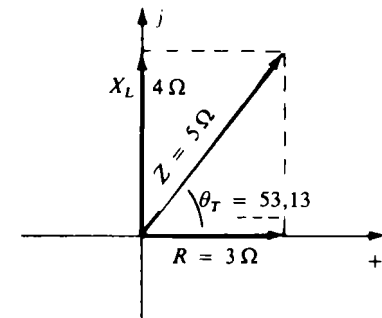


FIG. 15.27

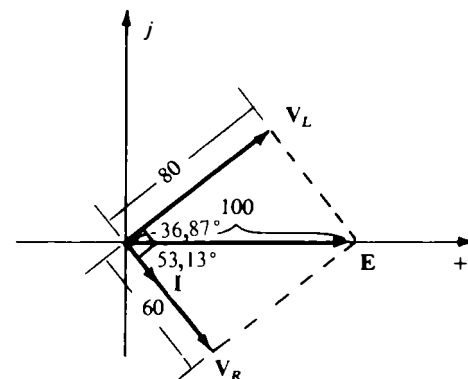


FIG. 15.28

**Facteur de puissance :** Le facteur de puissance  $F_p$  du circuit est  $\cos 53,13^\circ = 0,6$  (inductif),  $53,13^\circ$  étant le déphasage entre  $E$  et  $I$ .

Écrivons maintenant l'équation fondamentale de la puissance  $P = EI \cos \theta$  de la façon suivante:

$$\cos \theta = \frac{P}{EI}$$

où  $E$  et  $I$  sont les grandeurs d'entrée et où  $P$  est la puissance fournie au réseau; effectuons ensuite les substitutions suivantes:

$$\cos \theta = \frac{P}{EI} = \frac{I^2 R}{EI} = \frac{IR}{E} = \frac{R}{E/I} = \frac{R}{Z_T}$$

Nous obtenons alors:

$$F_p = \cos \theta_T = \frac{R}{Z_T} \quad (15.8)$$

La figure 15.27 nous indique en outre que  $\theta$  est l'angle d'impédance  $\theta_T$  de l'équation (15.8). En d'autres termes, l'angle d'impédance  $\theta_T$  est également le déphasage entre la tension et le courant d'entrée dans un circuit série à courant alternatif. Pour déterminer le facteur de puissance, il n'est nécessaire que de calculer le quotient de la résistance totale par l'impédance d'entrée.

Dans le cas qui nous intéresse, nous avons:

$$F_p = \cos \theta = \frac{R}{Z_T} = \frac{3}{5} = 0,6 \text{ (inductif),}$$

ce qui est en accord avec ce que nous avons déjà établi.

**R-C** (figure 15.29)

**Vecteurs de phase:**

$$i = 7,07 \sin(\omega t + 53,13^\circ) \Rightarrow \mathbf{I} = 5 \angle 53,13^\circ$$

Voir la figure 15.30.

**$Z_T$ :**

$$Z_T = Z_1 + Z_2 = 6 \angle 0^\circ + 8 \angle -90^\circ = 6 - j8$$

de sorte que:

$$Z_T = 10 \angle -53,13^\circ$$

**Diagramme d'impédance** (voir la figure 15.31):

**E:**

$$E = \mathbf{I} Z_T = (5 \angle 53,13^\circ)(10 \angle -53,13^\circ) = 50 \angle 0^\circ$$

**$V_R, V_C$ :**

$$V_R = \mathbf{I} R = (5 \angle 53,13^\circ)(6 \angle 0^\circ) = 30 \angle 53,13^\circ$$

$$V_C = \mathbf{I} X_C = (5 \angle 53,13^\circ)(8 \angle -90^\circ) = 40 \angle -36,87^\circ$$

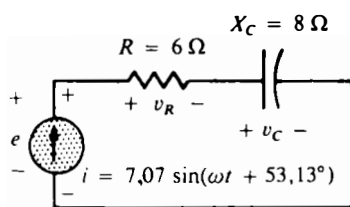


FIG. 15.29

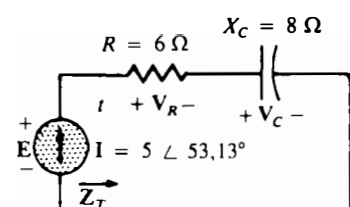


FIG. 15.30

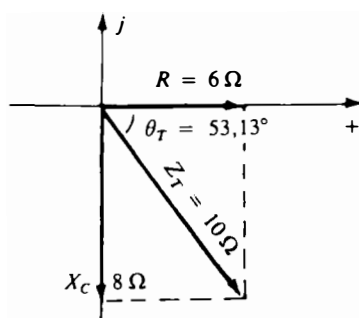


FIG. 15.31

Loi des tensions de Kirchhoff:

$$\Sigma \circ V = E - V_R - V_C = 0$$

ou:

$$E = V_R + V_C$$

ce qu'on peut vérifier par calcul vectoriel comme dans le cas du circuit R-L.

*Diagramme de phase:* Notons sur le diagramme de phase illustré à la figure 15.32 que le courant  $I$  est en phase avec la tension aux bornes de la résistance et qu'il est en avance de  $90^\circ$  sur la tension aux bornes du condensateur.

*Forme analytique:* Nous avons:

$$e = \sqrt{2}(50) \sin \omega t = 70,70 \sin \omega t$$

$$v_R = \sqrt{2}(30) \sin(\omega t + 53,13^\circ) = 42,42 \sin(\omega t + 53,13^\circ)$$

$$v_C = \sqrt{2}(40) \sin(\omega t - 36,87^\circ) = 56,56 \sin(\omega t - 36,87^\circ)$$

La figure 15.33 représente les formes d'onde de toutes les tensions et du courant pour le circuit étudié. Notons que le courant  $i$  est en phase avec la tension  $v_R$  et qu'il est en avance de  $90^\circ$  sur la tension  $v_C$ .

*Puissance:* La puissance totale en watts fournie au circuit est:

$$\begin{aligned} P_T &= EI \cos \theta_T = (50)(5) \cos 53,13^\circ \\ &= (250)(0,6) = 150 \text{ W} \end{aligned}$$

ou encore:

$$\begin{aligned} P_T &= I^2 R = (5^2)(6) = (25)(6) \\ &= 150 \text{ W} \end{aligned}$$

et, enfin:

$$\begin{aligned} P_T &= P_R + P_C = V_R I \cos \theta_R + V_C I \cos \theta_C \\ &= (30)(5) \cos 0^\circ + (40)(5) \cos 90^\circ \\ &= 150 + 0 = 150 \text{ W} \end{aligned}$$

*Facteur de puissance:* Le facteur de puissance du circuit est:

$$F_p = \cos \theta = \cos 53,13^\circ = 0,6 \text{ (capacitif)}$$

L'équation (15.8) permet d'écrire:

$$\begin{aligned} F_p &= \cos \theta = \frac{R}{Z_T} = \frac{6}{10} \\ &= 0,6 \text{ (capacitif)} \end{aligned}$$

ce qui est en accord avec ce que nous avons déjà établi.

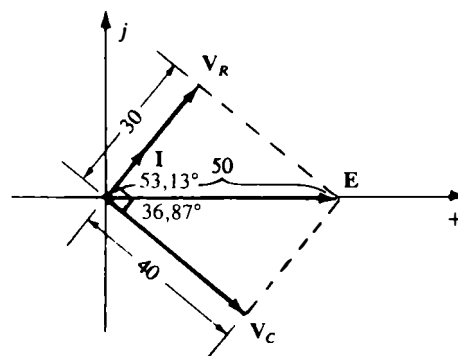


FIG. 15.32

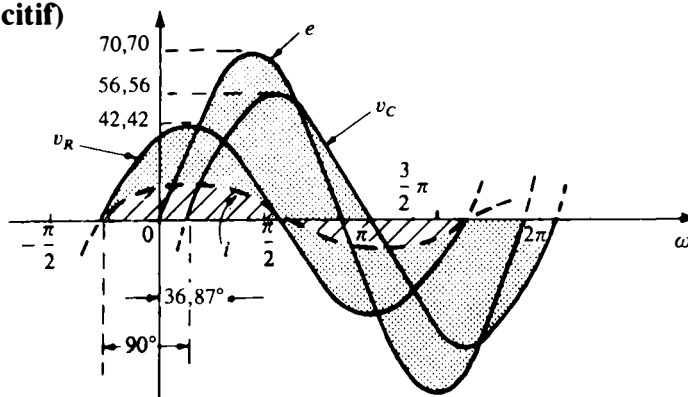


FIG. 15.33

**R-L-C** (figure 15.34)

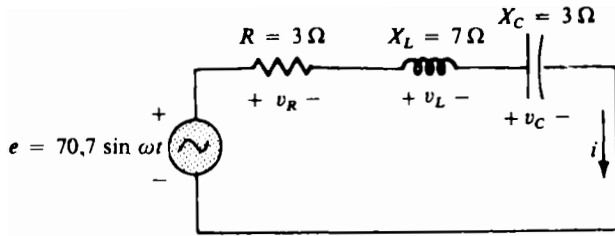


FIG. 15.34

Vecteurs de phase (figure 15.35):

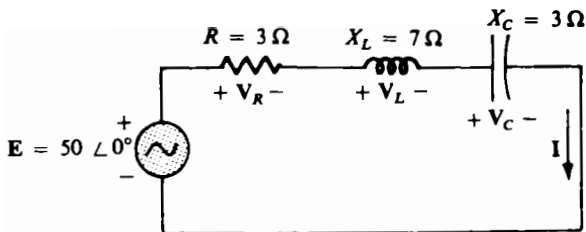


FIG. 15.35

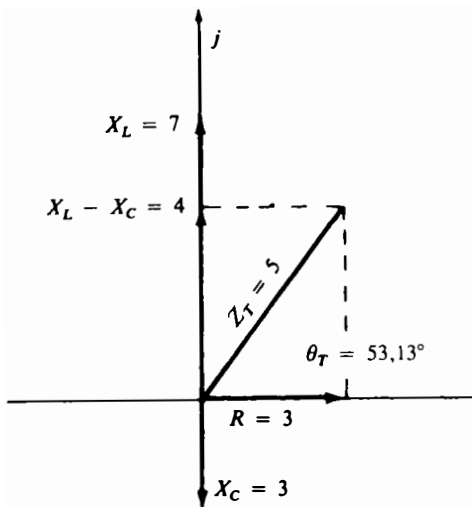


FIG. 15.36

$Z_T$ :

$$\begin{aligned} Z_T &= Z_1 + Z_2 + Z_3 = R \angle 0^\circ + X_L \angle 90^\circ + X_C \angle -90^\circ \\ &= 3 + j7 - j3 \\ &= 3 + j4 = 5 \angle 53,13^\circ \end{aligned}$$

Diagramme d'impédance (voir la figure 15.36):

$I$ :

$$I = \frac{E}{Z_T} = \frac{50 \angle 0^\circ}{5 \angle 53,13^\circ} = 10 \angle -53,13^\circ$$

$V_R, V_L, V_C$ :

$$V_R = IR = (10 \angle -53,13^\circ)(3 \angle 0^\circ) = 30 \angle -53,13^\circ$$

$$V_L = IX_L = (10 \angle -53,13^\circ)(7 \angle 90^\circ) = 70 \angle 36,87^\circ$$

$$V_C = IX_C = (10 \angle -53,13^\circ)(3 \angle -90^\circ) = 30 \angle -143,13^\circ$$

Loi des tensions de Kirchhoff:

$$\Sigma \circ V = E - V_R - V_L - V_C = 0$$

ou:

$$E = V_R + V_L + V_C$$

ce qui peut se vérifier par calcul vectoriel.

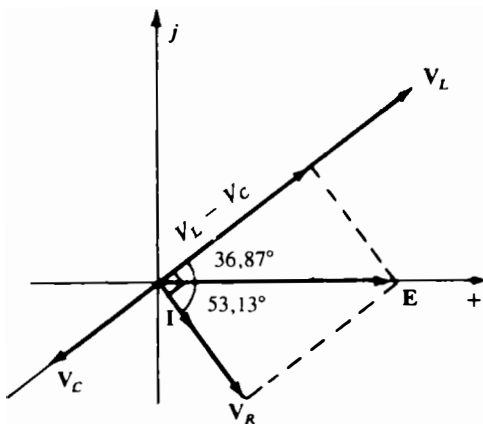


FIG. 15.37

Diagramme de phase: Le diagramme de phase illustré à la figure 15.37 indique que le courant  $I$  est en phase avec la tension aux bornes de la résistance, qu'il est en retard de  $90^\circ$  sur la tension aux bornes de la bobine et qu'il est en avance de  $90^\circ$  sur la tension aux bornes du condensateur.

Forme analytique: Nous avons:

$$i = \sqrt{2}(10) \sin(\omega t - 53,13^\circ) = 14,14 \sin(\omega t - 53,13^\circ)$$

$$v_R = \sqrt{2}(30) \sin(\omega t - 53,13^\circ) = 42,42 \sin(\omega t - 53,13^\circ)$$

$$v_L = \sqrt{2}(70) \sin(\omega t + 36,87^\circ) = 98,98 \sin(\omega t + 36,87^\circ)$$

$$v_C = \sqrt{2}(30) \sin(\omega t - 143,13^\circ) = 42,42 \sin(\omega t - 143,13^\circ)$$

La figure 15.38 illustre les formes d'onde de toutes les tensions et du courant du circuit étudié.

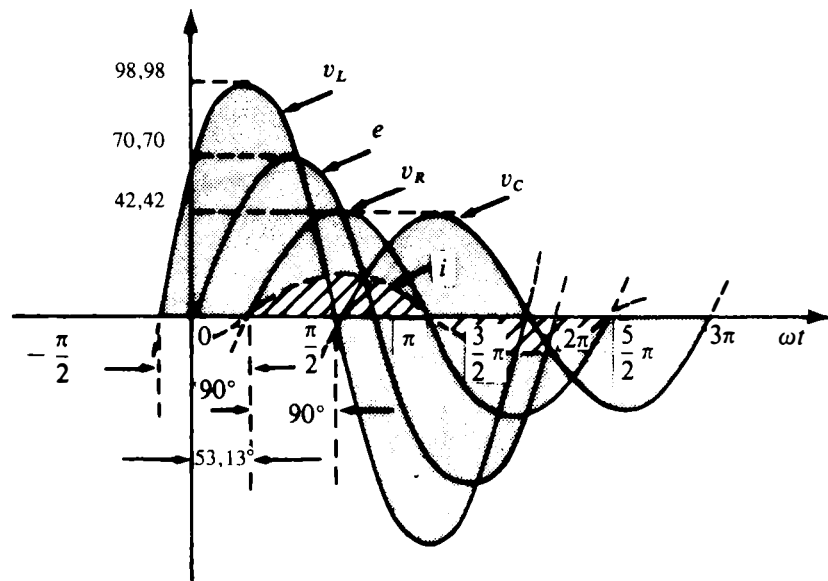


FIG. 15.38

Puissance: La puissance totale en watts fournie au circuit est:

$$P_T = EI \cos \theta_T = (50)(10) \cos 53,13^\circ = (500)(0,6) = 300 \text{ W}$$

ou encore:

$$P_T = I^2 R = (10^2)(3) = (100)(3) = 300 \text{ W}$$

et, enfin:

$$\begin{aligned} P_T &= P_R + P_L + P_C \\ &= V_R I \cos \theta_R + V_L I \cos \theta_L + V_C I \cos \theta_C \\ &= (30)(10) \cos 0^\circ + (70)(10) \cos 90^\circ + (30)(10) \cos 90^\circ \\ &= (30)(10) + 0 + 0 = 300 \text{ W} \end{aligned}$$

Facteur de puissance: Le facteur de puissance du circuit est:

$$F_p = \cos \theta_T = \cos 53,13^\circ = 0,6 \text{ (inductif)}$$

L'équation (15.8) permet d'écrire:

$$F_p = \cos \theta = \frac{R}{Z_T} = \frac{3}{5} = 0,6 \text{ (inductif)}$$

## 15.4 RÈGLE DU DIVISEUR DE TENSION

La forme fondamentale sous laquelle s'écrit la règle du diviseur de tension pour les circuits alternatifs est exactement la même que pour les circuits continus:

$$\boxed{V_x = \frac{Z_x E}{Z_T}} \quad (15.9)$$

dans laquelle  $V_x$  = la tension aux bornes des éléments en série dont l'impédance totale est  $Z_x$ ,

$E$  = la tension totale aux bornes du circuit série,

$Z_T$  = l'impédance totale du circuit série.

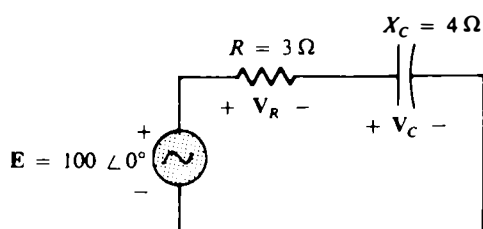


FIG. 15.39

**EXEMPLE 15.9** À l'aide de la règle du diviseur de tension, déterminer la tension aux bornes de chacun des éléments du circuit illustré à la figure 15.39.

*Solution:*

$$\begin{aligned} V_C &= \frac{X_C E}{X_C + R} = \frac{(4 \angle -90^\circ)(100 \angle 0^\circ)}{4 \angle -90^\circ + 3 \angle 0^\circ} = \frac{400 \angle -90^\circ}{3 - j4} \\ &= \frac{400 \angle -90^\circ}{5 \angle -53,13^\circ} = 80 \angle -36,87^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_R &= \frac{R E}{X_C + R} = \frac{(3 \angle 0^\circ)(100 \angle 0^\circ)}{5 \angle -53,13^\circ} = \frac{300 \angle 0^\circ}{5 \angle -53,13^\circ} \\ &= 60 \angle +53,13^\circ \end{aligned}$$

**EXEMPLE 15.10** À l'aide de la règle du diviseur de tension, déterminer les tensions inconnues  $V_R$ ,  $V_L$ ,  $V_C$  et  $V_1$  dans le circuit illustré à la figure 15.40.

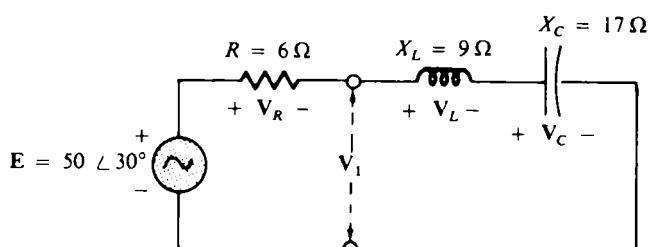


FIG. 15.40

*Solution:*

$$\begin{aligned} V_R &= \frac{R E}{R + X_L + X_C} = \frac{(6 \angle 0^\circ)(50 \angle 30^\circ)}{6 \angle 0^\circ + 9 \angle 90^\circ + 17 \angle -90^\circ} \\ &= \frac{300 \angle 30^\circ}{6 + j9 - j17} = \frac{300 \angle 30^\circ}{6 - j8} \\ &= \frac{300 \angle 30^\circ}{10 \angle -53,13^\circ} = 30 \angle 83,13^\circ \end{aligned}$$

$$V_L = \frac{X_L E}{Z_T} = \frac{(9 \angle 90^\circ)(50 \angle 30^\circ)}{10 \angle -53,13^\circ} = \frac{450 \angle 120^\circ}{10 \angle -53,13^\circ} = 45 \angle 173,13^\circ$$

$$V_C = \frac{X_C E}{Z_T} = \frac{(17 \angle -90^\circ)(50 \angle 30^\circ)}{10 \angle -53,13^\circ} = \frac{850 \angle -60^\circ}{10 \angle -53,13^\circ} = 85 \angle -6,87^\circ$$

$$V_1 = \frac{(X_L + X_C)E}{Z_T} = \frac{(9 \angle 90^\circ + 17 \angle -90^\circ)(50 \angle 30^\circ)}{10 \angle -53,13^\circ} = \frac{(8 \angle -90^\circ)(50 \angle 30^\circ)}{10 \angle -53,13^\circ} = \frac{400 \angle -60^\circ}{10 \angle -53,13^\circ} = 40 \angle -6,87^\circ$$

**EXEMPLE 15.11** Voir le circuit illustré à la figure 15.41.

- Calculer  $I$ ,  $V_R$ ,  $V_L$  et  $V_C$ . Utiliser les vecteurs de phase.
- Calculer le facteur de puissance totale.
- Calculer la puissance moyenne fournie au circuit.
- Tracer le diagramme de phase.
- Faire la somme des vecteurs de phase  $V_R$ ,  $V_L$  et  $V_C$  et démontrer qu'elle est égale à la tension d'entrée  $E$ .
- Déterminer  $V_R$  et  $V_C$  à l'aide de la règle du diviseur de tension.

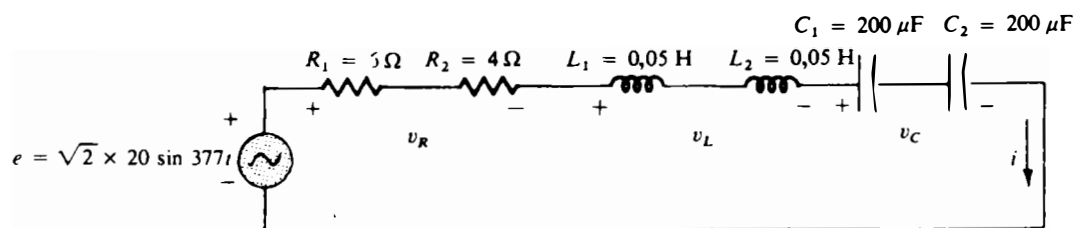


FIG. 15.41

*Solution:*

- Par combinaison des éléments communs et par détermination de la réactance de la bobine et du condensateur, on a:

$$R_T = 6 + 4 = 10 \Omega$$

$$L_T = 0,05 + 0,05 = 0,1 \text{ H}$$

$$C_T = \frac{200}{2} = 100 \mu\text{F}$$

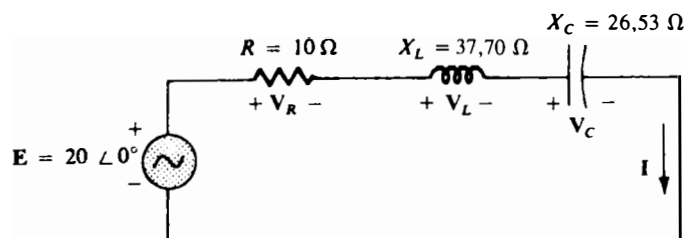


FIG. 15.42

$$X_L = \omega L = (377)(0,1) = 37,70 \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{(377)(100 \times 10^{-6})} = \frac{10^6}{37\,700} = 26,53 \Omega$$

La figure 15.42 représente le circuit redessiné, avec la tension de la source écrite en vecteurs de phase.



Pour ce circuit, on a:

$$\begin{aligned} Z_T &= R \angle 0^\circ + X_L \angle 90^\circ + X_C \angle -90^\circ \\ &= 10 + j37,70 - j26,53 \\ &= 10 + j11,17 = 15 \angle 48,16^\circ \end{aligned}$$

Le courant  $I$  est:

$$I = \frac{E}{Z_T} = \frac{20 \angle 0^\circ}{15 \angle 48,16^\circ} = 1,33 \angle -48,16^\circ$$

La tension aux bornes de la résistance, de la bobine et du condensateur se détermine au moyen de la loi d'Ohm:

$$\begin{aligned} V_R &= IR = (1,33 \angle -48,16^\circ)(10 \angle 0^\circ) \\ &= 13,30 \angle -48,16^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_L &= IX_L = (1,33 \angle -48,16^\circ)(37,70 \angle 90^\circ) \\ &= 50,14 \angle 41,84^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_C &= IX_C = (1,33 \angle -48,16^\circ)(26,53 \angle -90^\circ) \\ &= 35,28 \angle -138,16^\circ \end{aligned}$$

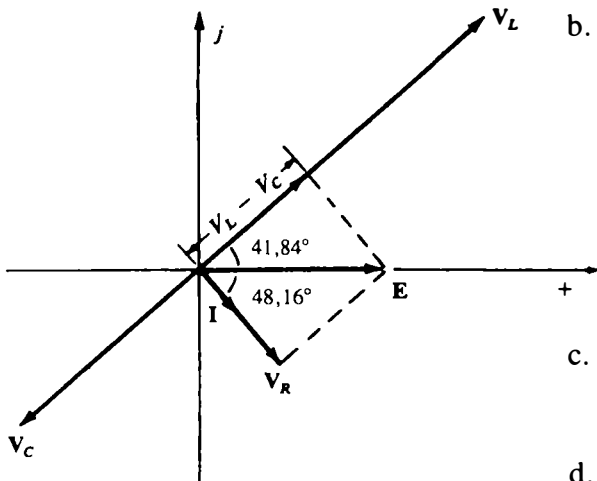


FIG. 15.43

b. Le facteur de puissance total est le cosinus de l'angle ( $48,3^\circ$ ) entre la tension appliquée  $E$  et le courant résultant  $I$ :

$$F_p = \cos \theta = \cos 48,16^\circ = 0,667 \text{ (inductif)}$$

ou:

$$F_p = \cos \theta = \frac{R}{Z_T} = \frac{10}{15} = 0,667 \text{ (inductif)}$$

c. La puissance totale en watts fournie au circuit est:

$$P_T = EI \cos \theta = (20)(1,33)(0,667) = 17,74 \text{ W}$$

d. La figure 15.43 illustre le diagramme de phase.

e. La somme vectorielle de  $V_R$ ,  $V_L$  et  $V_C$  est:

$$\begin{aligned} E &= V_R + V_L + V_C \\ &= 13,30 \angle -48,16^\circ + 50,14 \angle 41,84^\circ + \\ &\quad 35,28 \angle -138,16^\circ \end{aligned}$$

$$E = 13,30 \angle -48,16^\circ + 14,86 \angle 41,84^\circ$$

Par conséquent:

$$E = \sqrt{(13,30)^2 + (14,86)^2}$$

$$E = 20 \text{ and } \theta_E = 0^\circ \text{ (du diagramme de phase)}$$

de sorte que:

$$E = 20 \angle 0^\circ$$

$$f. V_R = \frac{RE}{Z_T} = \frac{(10 \angle 0^\circ)(20 \angle 0^\circ)}{15 \angle 48,16^\circ} = \frac{200 \angle 0^\circ}{15 \angle 48,16^\circ}$$

$$= 13,3 \angle -48,16^\circ$$

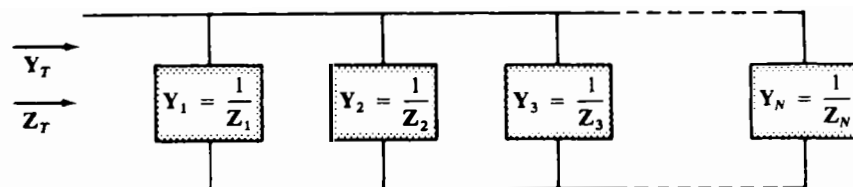
$$V_C = \frac{X_C E}{Z_T} = \frac{(26,5 \angle -90^\circ)(20 \angle 0^\circ)}{15 \angle 48,16^\circ} = \frac{530 \angle -90^\circ}{15 \angle 48,16^\circ} \\ = 35,28 \angle -138,16^\circ$$

## CIRCUITS PARALLÈLES À COURANT ALTERNATIF

### 15.5 ADMITTANCE ET SUSCEPTANCE

L'étude des circuits parallèles à courant alternatif sera extrêmement semblable à celle des circuits à courant continu. Dans ces derniers, la *conductance* ( $G$ ) a été définie comme étant l'inverse de la résistance ( $1/R$ ). Nous avons alors déterminé la conductance totale d'un circuit parallèle en additionnant la conductance de chacune des branches du circuit. La résistance totale  $R_T$  était simplement l'inverse de la conductance totale ( $1/G_T$ ).

Dans les circuits à courant alternatif, nous définissons l'*admittance* ( $Y$ ) comme l'inverse de l'impédance ( $1/Z$ ); elle se mesure en siemens. L'admittance est une mesure de la *facilité* avec laquelle un circuit laisse passer un courant. Nous pouvons aussi trouver l'admittance totale d'un circuit en prenant la somme des admittances des branches en parallèle. L'impédance totale  $Z_T$  du circuit est alors  $1/Y_T$ . Dans le cas du réseau illustré à la figure 15.44, nous avons donc:



$$Y_T = Y_1 + Y_2 + Y_3 + \cdots + Y_N \quad (15.10)$$

FIG. 15.44

ou encore, puisque  $Z = 1/Y$ :

$$\frac{1}{Z_T} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \cdots + \frac{1}{Z_N} \quad (15.11)$$

Dans le cas de deux branches en parallèle, nous avons:

$$\frac{1}{Z_T} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$$

En répétant les manipulations faites au chapitre 5 pour déterminer la résistance totale de deux résistances en parallèle, nous obtenons une équation semblable:

$$Z_T = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (15.12)$$

Dans le cas de trois branches en parallèle, nous avons:

$$Z_T = \frac{Z_1 Z_2 Z_3}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3} \quad (15.13)$$

Par ailleurs, comme nous l'avons souligné dans l'introduction de la présente section, la conductance est l'inverse de la résistance; nous avons donc:

$$Y = \frac{1}{R} = \frac{1}{R \angle 0^\circ} = G \angle 0^\circ$$

de sorte que:

$$G = G \angle 0^\circ \quad (15.14)$$

L'inverse de la réactance ( $1/X$ ) est appelé *susceptance*. La susceptance se mesure en siemens; son symbole littéral est la lettre majuscule  $B$ .

Dans le cas de la bobine, nous avons:

$$Y = \frac{1}{X_L} = \frac{1}{X_L \angle 90^\circ} = \frac{1}{\omega L \angle 90^\circ} = \frac{1}{\omega L} \angle -90^\circ$$

En définissant:

$$B_L = \frac{1}{X_L} \quad (\text{siemens, S}) \quad (15.15)$$

nous obtenons:

$$B_L = B_L \angle -90^\circ \quad (15.16)$$

Notons qu'une augmentation de la fréquence ou de l'inductance entraîne une diminution de la susceptance ou, par le fait même, de l'admittance.

Dans le cas du condensateur, nous avons:

$$Y = \frac{1}{X_C} = \frac{1}{X_C \angle -90^\circ} = \frac{1}{1/\omega C \angle -90^\circ} = \omega C \angle 90^\circ$$

En définissant:

$$B_C = \frac{1}{X_C} \quad (\text{siemens, S}) \quad (15.17)$$

nous obtenons:

$$B_C = B_C \angle 90^\circ \quad (15.18)$$

Par conséquent, une augmentation de la fréquence ou de la capacité entraîne une augmentation de la susceptance du condensateur.

En résumé, nous avons dans le cas des circuits parallèles:

Résistance:

$$Y = \frac{1}{R} = G = G \angle 0^\circ = G + j0 \quad (15.19)$$

Bobine:

$$Y = \frac{1}{X_L} = B_L = B_L \angle -90^\circ = 0 - jB_L \quad (15.20)$$

Condensateur:

$$Y = \frac{1}{X_C} = B_C = B_C \angle 90^\circ = 0 + jB_C \quad (15.21)$$

Dans les circuits parallèles à courant alternatif, c'est le *diagramme d'admittance* qu'on utilise, les trois admittances étant représentées à la figure 15.45.

Notons, à la figure, que la conductance (tout comme la résistance) coïncide avec l'axe réel positif, tandis que les susceptances inductive et capacitive sont de sens opposés sur l'axe imaginaire.

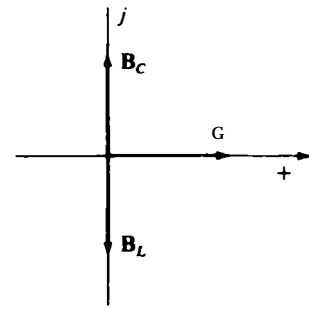


FIG. 15.45

**EXEMPLE 15.12** Voir le réseau illustré à la figure 15.46.

- Déterminer l'admittance de chacune des branches parallèles.
- Déterminer l'admittance d'entrée.
- Calculer l'impédance d'entrée.
- Tracer le diagramme d'admittance.

*Solution:*

$$\begin{aligned} \text{a. } Y_1 = G &= G \angle 0^\circ = \frac{1}{R} \angle 0^\circ = \frac{1}{20} \angle 0^\circ \\ &= 0,05 \angle 0^\circ = 0,05 + j0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_2 = B_L &= B_L \angle -90^\circ = \frac{1}{X_L} \angle -90^\circ = \frac{1}{10} \angle -90^\circ \\ &= 0,1 \angle -90^\circ = 0 - j0,1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } Y_T = Y_1 + Y_2 &= (0,05 + j0) + (0 - j0,1) \\ &= 0,05 - j0,1 = G - jB_L \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } Z_T = \frac{1}{Y_T} &= \frac{1}{0,05 - j0,1} = \frac{1}{0,112 \angle -63,43^\circ} \\ &= 8,93 \angle 63,43^\circ \end{aligned}$$

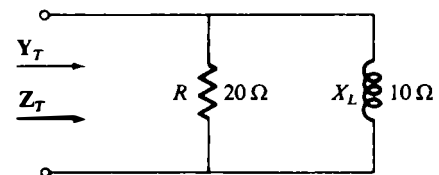


FIG. 15.46

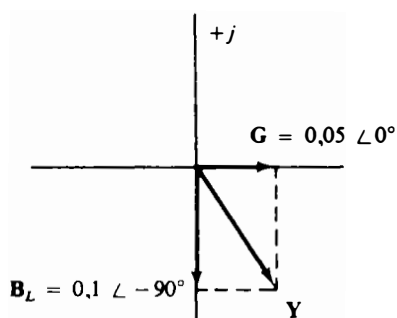


FIG. 15.47

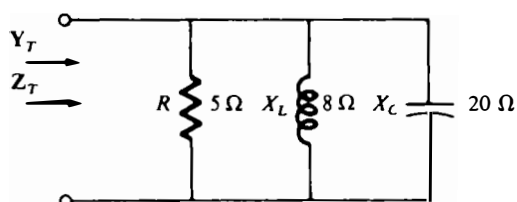


FIG. 15.48

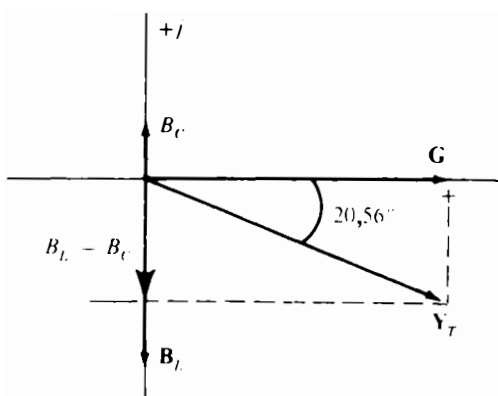


FIG. 15.49

ou, de l'équation (15.12):

$$\begin{aligned} Z_T &= \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{(20 \angle 0^\circ)(10 \angle 90^\circ)}{20 + j10} \\ &= \frac{200 \angle 90^\circ}{22,36 \angle 26,57^\circ} = 8,93 \angle 63,43^\circ \end{aligned}$$

d. La figure 15.47 illustre le diagramme d'admittance.

**EXEMPLE 15.13** Reprendre l'exemple 15.12 dans le cas du réseau parallèle illustré à la figure 15.48.

*Solution:*

$$\begin{aligned} \text{a. } Y_1 &= G = G \angle 0^\circ = \frac{1}{R} \angle 0^\circ = \frac{1}{5} \angle 0^\circ \\ &= 0,2 \angle 0^\circ = 0,2 + j0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_2 &= B_L = B_L \angle -90^\circ = \frac{1}{X_L} \angle -90^\circ = \frac{1}{8} \angle -90^\circ \\ &= 0,125 \angle -90^\circ = 0 - j0,125 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_3 &= B_C = B_C \angle 90^\circ = \frac{1}{X_C} \angle 90^\circ = \frac{1}{20} \angle 90^\circ \\ &= 0,050 \angle +90^\circ = 0 + j0,050 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } Y_T &= Y_1 + Y_2 + Y_3 \\ &= (0,2 + j0) + (0 - j0,125) + (0 + j0,050) \\ &= 0,2 - j0,075 = 0,2136 \angle -20,56^\circ \end{aligned}$$

$$\text{c. } Z_T = \frac{1}{0,2136 \angle -20,56^\circ} = 4,68 \angle 20,56^\circ$$

ou encore:

$$\begin{aligned} Z_T &= \frac{Z_1 Z_2 Z_3}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3} \\ &= \frac{(5 \angle 0^\circ)(8 \angle 90^\circ)(20 \angle -90^\circ)}{(5 \angle 0^\circ)(8 \angle 90^\circ) + (8 \angle 90^\circ)(20 \angle -90^\circ) + (5 \angle 0^\circ)(20 \angle -90^\circ)} \\ &= \frac{800 \angle 0^\circ}{40 \angle 90^\circ + 160 \angle 0^\circ + 100 \angle -90^\circ} \\ &= \frac{800}{160 + j40 - j100} = \frac{800}{160 - j60} \\ &= \frac{800}{170,88 \angle -20,56^\circ} \\ &= 4,68 \angle 20,56^\circ \end{aligned}$$

d. La figure 15.49 illustre le diagramme d'admittance.

Très souvent, l'application de la relation inverse  $Y_T = 1/Z_T$  ou encore  $Z_T = 1/Y_T$  fera que nous aurons à diviser le nombre 1

par un nombre complexe possédant une partie réelle et une partie imaginaire. Cette division, si elle n'est pas faite dans la forme polaire, donne un quotient qu'on peut simplifier en multipliant son numérateur et son dénominateur par le conjugué du dénominateur:

$$Y_T = \frac{1}{Z_T} = \frac{1}{4 + j6} = \frac{1}{4 + j6} \frac{(4 - j6)}{(4 - j6)} = \frac{4 - j6}{4^2 + 6^2}$$

et:

$$Y_T = \frac{4}{52} - j \frac{6}{52}$$

Pour ne pas avoir à faire ce calcul laborieux chaque fois qu'il nous faudra trouver l'inverse d'un nombre complexe écrit sous forme rectangulaire, élaborons une formule généralisée qui nous servira pour calculer l'impédance ou l'admittance dans les premier et quatrième quadrants. Cette formule est:

$$\frac{1}{a_1 \pm jb_1} = \left( \frac{1}{a_1 \pm jb_1} \right) \left( \frac{a_1 \mp jb_1}{a_1 \mp jb_1} \right) = \frac{a_1 \mp jb_1}{a_1^2 + b_1^2}$$

ou encore:

$$\boxed{\frac{1}{a_1 \pm jb_1} = \frac{a_1}{a_1^2 + b_1^2} \mp j \frac{b_1}{a_1^2 + b_1^2}} \quad (15.22)$$

Notons que le dénominateur est simplement la somme des carrés de chacune des parties du nombre complexe. Le signe à placer entre les parties réelle et imaginaire du membre droit de l'équation est l'opposé du signe entre les parties réelle et imaginaire du nombre complexe original. Quelques exemples permettront de nous familiariser avec cette équation.

**EXEMPLE 15.14** Calculer l'admittance de chacun des circuits série illustrés à la figure 15.50.

*Solution:*

a.  $Z = 6 - j8$

$$Y = \frac{1}{6 - j8} = \frac{6}{6^2 + 8^2} + j \frac{8}{6^2 + 8^2} = \frac{6}{100} + j \frac{8}{100}$$

b.  $Z = 10 + j4 + (-j0,1) = 10 + j3,9$

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{10 + j3,9} = \frac{10}{10^2 + 3,9^2} - j \frac{3,9}{10^2 + 3,9^2}$$

$$= \frac{10}{115,21} - j \frac{3,9}{115,21} = 0,087 - j0,034$$

Pour savoir si un circuit est surtout capacitif ou surtout inductif, il nous suffit de regarder le signe affectant la partie imaginaire de l'admittance. S'il est négatif, le circuit est surtout inductif et s'il est positif, le circuit est surtout capacitif.

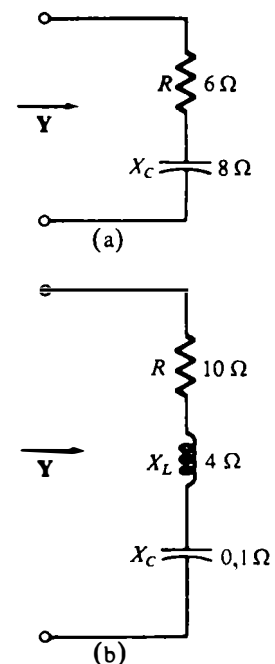


FIG. 15.50

### 15.6 RÉSEAUX PARALLÈLES R-L, R-C ET R-L-C À COURANT ALTERNATIF

R-L (figure 15.51)

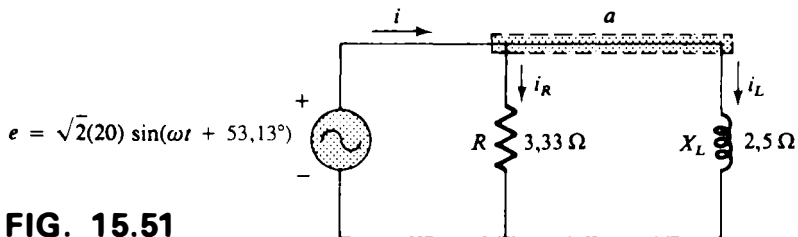


FIG. 15.51

Vecteurs de phase (figure 15.52):

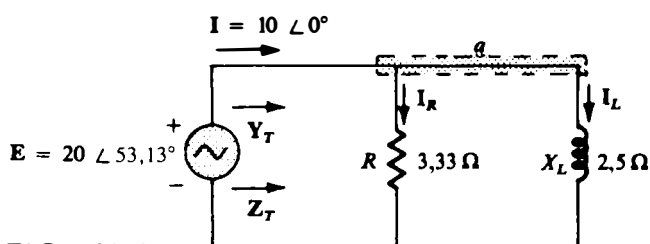


FIG. 15.52

$Y_T(Z_T)$ :

$$Y_T = Y_1 + Y_2 = G + B_L = \frac{1}{3,33} \angle 0^\circ + \frac{1}{2,5} \angle -90^\circ$$

$$= 0,3 \angle 0^\circ + 0,4 \angle -90^\circ = 0,3 - j0,4$$

$$= 0,5 \angle -53,13^\circ$$

$$Z_T = \frac{1}{Y_T} = \frac{1}{0,5 \angle -53,13^\circ} = 2 \angle 53,13^\circ$$

Diagramme d'admittance (voir la figure 15.53):

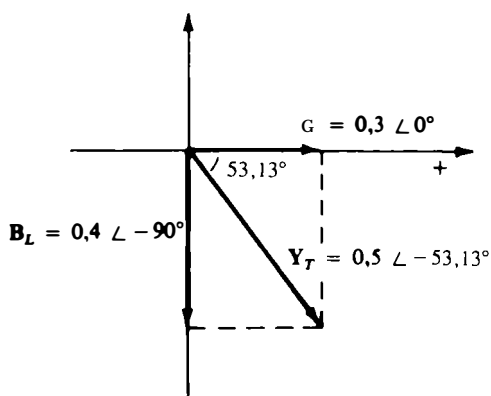


FIG. 15.53

I:

$$I = \frac{E}{Z_T} = EY_T = (20 \angle 53,13^\circ)(0,5 \angle -53,13^\circ) = 10 \angle 0^\circ$$

$I_R, I_L$ :

$$I_R = \frac{E}{R} = EG = (20 \angle 53,13^\circ)(0,3 \angle 0^\circ) = 6 \angle 53,13^\circ$$

$$I_L = \frac{E}{X_L} = EB_L = (20 \angle 53,13^\circ)(0,4 \angle -90^\circ)$$

$$= 8 \angle -36,87^\circ$$

La loi des courants de Kirchhoff: Au point a:

$$I - I_R - I_L = 0$$

ou encore:

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \mathbf{I}_R + \mathbf{I}_L \\ 10 \angle 0^\circ &= 6 \angle 53,13^\circ + 8 \angle -36,87^\circ \\ 10 \angle 0^\circ &= (3,60 + j4,80) + (6,40 - j4,80) = 10 + j0 \end{aligned}$$

de sorte que:

$$10 \angle 0^\circ = 10 \angle 0^\circ \quad (\text{résultat confirmé})$$

*Diagramme de phase:* Le diagramme de phase illustré à la figure 15.54 indique que la tension appliquée  $\mathbf{E}$  est en phase avec le courant  $\mathbf{I}_R$  et qu'elle est en avance de  $90^\circ$  sur le courant  $\mathbf{I}_L$ .

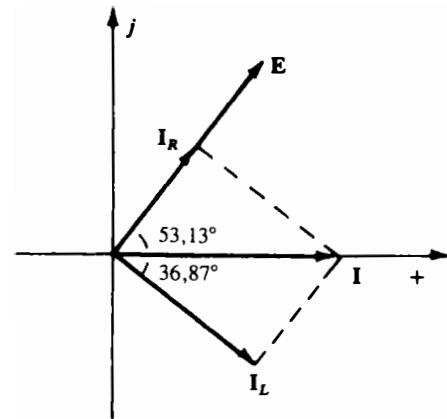


FIG. 15.54

*Puissance:* La puissance totale en watts fournie au circuit est:

$$\begin{aligned} P_T &= EI \cos \theta_T \\ &= (20)(10) \cos 53,13^\circ = (220)(0,6) \\ &= \mathbf{120 \text{ W}} \end{aligned}$$

ou encore:

$$P_T = I^2 R = \frac{V_R^2}{R} = V_R^2 G = (20^2)(0,3) = \mathbf{120 \text{ W}}$$

et, enfin:

$$\begin{aligned} P_T &= P_R + P_L = EI_R \cos \theta_R + EI_L \cos \theta_L \\ &= (20)(6) \cos 0^\circ + (20)(8) \cos 90^\circ = 120 + 0 \\ &= \mathbf{120 \text{ W}} \end{aligned}$$

*Facteur de puissance:* Le facteur de puissance du circuit est:

$$F_p = \cos \theta = \cos 53,13^\circ = \mathbf{0,6 \text{ (inductif)}}$$

On peut parvenir au même résultat en adoptant une analyse semblable à celle adoptée pour le circuit série à courant alternatif. Cela donne:

$$\cos \theta = \frac{P}{EI} = \frac{E^2/R}{EI} = \frac{EG}{I} = \frac{G}{I/V} = \frac{G}{Y_T}$$

et:

$$\boxed{F_p = \cos \theta = \frac{G}{Y_T}} \quad (15.23)$$

où  $G$  et  $Y_T$  sont les grandeurs de la conductance totale et de l'admittance totale du réseau parallèle. Dans notre cas particulier:

$$F_p = \cos \theta = \frac{0,3}{0,5} = \mathbf{0,6 \text{ (inductif)}}$$

*Méthode de l'impédance:* On peut aussi déterminer le courant  $\mathbf{I}$  en calculant d'abord l'impédance totale du réseau. On a ainsi:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_T &= \frac{\mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} = \frac{(3,33 \angle 0^\circ)(2,5 \angle 90^\circ)}{3,33 \angle 0^\circ + 2,5 \angle 90^\circ} \\ &= \frac{8,325 \angle 90^\circ}{4,164 \angle 36,87^\circ} = \mathbf{2 \angle 53,13^\circ} \end{aligned}$$



La loi d'Ohm donne ensuite:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_T} = \frac{20 \angle 53,13^\circ}{2 \angle 53,13^\circ} = 10 \angle 0^\circ$$

**R-C** (figure 15.55)

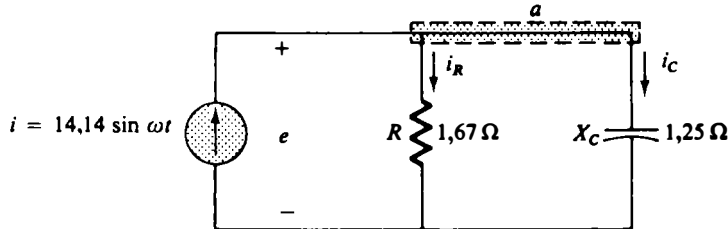


FIG. 15.55

Vecteurs de phase (figure 15.56):

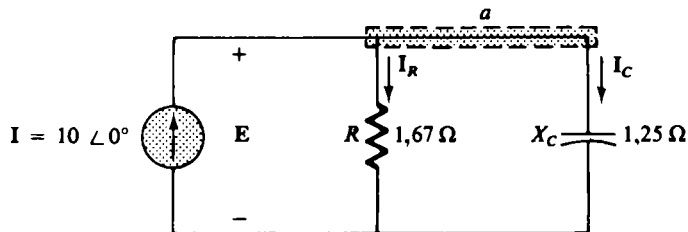


FIG. 15.56

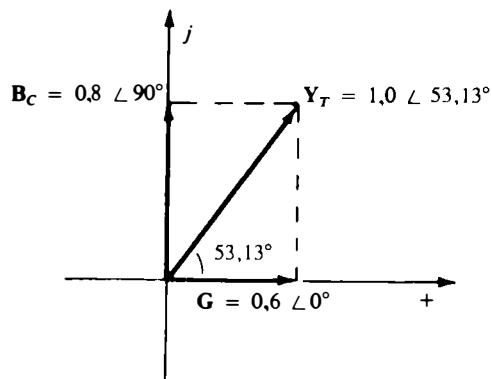


FIG. 15.57

$\mathbf{Y}_T(\mathbf{Z}_T)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_T &= \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 = \mathbf{G} + \mathbf{B}_C = \frac{1}{1,67} \angle 0^\circ + \frac{1}{1,25} \angle 90^\circ \\ &= 0,6 \angle 0^\circ + 0,8 \angle 90^\circ = 0,6 + j0,8 = 1,0 \angle 53,13^\circ \end{aligned}$$

$$\mathbf{Z}_T = \frac{1}{\mathbf{Y}_T} = \frac{1}{1,0 \angle 53,13^\circ} = 1 \angle -53,13^\circ$$

Diagramme d'admittance (voir la figure 15.57):

**E:**

$$\mathbf{E} = \mathbf{I} \mathbf{Z}_T = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{Y}_T} = \frac{10 \angle 0^\circ}{1 \angle 53,13^\circ} = 10 \angle -53,13^\circ$$

$\mathbf{I}_R, \mathbf{I}_C$ :

$$\mathbf{I}_R = \mathbf{E} \mathbf{G} = (10 \angle -53,13^\circ)(0,6 \angle 0^\circ) = 6 \angle -53,13^\circ$$

$$\mathbf{I}_C = \mathbf{E} \mathbf{B}_C = (10 \angle -53,13^\circ)(0,8 \angle 90^\circ) = 8 \angle 36,87^\circ$$

Loi des courants de Kirchhoff: Au point a:

$$\mathbf{I} - \mathbf{I}_R - \mathbf{I}_C = 0$$

ou:

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_R + \mathbf{I}_C$$

résultat qui peut être confirmé (comme dans le cas du réseau R-L) par addition des vecteurs.

**Diagramme de phase:** Le diagramme de phase illustré à la figure 15.58 indique que la tension  $\mathbf{E}$  est en phase avec le courant  $\mathbf{I}_R$  passant dans la résistance et qu'elle est en retard de  $90^\circ$  sur le courant capacitif  $\mathbf{I}_C$ .

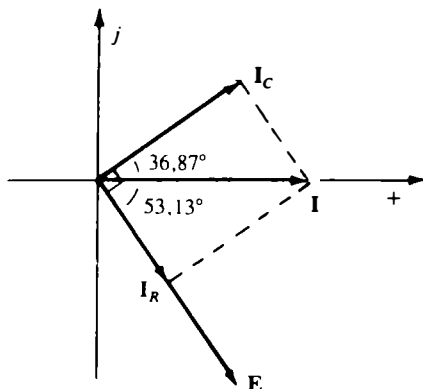


FIG. 15.58

Forme analytique: Nous avons:

$$e = \sqrt{2}(10) \sin(\omega t - 53,13^\circ) = 14,14 \sin(\omega t - 53,13^\circ)$$

$$i_R = \sqrt{2}(6) \sin(\omega t - 53,13^\circ) = 8,48 \sin(\omega t - 53,13^\circ)$$

$$i_C = \sqrt{2}(8) \sin(\omega t + 36,87^\circ) = 11,31 \sin(\omega t + 36,87^\circ)$$

La figure 15.59 représente les formes d'onde de tous les courants et de la tension. Remarquons que  $e$  et  $i_R$  sont en phase et que  $e$  est en retard de  $90^\circ$  sur  $i_C$ .

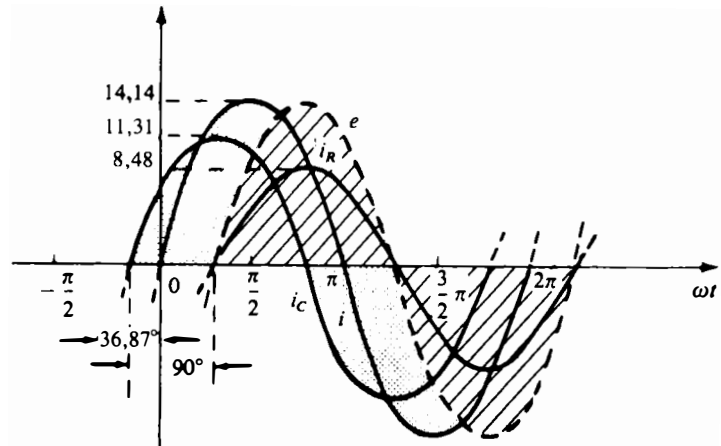


FIG. 15.59

Puissance:

$$P_T = EI \cos \theta = (10)(10) \cos 53,13^\circ = (10^2)(0,6) = 60 \text{ W}$$

ou:

$$P_T = E^2(G) = (10^2)(0,6) = 60 \text{ W}$$

et, enfin:

$$\begin{aligned} P_T &= P_R + P_C = EI_R \cos \theta_R + EI_C \cos \theta_C \\ &= (10)(6) \cos 0^\circ + (10)(8) \cos 90^\circ \\ &= 60 \text{ W} \end{aligned}$$

Facteur de puissance: Le facteur de puissance du circuit est:

$$F_p = \cos 53,13^\circ = 0,6 \text{ (capacitif)}$$

L'équation (15.23) donne par ailleurs:

$$F_p = \cos \theta = \frac{G}{Y_T} = \frac{0,6}{1,0} = 0,6 \text{ (capacitif)}$$

Méthode de l'impédance: On peut également déterminer la tension  $E$  en trouvant d'abord l'impédance totale du circuit. Cela donne:

$$\begin{aligned} Z_T &= \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{(1,67 \angle 0^\circ)(1,25 \angle -90^\circ)}{1,67 \angle 0^\circ + 1,25 \angle -90^\circ} \\ &= \frac{2,09 \angle -90^\circ}{2,09 \angle -36,87^\circ} = 1 \angle -53,13^\circ \end{aligned}$$

La loi d'Ohm donne ensuite:

$$E = IZ_T = (10 \angle 0^\circ)(1 \angle -53,13^\circ) = 10 \angle -53,13^\circ$$

**R-L-C** (figure 15.60)

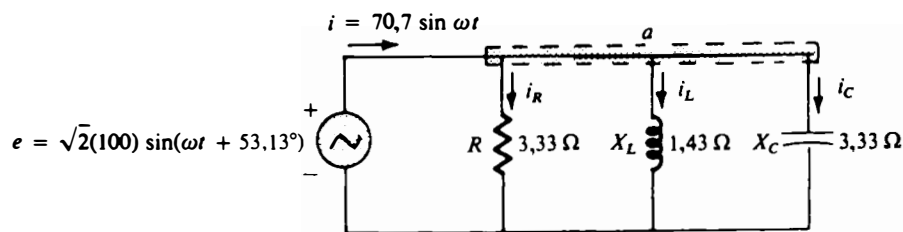


FIG. 15.60

Vecteurs de phase (figure 15.61):

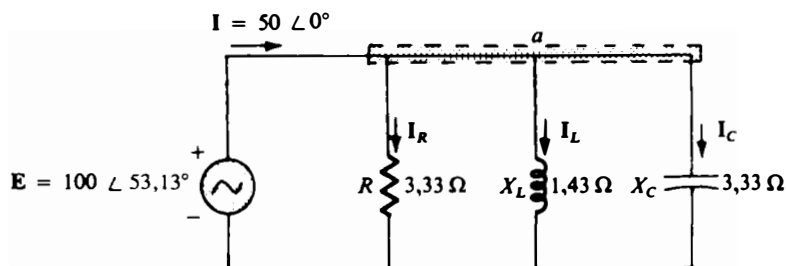


FIG. 15.61

$Y_T(Z_T)$ :

$$\begin{aligned}
 Y_T &= Y_1 + Y_2 + Y_3 = G + B_L + B_C \\
 &= \frac{1}{3,33} \angle 0^\circ + \frac{1}{1,43} \angle -90^\circ + \frac{1}{3,33} \angle 90^\circ \\
 &= 0,3 \angle 0^\circ + 0,7 \angle -90^\circ + 0,3 \angle 90^\circ \\
 &= 0,3 - j0,7 + j0,3 \\
 Y_T &= 0,3 - j0,4 = 0,5 \angle -53,13^\circ \\
 Z_T &= \frac{1}{Y_T} = \frac{1}{0,5 \angle -53,13^\circ} = 2 \angle 53,13^\circ
 \end{aligned}$$

Diagramme d'admittance (voir la figure 15.62):

I:

$$I = \frac{E}{Z_T} = EY_T = (100 \angle 53,13^\circ)(0,5 \angle -53,13^\circ) = 50 \angle 0^\circ$$

$I_R, I_L, I_C$ :

$$I_R = EG = (100 \angle 53,13^\circ)(0,3 \angle 0^\circ) = 30 \angle 53,13^\circ$$

$$I_L = EB_L = (100 \angle 53,13^\circ)(0,7 \angle -90^\circ) = 70 \angle -36,87^\circ$$

$$I_C = EB_C = (100 \angle 53,13^\circ)(0,3 \angle +90^\circ) = 30 \angle 143,13^\circ$$

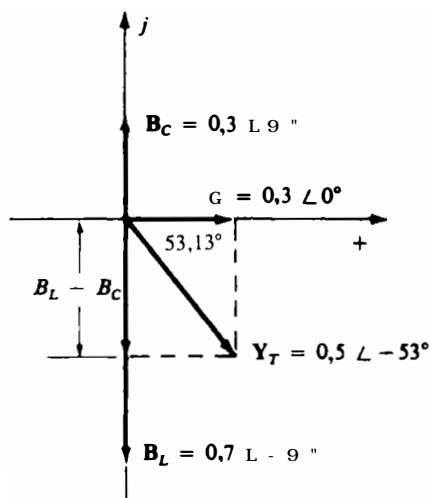
Loi des courants de Kirchhoff: Au point a:

$$I - I_R - I_L - I_C = 0$$

ou:

$$I = I_R + I_L + I_C$$

FIG. 15.62



*Diagramme de phase:* Le diagramme de phase illustré à la figure 15.63 indique que la tension appliquée  $E$  est en phase avec le courant  $I_R$  passant dans la résistance, qu'elle est en avance de  $90^\circ$  sur le courant  $I_L$  traversant la bobine et qu'elle est en retard de  $90^\circ$  sur le courant  $I_C$  passant dans le condensateur.

*Forme analytique:* On a:

$$i = \sqrt{2}(50) \sin \omega t = 70,70 \sin \omega t$$

$$i_R = \sqrt{2}(30) \sin(\omega t + 53,13^\circ) = 42,42 \sin(\omega t + 53,13^\circ)$$

$$i_L = \sqrt{2}(70) \sin(\omega t - 36,87^\circ) = 98,98 \sin(\omega t - 36,87^\circ)$$

$$i_C = \sqrt{2}(30) \sin(\omega t + 143,13^\circ) = 42,42 \sin(\omega t + 143,13^\circ)$$

La figure 15.64 illustre les formes d'onde de tous les courants et de la tension appliquée.

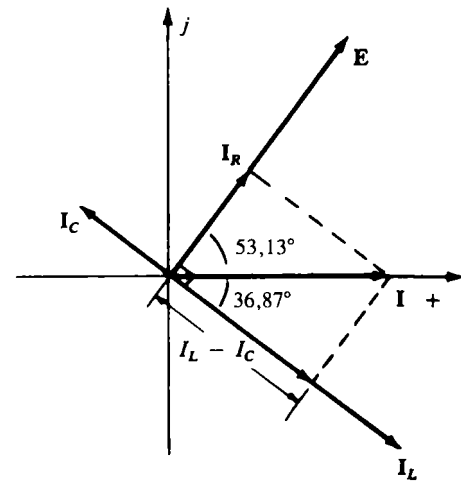


FIG. 15.63

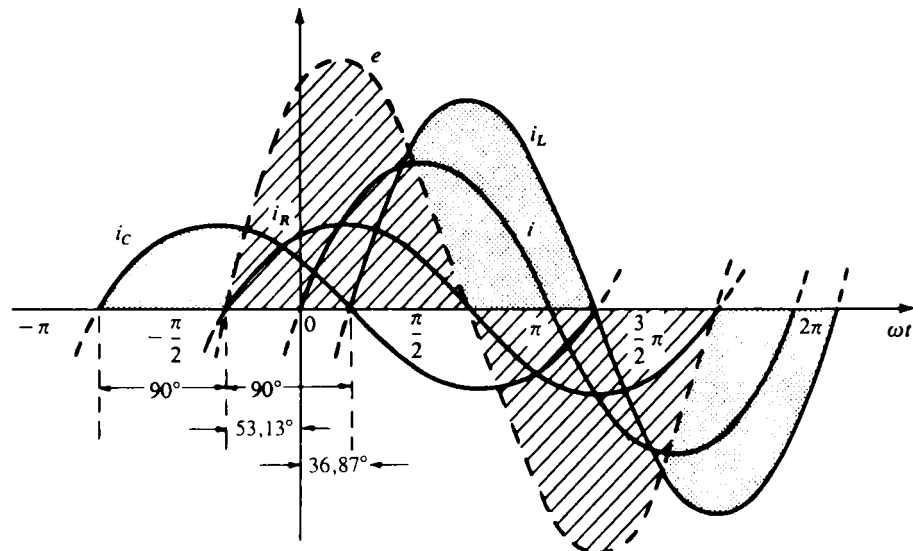


FIG. 15.64

*Puissance:* La puissance totale en watts fournie au circuit est:

$$P_T = EI \cos \theta = (100)(50) \cos 53,13^\circ = (5000)(0,6)$$

$$= 3000 \text{ W}$$

ou:

$$P_T = E^2 G = (100^2)(0,3) = 3000 \text{ W}$$

et, enfin:

$$P_T = P_R + P_L + P_C$$

$$= EI_R \cos \theta_R + EI_L \cos \theta_L + EI_C \cos \theta_C$$

$$= (100)(30) \cos 0^\circ + (100)(70) \cos 90^\circ$$

$$+ (100)(30) \cos 90^\circ$$

$$= 3000 + 0 + 0$$

$$= 3000 \text{ W}$$

*Facteur de puissance:* Le facteur de puissance du circuit est:

$$F_p = \cos \theta_T = \cos 53,13^\circ = 0,6 \text{ (inductif)}$$

L'équation (15.23) donne par ailleurs:

$$F_p = \cos \theta_T = \frac{G}{Y_T} = \frac{0,3}{0,5} = 0,6 \text{ (inductif)}$$

*Méthode de l'impédance:* On peut également déterminer le courant d'entrée  $I$  en trouvant d'abord l'impédance totale de la façon suivante:

$$Z_T = \frac{Z_1 Z_2 Z_3}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3} = 2 \angle 53,13^\circ$$

La loi d'Ohm donne ensuite:

$$I = \frac{E}{Z_T} = \frac{100 \angle 53,13^\circ}{2 \angle 53,13^\circ} = 50 \angle 0^\circ$$

## 15.7 RÈGLE DU DIVISEUR DE COURANT

La forme fondamentale de la règle du diviseur de courant pour les circuits à courant alternatif est exactement la même que celle pour les circuits à courant continu. Dans le cas de deux branches parallèles d'impédances  $Z_1$  et  $Z_2$  (figure 15.65), on a donc:

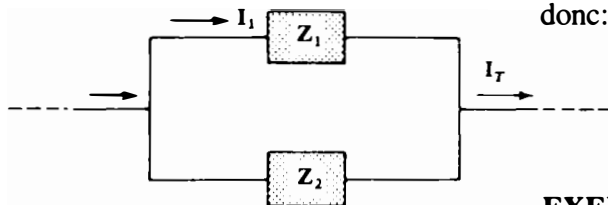


FIG. 15.65

$$I_1 = \frac{Z_2 I_T}{Z_1 + Z_2} \quad \text{ou} \quad I_2 = \frac{Z_1 I_T}{Z_1 + Z_2} \quad (15.24)$$

**EXEMPLE 15.15** À l'aide de la règle du diviseur de courant, déterminer le courant passant dans chacune des branches du circuit illustré à la figure 15.66.

*Solution:*

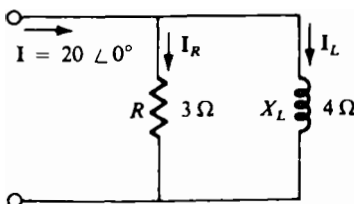


FIG. 15.66

$$I_R = \frac{X_L I_T}{R + X_L} = \frac{(4 \angle 90^\circ)(20 \angle 0^\circ)}{3 \angle 0^\circ + 4 \angle 90^\circ} = \frac{80 \angle 90^\circ}{5 \angle 53,13^\circ} = 16 \angle 36,87^\circ$$

$$I_L = \frac{R I_T}{R + X_L} = \frac{(3 \angle 0^\circ)(20 \angle 0^\circ)}{5 \angle 53,13^\circ} = \frac{60 \angle 0^\circ}{5 \angle 53,13^\circ} = 12 \angle -53,13^\circ$$

**EXEMPLE 15.16** À l'aide de la règle du diviseur de courant, déterminer le courant qui passe dans chacune des branches du circuit illustré à la figure 15.67.

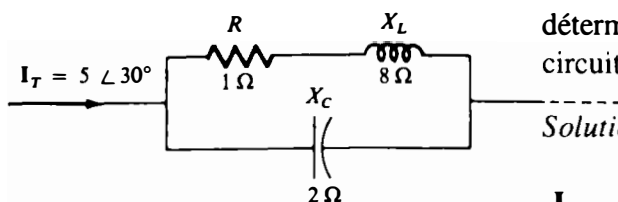
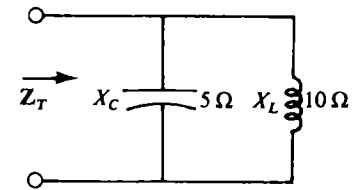


FIG. 15.67

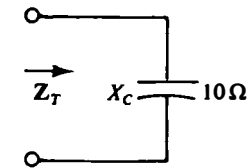
*Solution:*

$$I_{R-L} = \frac{X_C I_T}{X_C + Z_{R-L}} = \frac{(2 \angle -90^\circ)(5 \angle 30^\circ)}{-j2 + 1 + j8} = \frac{10 \angle -60^\circ}{1 + j6} = \frac{10 \angle -60^\circ}{6,083 \angle 80,54^\circ} \cong 1,644 \angle -140,54^\circ$$

$$\begin{aligned}
 I_C &= \frac{Z_{R-L} I_T}{Z_{R-L} + X_C} = \frac{(1 + j8)(5 \angle 30^\circ)}{6,08 \angle 80,54^\circ} \\
 &= \frac{(8,06 \angle 82,87^\circ)(5 \angle 30^\circ)}{6,08 \angle 80,54^\circ} = \frac{40,31 \angle 112,87^\circ}{6,083 \angle 80,54^\circ} \\
 &= 6,627 \angle 32,33^\circ
 \end{aligned}$$



(a)



(b)

FIG. 15.68

## 15.8 CIRCUITS ÉQUIVALENTS

Dans un circuit série à courant alternatif, l'impédance totale de plusieurs éléments montés en série est souvent équivalente à l'impédance totale d'un moins grand nombre d'éléments de valeurs différentes, ces éléments et ces valeurs étant déterminés par la fréquence de l'alimentation appliquée au circuit. Il en est de même dans un circuit parallèle. Prenons le circuit illustré à la figure 15.68a; nous avons:

$$\begin{aligned}
 Z_T &= \frac{X_C X_L}{X_C + X_L} = \frac{(5 \angle -90^\circ)(10 \angle 90^\circ)}{5 \angle -90^\circ + 10 \angle 90^\circ} = \frac{50 \angle 0^\circ}{5 \angle 90^\circ} \\
 &= 10 \angle -90^\circ
 \end{aligned}$$

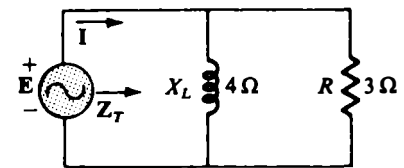
L'impédance totale à la fréquence de la tension appliquée est équivalente à celle d'un condensateur d'une réactance de 10 Ω, comme l'indique la figure 15.68a. Souvenons-nous toutefois que cette équivalence n'est vraie qu'à la fréquence de la tension appliquée. Si la fréquence est différente, la réactance de chacun des éléments l'est aussi et le circuit équivalent n'est plus le même. Dans l'exemple ci-dessus, il sera peut-être inductif.

De telles équivalences peuvent également s'établir en coordonnées rectangulaires. Ainsi, dans le circuit parallèle illustré à la figure 15.69a, nous avons:

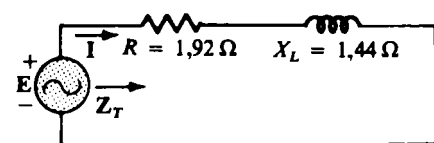
$$\begin{aligned}
 Z_T &= \frac{X_L R}{X_L + R} = \frac{(4 \angle 90^\circ)(3 \angle 0^\circ)}{4 \angle 90^\circ + 3 \angle 0^\circ} \\
 &= \frac{12 \angle 90^\circ}{5 \angle 53,13^\circ} = 2,40 \angle 36,87^\circ \\
 &= 1,920 + j1,440
 \end{aligned}$$

Cette impédance est celle d'un circuit série composé d'une résistance de 1,92 Ω et d'une réactance inductive de 1,44 Ω, comme l'illustre la figure 15.69b.

Le courant I est le même dans chacun des circuits illustrés aux figures 15.68 et 15.69, à la condition que la même tension d'entrée E soit appliquée à ces circuits. L'équivalent d'un circuit parallèle constitué d'un élément résistif et d'un élément réactif est un circuit série constitué également d'un élément résistif et d'un élément réactif. L'impédance de chacun des éléments du circuit série est différente de celle de chacun des



(a)



(b)

FIG. 15.69

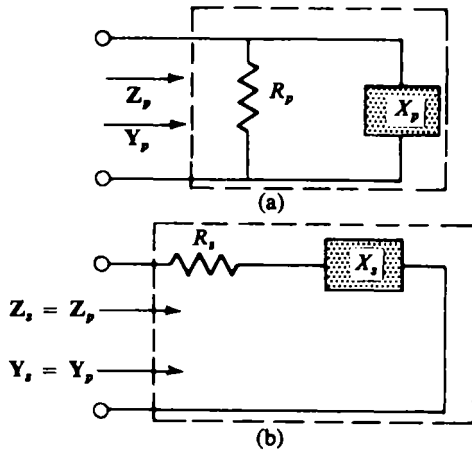


FIG. 15.70

éléments du circuit parallèle mais les éléments réactifs sont toujours de même type. Autrement dit, un circuit parallèle  $R$ - $L$  ou  $R$ - $C$  aura toujours pour équivalent un circuit série  $R$ - $L$  ou  $R$ - $C$ , respectivement. Les mêmes observations s'appliquent au circuit parallèle qui est l'équivalent d'un circuit série. Soulignons encore une fois que l'équivalence ne se fait pas entre les éléments des circuits. *Par circuits équivalents, il faut entendre que les circuits ont la même impédance et le même courant d'entrée, lorsque la tension qui leur est appliquée est la même.*

Le circuit série équivalent du montage en parallèle d'une résistance et d'une réactance est déterminé à l'aide du calcul de l'impédance totale sous forme rectangulaire du circuit parallèle. Ainsi, pour le circuit illustré à la figure 15.70a, on a:

$$Y_p = \frac{1}{R_p} + \frac{1}{\pm jX_p}$$

et:

$$\begin{aligned} Z_p &= \frac{1}{Y_p} = \frac{1}{(1/R_p) \mp j(1/X_p)} \\ &= \frac{1/R_p}{(1/R_p)^2 + (1/X_p)^2} \pm j \frac{(1/X_p)}{(1/R_p)^2 + (1/X_p)^2} \end{aligned}$$

Le produit du numérateur et du dénominateur de chaque terme et de  $R_p^2 X_p^2$  donne:

$$\begin{aligned} Z_p &= \frac{R_p X_p^2}{X_p^2 + R_p^2} \pm j \frac{R_p^2 X_p}{X_p^2 + R_p^2} \\ &= R_s \pm jX_s \quad (\text{figure 15.70b}) \end{aligned}$$

et:

$$R_s = \frac{R_p X_p^2}{X_p^2 + R_p^2} \quad (15.25)$$

$$X_s = \frac{R_p^2 X_p}{X_p^2 + R_p^2} \quad (15.26)$$

Dans le cas du réseau illustré à la figure 15.69, on a:

$$R_s = \frac{R_p X_p^2}{X_p^2 + R_p^2} = \frac{(3)(4)^2}{4^2 + 3^2} = \frac{48}{25} = 1,920 \, \Omega$$

et:

$$X_s = \frac{R_p^2 X_p}{X_p^2 + R_p^2} = \frac{(3)^2(4)}{25} = \frac{36}{25} = 1,440 \, \Omega$$

ce qui confirme le résultat précédent.

Le circuit parallèle équivalent au montage série d'une résistance et d'une réactance est déterminé à l'aide du calcul de

l'admittance totale sous forme rectangulaire du circuit série.  
Dans le cas du circuit illustré à la figure 15.70b, on a:

$$Z_s = R_s \pm jX_s$$

$$Y_s = \frac{1}{Z_s} = \frac{1}{R_s \pm jX_s} = \frac{R_s}{R_s^2 + X_s^2} \mp j \frac{X_s}{R_s^2 + X_s^2}$$

$$= G_p \mp jB_p = \frac{1}{R_p} \mp j \frac{1}{X_p} \quad (\text{figure 15.70a})$$

ou:

$$R_p = \frac{R_s^2 + X_s^2}{R_s} \quad (15.27)$$

$$X_p = \frac{R_s^2 + X_s^2}{X_s} \quad (15.28)$$

Dans l'exemple ci-dessus la résistance est donc:

$$R_p = \frac{R_s^2 + X_s^2}{R_s} = \frac{(1,92)^2 + (1,44)^2}{1,92} = \frac{5,76}{1,92} = 3,0 \Omega$$

et:

$$X_p = \frac{R_s^2 + X_s^2}{X_s} = \frac{5,76}{1,44} = 4,0 \Omega$$

comme l'illustre la figure 15.69a.

**EXEMPLE 15.17** Trouver le circuit série équivalent du réseau illustré à la figure 15.71.

*Solution:*

$$R_p = 8 \text{ k}\Omega, X_p \text{ (résultante)} = X_L - X_C = 9 \text{ k}\Omega - 4 \text{ k}\Omega = 5 \text{ k}\Omega$$

et:

$$R_s = \frac{R_p X_p^2}{X_p^2 + R_p^2} = \frac{(8 \text{ k}\Omega)(5 \text{ k}\Omega)^2}{(5 \text{ k}\Omega)^2 + (8 \text{ k}\Omega)^2} = \frac{200 \text{ k}\Omega}{89} = 2,247 \text{ k}\Omega$$

avec

$$X_s = \frac{R_p^2 X_p}{X_p^2 + R_p^2} = \frac{(8 \text{ k}\Omega)^2 5 \text{ k}\Omega}{89 \text{ k}\Omega} = \frac{320 \text{ k}\Omega}{89} = 3,596 \text{ k}\Omega \text{ (inductif)}$$

La figure 15.72 illustre le circuit série équivalent.

**EXEMPLE 15.18** Voir le réseau illustré à la figure 15.73.

- Calculer la tension  $E$  et les courants  $I_R$ ,  $I_L$  et  $I_C$ , en vecteurs de phase.
- Calculer le facteur de puissance total.
- Calculer la puissance totale fournie au réseau.
- Tracer le diagramme de phase.

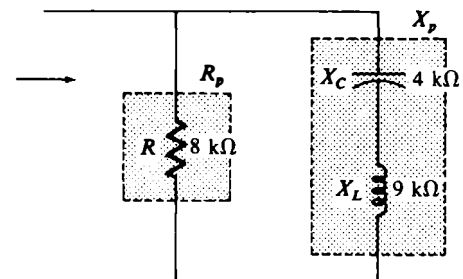


FIG. 15.71

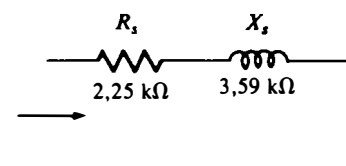


FIG. 15.72



- e. Faire la somme des vecteurs  $I_R$ ,  $I_L$  et  $I_C$ , et démontrer qu'elle est égale à  $I$ .
- f. Calculer l'impédance du montage parallèle de  $X_L$  et de  $X_C$ , et calculer ensuite  $I_R$  au moyen de la règle du diviseur de courant.
- g. Trouver le circuit série équivalent, sans tenir compte de l'impédance et du courant  $I$  des circuits.

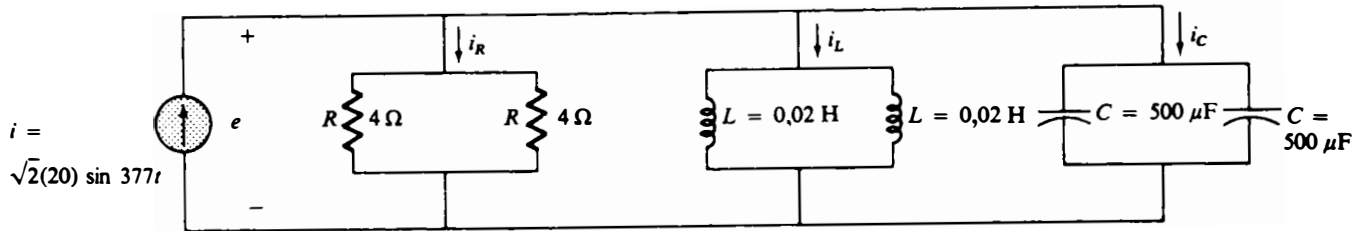


FIG. 15.73

Solution:

- a. La combinaison des éléments communs et la détermination de la réactance de la bobine et du condensateur donnent:

$$R_T = \frac{R}{2} = \frac{4}{2} = 2 \Omega$$

$$L_T = \frac{0,02}{2} = 0,01 \text{ H}$$

$$C_T = 500 \mu\text{F} + 500 \mu\text{F} = 1000 \mu\text{F}$$

$$X_L = \omega L = (377)(0,01) = 3,77 \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{(377)(10^3 \times 10^{-6})} = 2,65 \Omega$$

La figure 15.74 représente le circuit redessiné; le courant  $I$  est exprimé en vecteur de phase. L'admittance totale de ce circuit est:

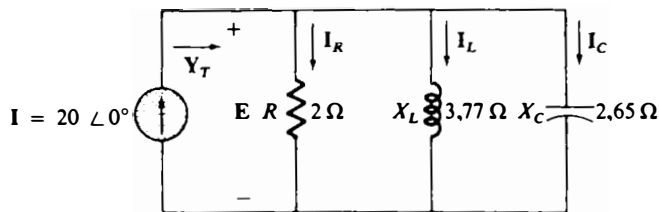


FIG. 15.74

$$Y_T = Y_1 + Y_2 + Y_3 = G + B_L + B_C$$

$$= \frac{1}{2} \angle 0^\circ + \frac{1}{3,77} \angle -90^\circ + \frac{1}{2,65} \angle +90^\circ$$

$$= 0,5 \angle 0^\circ + 0,265 \angle -90^\circ + 0,377 \angle +90^\circ$$

$$= 0,5 - j0,265 + j0,377$$

$$Y_T = 0,5 + j0,112 = \mathbf{0,512 \angle 12,63^\circ}$$

La tension d'entrée est:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{Y}_T} = \frac{20 \angle 0^\circ}{0,512 \angle 12,63^\circ} \\ &= 39,06 \angle -12,63^\circ \end{aligned}$$

La loi d'Ohm permet par ailleurs de déterminer le courant passant dans la résistance, dans la bobine et dans le condensateur:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_R &= \mathbf{E}\mathbf{G} = (39,06 \angle -12,63^\circ)(0,5 \angle 0^\circ) \\ &= 19,53 \angle -12,63^\circ \\ \mathbf{I}_L &= \mathbf{E}\mathbf{B}_L = (39,06 \angle -12,63^\circ)(0,265 \angle -90^\circ) \\ &= 10,35 \angle -102,63^\circ \\ \mathbf{I}_C &= \mathbf{E}\mathbf{B}_C = (39,06 \angle -12,63^\circ)(0,377 \angle +90^\circ) \\ &= 14,73 \angle +77,37^\circ \end{aligned}$$

b. Le facteur de puissance total est:

$$F_p = \cos \theta = \frac{G}{Y_T} = \frac{0,5}{0,512} = 0,977$$

c. La puissance totale en watts fournie au circuit est:

$$\begin{aligned} P_T &= I_R^2 R = E^2 G = (39,06)^2 (0,5) \\ &= 762,84 \text{ W} \end{aligned}$$

d. La figure 15.75 illustre le diagramme de phase.

e. La somme des trois vecteurs est:

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \mathbf{I}_R + \mathbf{I}_L + \mathbf{I}_C \\ &= 19,53 \angle -12,63^\circ + 10,35 \angle -102,63^\circ \\ &\quad + 14,73 \angle +77,37^\circ \\ \mathbf{I} &= 19,53 \angle -12,63^\circ + 4,38 \angle +77,37^\circ \\ I_T &= \sqrt{(19,53)^2 + (4,38)^2} = 20 \end{aligned}$$

et l'angle  $\theta_T$  (du diagramme de phase) est de  $0^\circ$ . Par conséquent:

$$\mathbf{I}_T = 20 \angle 0^\circ$$

ce qui est bien le courant débité par la source.

f. L'impédance du montage parallèle de  $\mathbf{X}_L$  et de  $\mathbf{X}_C$  est:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{T_1} &= \frac{\mathbf{X}_L \mathbf{X}_C}{\mathbf{X}_L + \mathbf{X}_C} = \frac{(3,77 \angle 90^\circ)(2,65 \angle -90^\circ)}{3,77 \angle 90^\circ + 2,65 \angle -90^\circ} \\ &= \frac{10 \angle 0^\circ}{1,12 \angle 90^\circ} \\ \mathbf{Z}_{T_1} &= 8,93 \angle -90^\circ \end{aligned}$$

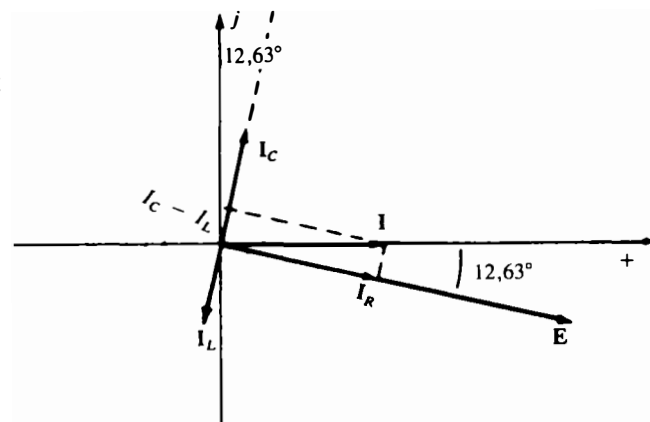


FIG. 15.75

La règle du diviseur de courant permet de calculer le courant  $I$  de la façon suivante:

$$\begin{aligned} I_R &= \frac{Z_{T_1} I}{Z_{T_1} + R} = \frac{(8,93 \angle -90^\circ)(20 \angle 0^\circ)}{8,93 \angle -90^\circ + 2 \angle 0^\circ} \\ &= \frac{178,60 \angle -90^\circ}{9,15 \angle -77,37^\circ} = 19,52 \angle -12,63^\circ \end{aligned}$$

$$g. Z_T = \frac{1}{Y_T} = \frac{1}{0,512 \angle 12,63^\circ} = 1,95 \angle -12,63^\circ$$

ce qui devient sous forme rectangulaire  $1,91 - j0,427$ ; on a alors:

$$C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{377(0,427)} = 0,00621 \text{ F} = 6210 \mu\text{F}$$

La figure 15.76 représente le circuit série équivalent. Puisque  $Z_{T_1}$  a été calculée en (f) ci-dessus, nous pouvons utiliser les équations (15.19) et (15.20). Nous avons donc  $Z_{T_1} = X_p$ , et:

$$R_s = \frac{R_p X_p^2}{X_p^2 + R_p^2} = \frac{(2)(8,93)^2}{(8,93)^2 + (2)^2} = \frac{159,49}{83,74} = 1,90 \Omega$$

avec:

$$X_s = \frac{R_p^2 X_p}{X_p^2 + R_p^2} = \frac{(2)^2(8,93)}{83,74} = \frac{35,72}{83,74} = 0,427 \Omega$$

ce qui confirme nos résultats antérieurs.

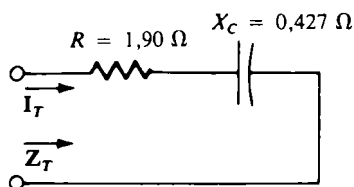


FIG. 15.76

## PROBLÈMES

### Section 15.2

- Écrivez les impédances illustrées à la figure 15.77 sous forme polaire et sous forme rectangulaire.

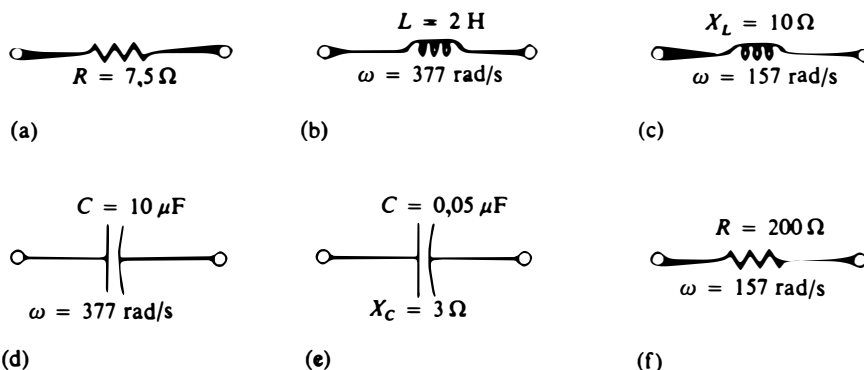


FIG. 15.77

2. Calculez le courant  $i$  traversant les éléments illustrés à la figure 15.78 en utilisant les vecteurs de phase. Dessinez les formes d'onde de  $v$  et de  $i$  sur le même diagramme.

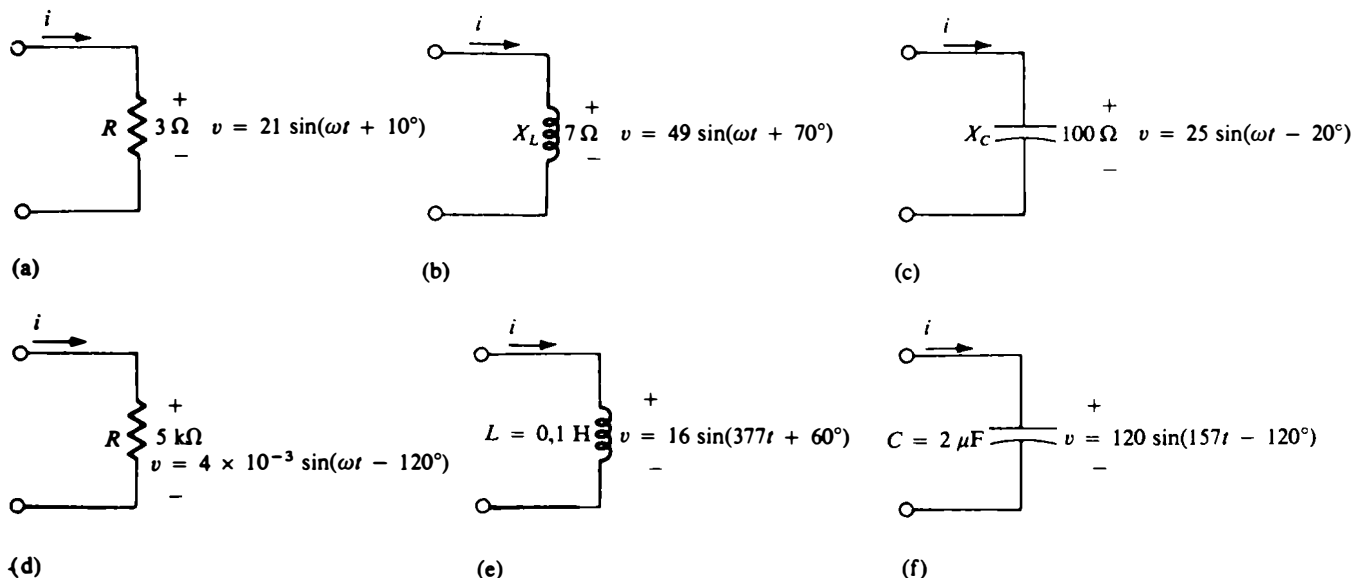


FIG. 15.78

3. Calculez la tension  $v$  aux bornes des éléments illustrés à la figure 15.79 en utilisant les vecteurs de phase. Dessinez les formes d'onde de  $v$  et de  $i$  sur le même diagramme.

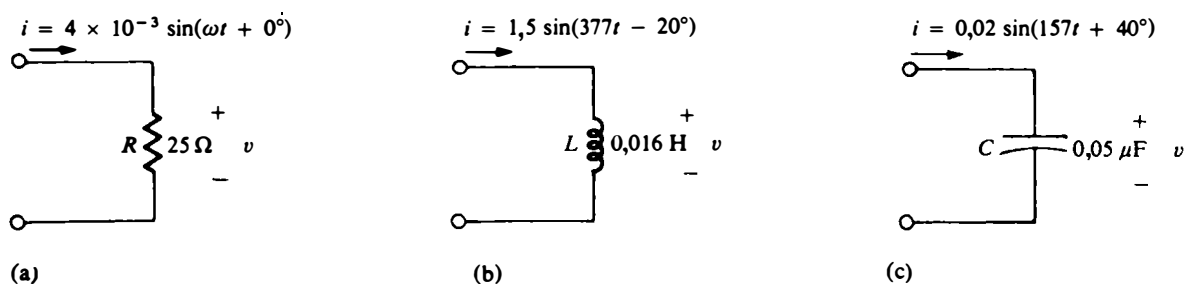


FIG. 15.79

Section 15.3

4. Calculez l'impédance totale des circuits illustrés à la figure 15.80. Écrivez votre réponse sous les formes polaire et rectangulaire et tracez le diagramme d'impédance.

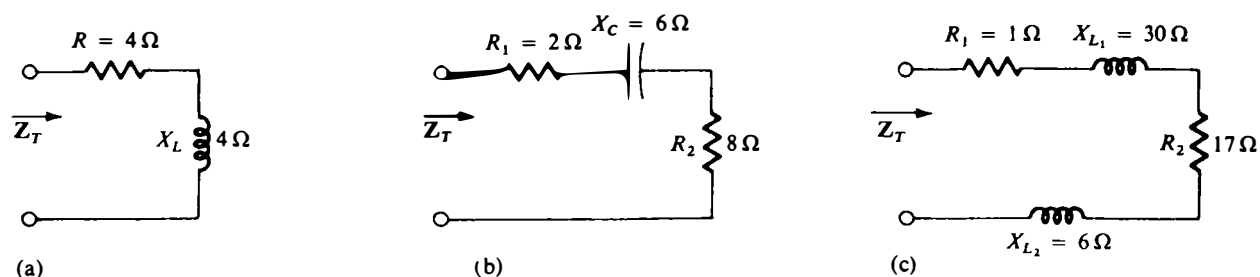
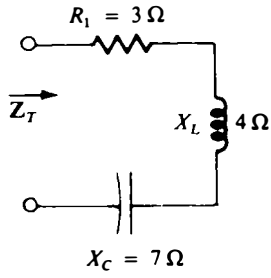
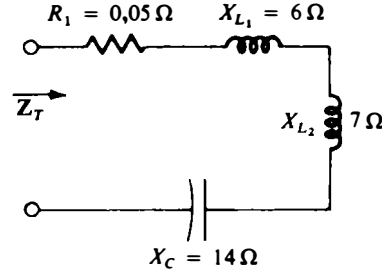


FIG. 15.80

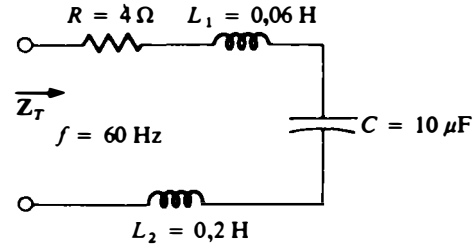
5. Refaites le problème 4 pour les circuits illustrés à la figure 15.81.



(a)



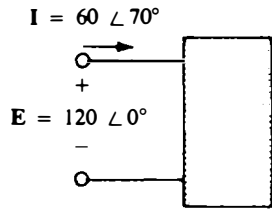
(b)



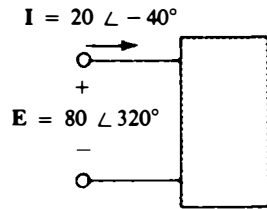
(c)

FIG. 15.81

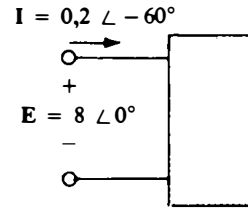
6. Déterminez le type et calculez l'impédance en ohms des éléments en série que doivent contenir les boîtes illustrées à la figure 15.82, de sorte que les tensions et les courants d'entrée soient ceux qui sont indiqués. (Trouvez le circuit série le plus simple qui satisfasse à ces conditions.)



(a)



(b)



(c)

FIG. 15.82

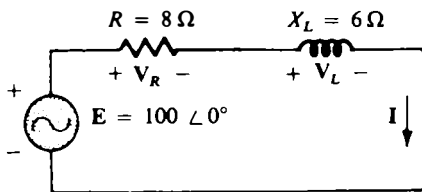


FIG. 15.83

7. Voir le circuit illustré à la figure 15.83.

- Calculez l'impédance totale  $Z_T$  dans la forme polaire.
- Tracez le diagramme d'impédance.
- Calculez le courant  $I$  et les tensions  $V_R$  et  $V_L$  en utilisant les vecteurs de phase.
- Tracez le diagramme de phase et les formes d'onde des tensions  $E$ ,  $V_R$  et  $V_L$  ainsi que du courant  $I$ .
- Vérifiez la loi des tensions sur le trajet fermé.
- Calculez la puissance moyenne fournie au circuit.
- Calculez le facteur de puissance du circuit et indiquez s'il est capacitif ou inductif.
- Calculez les expressions sinusoïdales des tensions et du courant, sachant que la fréquence est de 60 Hz.
- Tracez les formes d'onde des tensions et du courant sur le même diagramme.

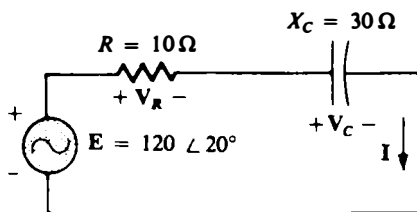


FIG. 15.84

8. Refaites le problème 7 pour le circuit illustré à la figure 15.84, en remplaçant  $V_L$  par  $V_C$  aux parties (c) et (d).

9. Voir le circuit illustré à la figure 15.85.

- Calculez l'impédance totale  $Z_T$  dans la forme polaire.
- Tracez le diagramme d'impédance.
- Calculez la valeur de  $C$  en microfarads et de  $L$  en henrys.
- Calculez le courant  $i$  et les tensions  $v_R$ ,  $v_L$  et  $v_C$  sous forme de vecteurs de phase.
- Tracez le diagramme de phase des tensions  $E$ ,  $V_R$ ,  $V_L$  et  $V_C$  ainsi que du courant  $I$ .

- f. Vérifiez la loi des tensions sur le trajet fermé.
- g. Calculez la puissance moyenne fournie au circuit.
- h. Calculez le facteur de puissance du circuit et indiquez s'il est inductif ou capacitif.
- i. Déterminez les expressions sinusoïdales de la tension et du courant.
- j. Tracez les formes d'onde des tensions et du courant sur le même diagramme.

$$e = 70,7 \sin(377t + 30^\circ)$$

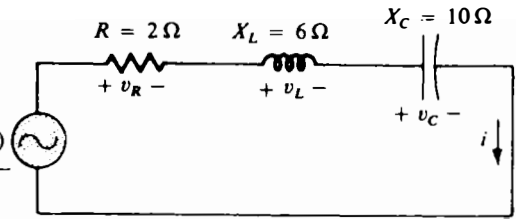


FIG. 15.85

10. Refaites le problème 9 pour le circuit illustré à la figure 15.86.

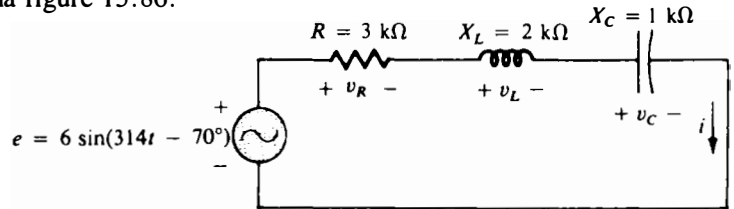
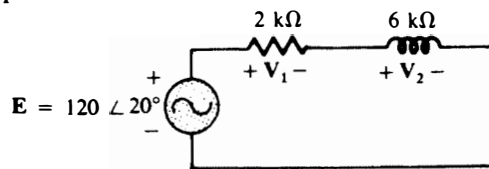


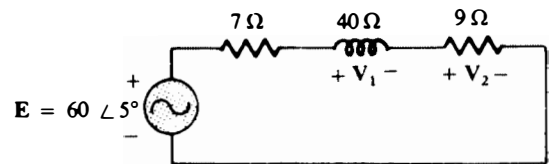
FIG. 15.86

Section 15.4

11. Calculez les tensions  $V_1$  et  $V_2$  dans le circuit illustré à la figure 15.87, en utilisant la règle du diviseur de tension. Exprimez en vecteurs de phase.



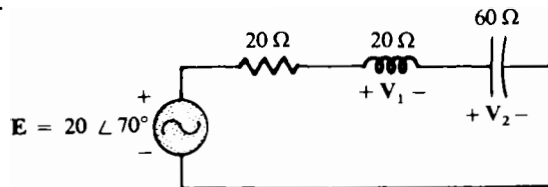
(a)



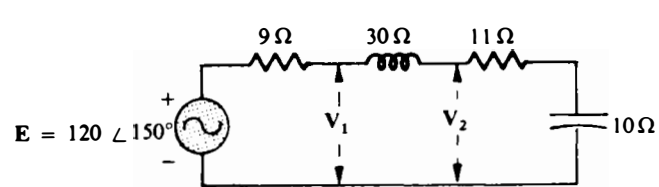
(b)

FIG. 15.87

12. Refaites le problème 11 pour les circuits illustrés à la figure 15.88.



(a)



(b)

FIG. 15.88

\*13. Voir le circuit illustré à la figure 15.89.

- a. Calculez  $i$ ,  $v_R$  et  $v_C$  en vous servant des vecteurs de phase.
- b. Calculez le facteur de puissance total et indiquez s'il est capacitif ou inductif.
- c. Calculez la puissance moyenne fournie au circuit.
- d. Tracez le diagramme d'impédance.
- e. Tracez le diagramme de phase des tensions  $E$ ,  $V_R$  et  $V_C$  ainsi que celui du courant  $I$ .
- f. Calculez la tension aux bornes de chacune des bobines en n'utilisant que la loi des tensions.

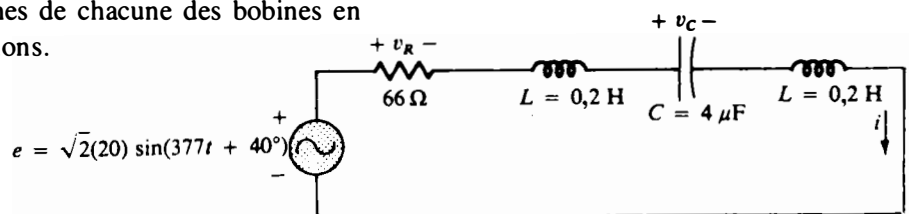
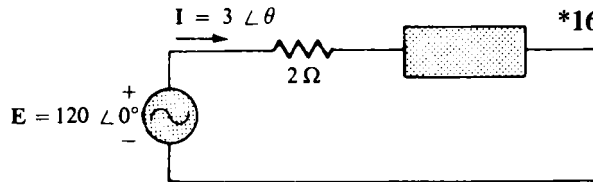


FIG. 15.89

- g. Calculez les tensions  $V_R$  et  $V_C$  en utilisant la règle du diviseur de tension et comparez les résultats à ceux obtenus en (a).
- h. Dessinez le circuit sérié équivalent, en ne tenant compte que de l'impédance totale et du courant  $i$ .

- 14. Refaites le problème 13, la capacité du condensateur étant maintenant de  $1000 \mu\text{F}$ .
- 15. Une charge électrique a un facteur de puissance capacitif de  $0,8$ . Elle dissipe  $8 \text{ kW}$  sous  $200 \text{ V}$ . Calculez l'impédance de cette charge en coordonnées rectangulaires.



- \*16. Déterminez l'élément ou les éléments série que doit contenir la boîte illustrée à la figure 15.90 pour que soient satisfaites les conditions suivantes:
  - a. La puissance moyenne fournie au circuit est de  $300 \text{ W}$ .
  - b. Le facteur de puissance du circuit est inductif.

FIG. 15.90

Section 15.5

- 17. Calculez l'admittance totale et l'impédance totale des circuits illustrés à la figure 15.91. Indiquez les valeurs de la conductance et de la susceptance et tracez le diagramme d'admittance.

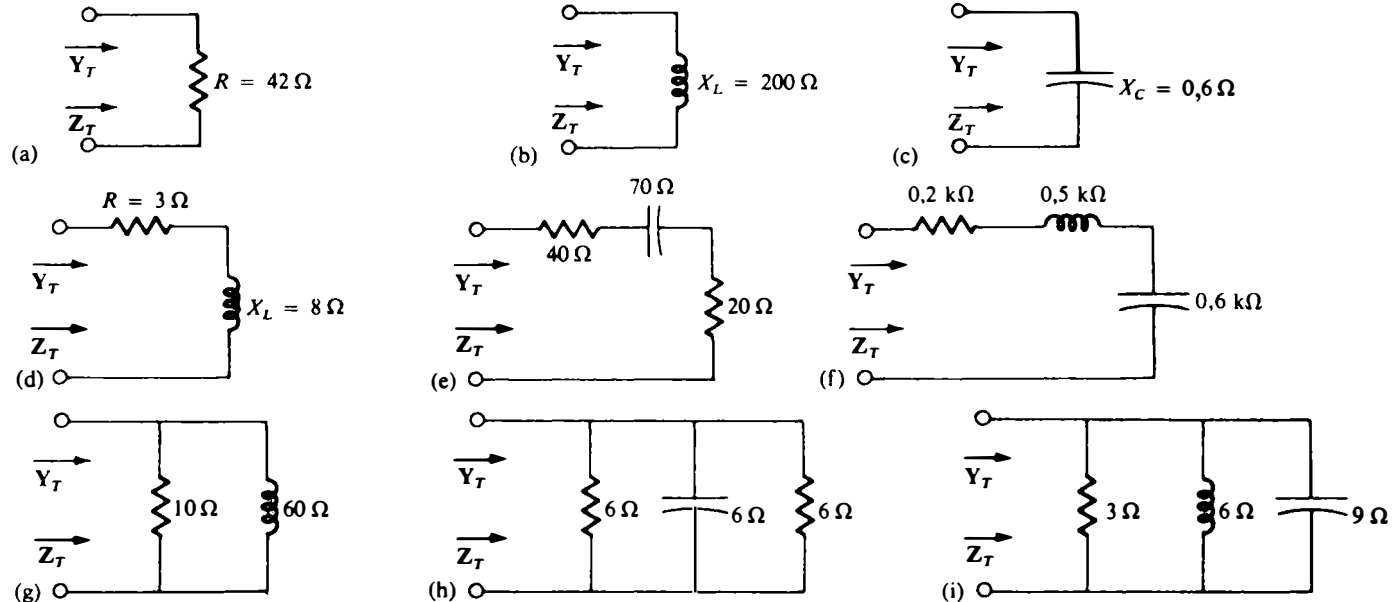


FIG. 15.91

- 18. Refaites le problème 6 et déterminez les éléments en parallèle que doit contenir la boîte, la tension et le courant étant les mêmes aux bornes d'entrée. (Trouvez le circuit parallèle le plus simple qui satisfasse à ces conditions.)

Section 15.6

- 19. Voir le circuit illustré à la figure 15.92.
  - a. Calculez l'admittance totale  $Y_T$  sous forme polaire.
  - b. Tracez le diagramme d'admittance.
  - c. Calculez la tension  $E$  et les courants  $I_R$  et  $I_L$  par des vecteurs de phase.
  - d. Tracez le diagramme de phase des courants  $I_T$ ,  $I_R$  et  $I_L$  ainsi que celui de la tension  $E$ .
  - e. Vérifiez la loi des courants à l'un des noeuds du circuit.
  - f. Calculez la puissance moyenne fournie au circuit.

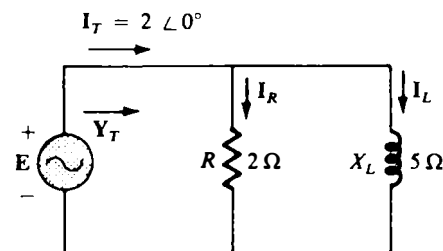


FIG. 15.92

- g. Calculez le facteur de puissance du circuit et indiquez s'il est capacitif ou inductif.
  - h. Déterminez les expressions sinusoïdales des courants et de la tension, sachant que la fréquence est de 60 Hz.
  - i. Tracez les formes d'onde des courants et de la tension sur le même diagramme.
20. Refaites le problème 19 pour le circuit illustré à la figure 15.93, en remplaçant  $I_L$  par  $I_C$  aux parties (c) et (d).

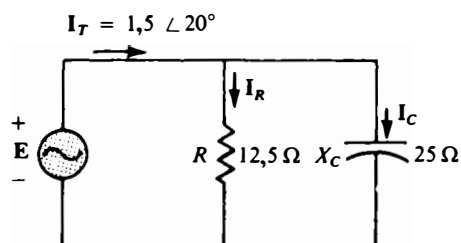


FIG. 15.93

21. Refaites le problème 19 pour le circuit illustré à la figure 15.94, en remplaçant  $E$  par  $I_T$  à la partie (c).

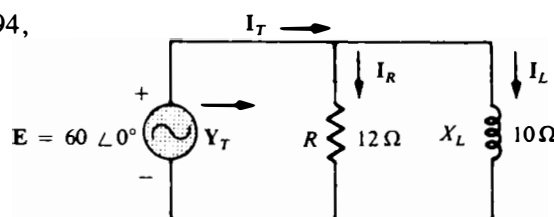


FIG. 15.94

22. Voir le circuit illustré à la figure 15.95.

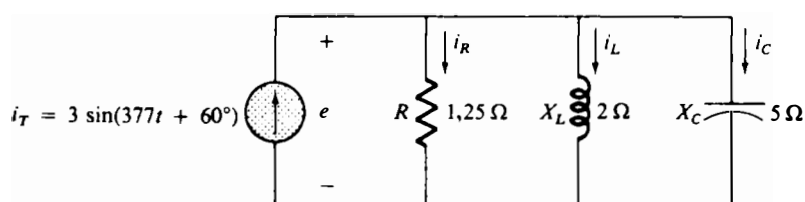


FIG. 15.95

- a. Calculez l'admittance totale  $Y_T$  sous forme polaire.
- b. Tracez le diagramme d'admittance.
- c. Calculez la valeur de  $C$  en microfarads et de  $L$  en henrys.
- d. Calculez la tension  $e$  et les courants  $i_R$ ,  $i_L$  et  $i_C$  par vecteurs de phase.
- e. Tracez le diagramme de phase des courants  $I_T$ ,  $I_R$ ,  $I_L$  et  $I_C$  ainsi que celui de la tension  $E$ .
- f. Vérifiez la loi des courants à l'un des noeuds du circuit.
- g. Calculez la puissance moyenne fournie au circuit.
- h. Calculez le facteur de puissance du circuit et indiquez s'il est capacitif ou inductif.
- i. Déterminez les expressions sinusoïdales des courants et de la tension.
- j. Tracez les formes d'onde des courants et de la tension sur le même diagramme.

23. Refaites le problème 22 pour le circuit illustré à la figure 15.96.

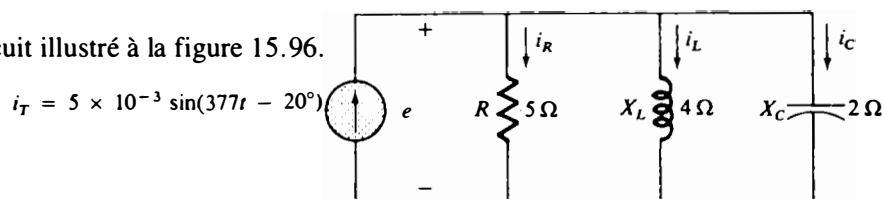


FIG. 15.96



24. Refaites le problème 22 pour le circuit illustré à la figure 15.97, en remplaçant  $e$  par  $i_T$  à la partie (d).

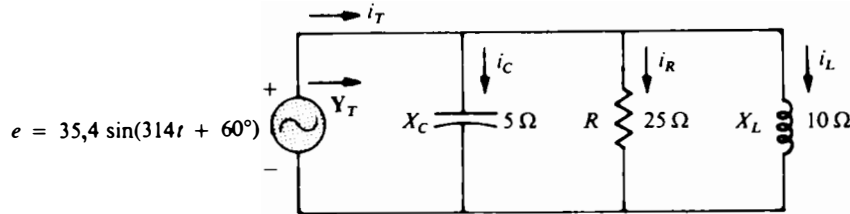
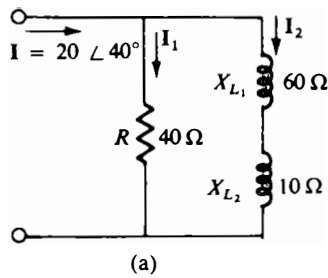


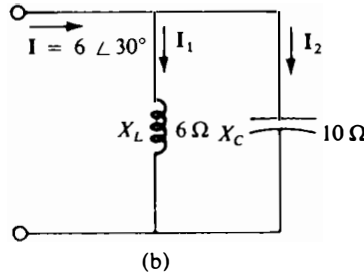
FIG. 15.97

Section 15.7

25. Calculez les courants  $I_1$  et  $I_2$  dans le circuit illustré à la figure 15.98 par vecteurs de phase, en utilisant la loi du diviseur de courant. Quel est le circuit série équivalent, du seul point de vue de l'impédance totale?



(a)

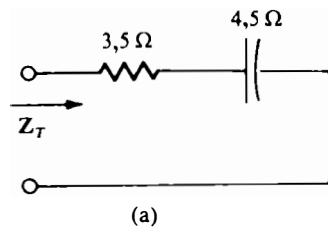


(b)

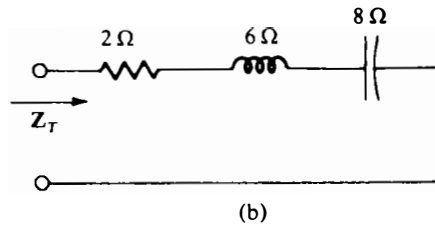
FIG. 15.98

Section 15.8

26. Tracez le circuit parallèle dont l'impédance totale  $Z_T$  est la même que celle des circuits série illustrés à la figure 15.99.



(a)



(b)

FIG. 15.99

27. Voir le réseau illustré à la figure 15.100.

- Calculez  $e$ ,  $i_R$  et  $i_L$  par vecteurs de phase.
- Calculez le facteur de puissance total et indiquez s'il est capacitif ou inductif.
- Calculez la puissance moyenne fournie au circuit.
- Tracez le diagramme d'admittance.
- Tracez le diagramme de phase des courants  $I_T$ ,  $I_R$  et  $I_L$  ainsi que de la tension  $E$ .
- Calculez le courant  $I_C$  pour chacun des condensateurs en n'utilisant que la loi des courants.
- Déterminez le circuit série constitué d'une résistance et d'un élément réactif dont l'impédance est la même que celle du circuit.

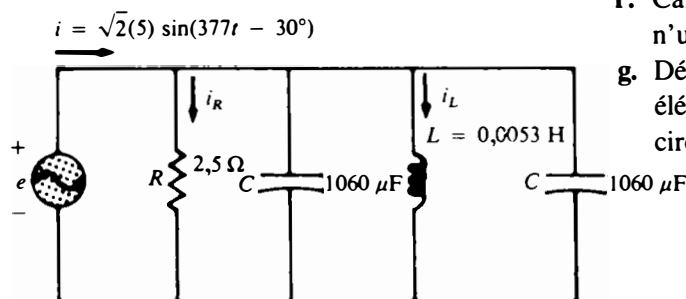


FIG. 15.100

- \*28. Refaites le problème 27, l'inductance étant maintenant de 1 H.
29. Déterminez l'élément ou les éléments que doit contenir la boîte illustrée à la figure 15.101 pour que soient satisfaites les conditions ci-dessous. (Trouvez le circuit parallèle le plus simple qui satisfasse à ces conditions.)
- La puissance moyenne du circuit est de 3000 W.
  - Le facteur de puissance du circuit est inductif.

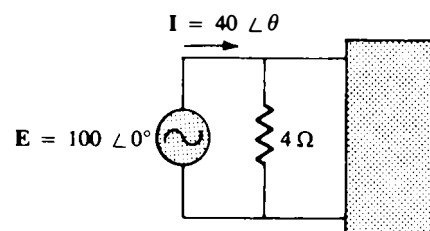


FIG. 15.101

## GLOSSAIRE

**Admittance ( $Y$ )** Mesure de la facilité avec laquelle un réseau laisse passer un courant. Elle s'exprime en siemens (S).

**Circuits équivalents** En courant alternatif, un circuit parallèle et un circuit série ayant la même impédance et le même courant d'entrée.

**Diagramme d'admittance** Diagramme vectoriel indiquant la grandeur de la susceptance capacitive, de la susceptance inductive et de la conductance, ainsi que la grandeur et l'angle de l'admittance totale du réseau.

**Diagramme d'impédance** Diagramme vectoriel indiquant la grandeur de l'impédance des composants résistifs, réactifs et capacitifs d'un réseau ainsi que la grandeur et l'angle de l'impédance totale du réseau.

**Diagramme de phase** Diagramme vectoriel indiquant la grandeur et le déphasage des courants et des tensions d'un réseau.

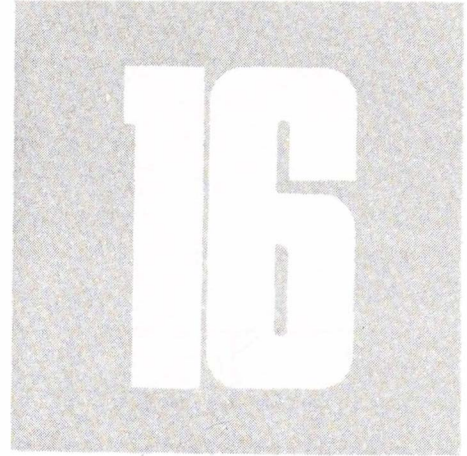
**Règle du diviseur de courant** Méthode permettant de déterminer le courant des branches parallèles d'un réseau sans détermination préalable des tensions aux bornes de ces branches.

**Règle du diviseur de tension** Méthode permettant de déterminer les tensions présentes aux bornes d'un élément d'un circuit série sans détermination préalable du courant traversant le circuit.

**Susceptance** Mesure de l'opposition offerte au passage du courant par un élément. Elle est désignée par la majuscule  $B$  et elle se mesure en siemens (S).



# RÉSEAUX SÉRIE- PARALLÈLE À COURANT ALTERNATIF

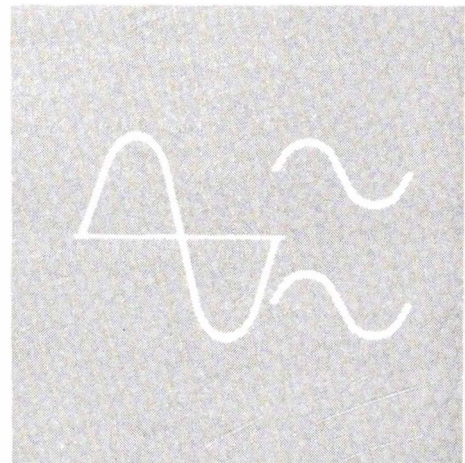


## 16.1 INTRODUCTION

Dans le présent chapitre, nous utiliserons les notions fondamentales du chapitre précédent pour élaborer une technique de résolution des problèmes ayant trait aux réseaux série-parallèle à courant alternatif. À ce point-ci, il est peut-être utile de revoir rapidement le chapitre 6, car l'approche que nous adopterons est assez semblable à celle qui y est exposée. Les circuits faisant l'objet du présent chapitre ne comptent qu'une seule source de puissance, soit de tension soit de courant. Les réseaux à plusieurs sources seront étudiés aux chapitres 17 et 18, à l'aide de techniques décrites antérieurement dans l'analyse des circuits continus.

Notre technique de résolution compte généralement trois étapes.

1. Analyser l'énoncé du problème et se faire une idée de l'approche à utiliser. Cette première étape permet de gagner du temps et de procéder par calculs simples.
2. Une fois l'approche à suivre déterminée dans ses grandes lignes, traiter chaque branche du circuit indépendamment avant de considérer l'ensemble du réseau série-parallèle. Sont ainsi éliminées maintes erreurs qu'entraîne habituellement l'absence d'une approche systématique.
3. Une fois la solution obtenue, vérifier si elle est sensée par comparaison de la grandeur de la source et des valeurs des composants du circuit. Si la solution semble insensée, retravailler le problème au moyen d'une autre approche ou vérifier à la loupe les calculs.

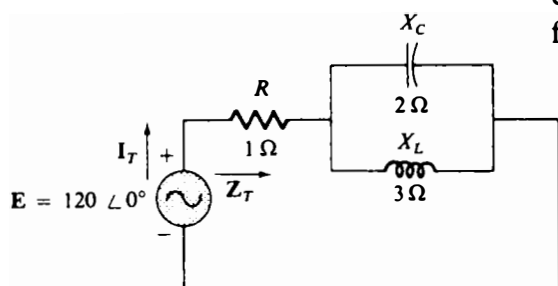




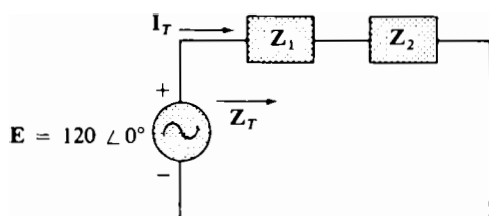
## 16.2 EXEMPLES

**EXEMPLE 16.1** Voir le réseau illustré à la figure 16.1. Déterminer:

- $Z_T$ ;
- $I_T$ ;
- $I_C$ ;
- $V_R$  et  $V_C$ ;
- la puissance fournie;
- le facteur de puissance.



**FIG. 16.1**



**FIG. 16.2**

La figure 16.2 illustre le circuit simplifié. Il est d'ailleurs conseillé de prendre la bonne habitude de simplifier le circuit pour représenter les impédances de la façon indiquée. Une fois qu'on a réussi à exprimer la grandeur inconnue en fonction des impédances, on peut facilement déterminer sa valeur en substituant aux impédances leurs valeurs numériques. Cette technique simple permet de gagner du temps et élimine d'éventuelles erreurs.

*Solution:*

$$a. Z_1 = R \angle 0^\circ = 1 \angle 0^\circ$$

$$\begin{aligned} Z_2 &= X_C \parallel X_L = \frac{X_C X_L}{X_C + X_L} = \frac{(2 \angle -90^\circ)(3 \angle 90^\circ)}{-j2 + j3} \\ &= \frac{6 \angle 0^\circ}{j1} = \frac{6 \angle 0^\circ}{1 \angle 90^\circ} = 6 \angle -90^\circ \end{aligned}$$

et:

$$Z_T = Z_1 + Z_2 = 1 - j6 = 6,08 \angle -80,54^\circ$$

$$b. I_T = \frac{E}{Z_T} = \frac{120 \angle 0^\circ}{6,08 \angle -80,5^\circ} = 19,74 \angle 80,54^\circ$$

c. La règle du diviseur de courant donne:

$$\begin{aligned} I_C &= \frac{X_L I_T}{X_L + X_C} = \frac{(3 \angle 90^\circ)(19,74 \angle 80,54^\circ)}{1 \angle 90^\circ} \\ &= \frac{59,22 \angle 170,54^\circ}{1 \angle 90^\circ} = 59,22 \angle 80,54^\circ \end{aligned}$$

$$d. V_R = I_T Z_1 = (19,74 \angle 80,54^\circ)(1 \angle 0^\circ) = 19,74 \angle 80,54^\circ$$

$$V_C = I_T Z_2 = (19,74 \angle 80,54^\circ)(6 \angle -90^\circ) = 118,44 \angle -9,46^\circ$$



e.  $P_{del} = I_T^2 R = (19,74)^2 \cdot 1 = 389,67 \text{ W}$

f.  $F_p = \cos \theta = \cos 80,54^\circ = 0,164 \text{ (capacitif)}$

Le circuit est donc fortement réactif. En effet, plus  $F_p$  tend vers zéro plus le circuit est réactif et moins il est résistant.

**EXEMPLE 16.2** Voir le réseau illustré à la figure 16.3.

- a. Sachant que  $I = 50 \angle 30^\circ$ , calculer  $I_1$  à l'aide de la règle du diviseur de courant.
- b. Dans les mêmes conditions, calculer  $I_2$ .
- c. Vérifier la loi des courants à un des noeuds.

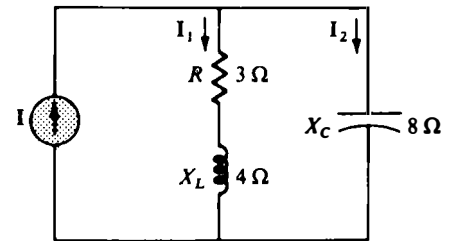


FIG. 16.3

*Solution:*

- a. La figure 16.4 représente le circuit simplifié. Nous avons:

$$Z_1 = 3 + j4 = 5 \angle 53,13^\circ \quad Z_2 = -j8 = 8 \angle -90^\circ$$

La règle du diviseur de courant donne:

$$I_1 = \frac{Z_2 I}{Z_2 + Z_1} = \frac{(8 \angle -90^\circ)(50 \angle 30^\circ)}{(-j8) + (3 + j4)} = \frac{400 \angle -60^\circ}{3 - j4}$$

$$= \frac{400 \angle -60^\circ}{5 \angle -53,13^\circ} = 80 \angle -6,87^\circ$$

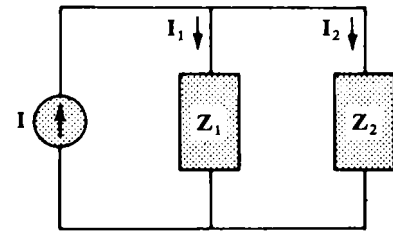


FIG. 16.4

b.  $I_2 = \frac{Z_1 I}{Z_2 + Z_1} = \frac{(5 \angle 53,13^\circ)(50 \angle 30^\circ)}{5 \angle -53,13^\circ} = \frac{250 \angle 83,13^\circ}{5 \angle -53,13^\circ}$

$$= 50 \angle 136,26^\circ$$

c.  $I = I_1 + I_2$

$$50 \angle 30^\circ = 80 \angle -6,87^\circ + 50 \angle 136,26^\circ$$

$$= (79,43 - j9,57) + (-36,12 + j34,57)$$

$$= 43,31 + j25,0$$

$$50 \angle 30^\circ = 50 \angle 30^\circ \text{ (résultat confirmé)}$$

**EXEMPLE 16.3** Voir le réseau illustré à la figure 16.5.

- a. Calculer la tension  $V_C$  à l'aide de la règle du diviseur de tension.
- b. Calculer le courant  $I$ .

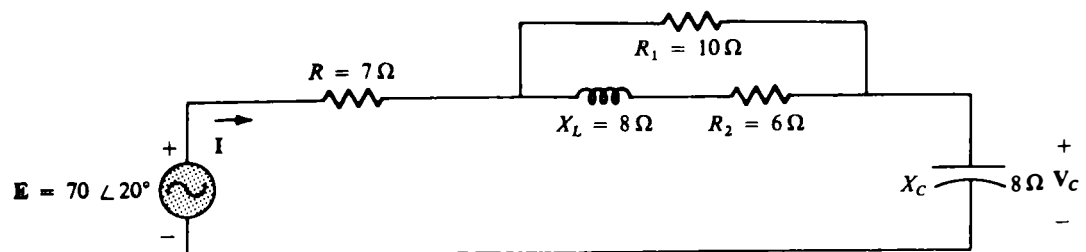


FIG. 16.5



Solution:

a. La figure 16.6 représente le circuit simplifié. Nous avons:

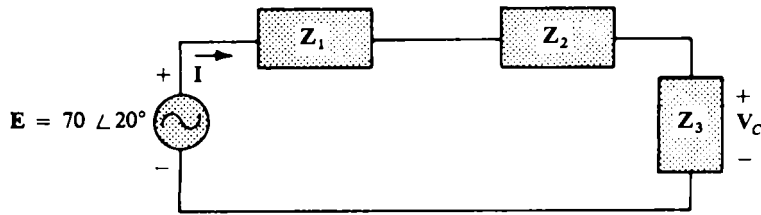


FIG. 16.6

$$Z_1 = 7 \angle 0^\circ \quad Z_3 = 8 \angle -90^\circ = -j8$$

$$Z_2 = \frac{(R_1)(R_2 + jX_L)}{R_1 + (R_2 + jX_L)} = \frac{10(6 + j8)}{10 + 6 + j8}$$

$$= \frac{10(10 \angle 53,13^\circ)}{16 + j8} = \frac{100 \angle 53,13^\circ}{17,89 \angle 26,57^\circ}$$

$$Z_2 = 5,59 \angle 26,56^\circ$$

$$V_c = \frac{Z_3 E}{Z_1 + Z_2 + Z_3} = \frac{(8 \angle -90^\circ)(70 \angle 20^\circ)}{7 + 5,59 \angle 26,56^\circ - j8}$$

$$= \frac{560 \angle -70^\circ}{560 \angle -70^\circ} = \frac{560 \angle -70^\circ}{7 + (5 + j2,50) - j8}$$

$$= \frac{560 \angle -70^\circ}{12 - j5,50} = \frac{560 \angle -70^\circ}{13,20 \angle -24,62^\circ} = 42,42 \angle -45,38^\circ$$

$$b. I = \frac{V_c}{X_C} = \frac{42,42 \angle -45,38^\circ}{8 \angle -90^\circ} = 5,30 \angle 44,62^\circ$$

EXEMPLE 16.4 Voir la figure 16.7. Calculer:

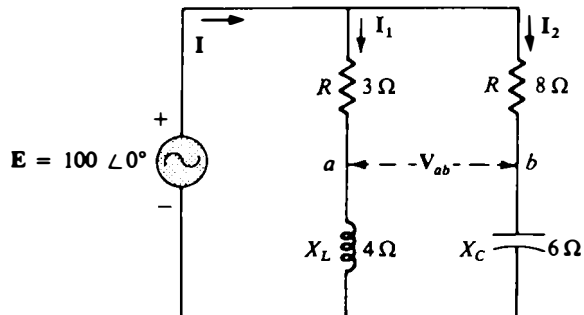


FIG. 16.7

- le courant  $I$ ;
- la tension  $V_{ab}$ .

Solution:

a. La figure 16.8 représente le circuit simplifié. Nous avons:

$$Z_1 = 3 + j4 = 5 \angle 53,13^\circ$$

$$Z_2 = 8 - j6 = 10 \angle -36,87^\circ$$

$$Y_T = Y_1 + Y_2$$

$$= \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{5 \angle 53,13^\circ} + \frac{1}{10 \angle -36,87^\circ}$$

$$= 0,2 \angle -53,13^\circ + 0,1 \angle 36,87^\circ$$

$$= (0,12 - j0,16) + (0,08 + j0,06)$$

$$= 0,2 - j0,1 = 0,224 \angle -26,57^\circ$$

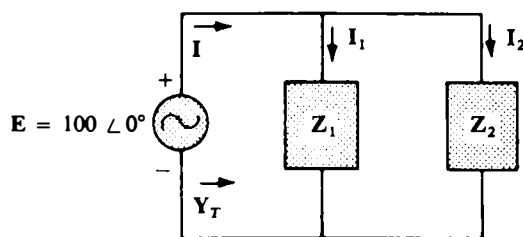


FIG. 16.8



La loi d'Ohm donne:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_T} = \mathbf{E}\mathbf{Y}_T = (100 \angle 0^\circ)(0,224 \angle -26,57^\circ)$$

$$\mathbf{I} = 22,4 \angle -26,57^\circ$$

Le calcul de l'impédance totale par une autre approche donne:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_T &= \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} = \frac{(5 \angle 53,13^\circ)(10 \angle -36,87^\circ)}{(3 + j4) + (8 - j6)} \\ &= \frac{50 \angle 16,26^\circ}{11 - j2} = \frac{50 \angle 16,26^\circ}{11,18 \angle -10,30^\circ} \\ &= 4,47 \angle 26,30^\circ \end{aligned}$$

de sorte que:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_T} = \frac{100 \angle 0^\circ}{4,47 \angle 26,30^\circ} = 22,37 \angle -26,30^\circ$$

b. La loi d'Ohm donne:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_1} = \frac{100 \angle 0^\circ}{5 \angle 53,13^\circ} = 20 \angle -53,13^\circ$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_2} = \frac{100 \angle 0^\circ}{10 \angle -36,87^\circ} = 10 \angle 36,87^\circ$$

À la figure 16.7, on a:

$$\mathbf{V}_{3\Omega} = \mathbf{I}_1\mathbf{R} = (20 \angle -53,13^\circ)(3 \angle 0^\circ) = 60 \angle -53,13^\circ$$

$$\mathbf{V}_{8\Omega} = \mathbf{I}_2\mathbf{R} = (10 \angle +36,87^\circ)(8 \angle 0^\circ) = 80 \angle +36,87^\circ$$

Notons que la tension  $\mathbf{V}_{3\Omega}$  ou  $\mathbf{V}_{8\Omega}$  peut se trouver en une seule étape à l'aide de la règle du diviseur de tension; en effet:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{3\Omega} &= \frac{(3 \angle 0^\circ)(100 \angle 0^\circ)}{3 \angle 0^\circ + 4 \angle 90^\circ} = \frac{300 \angle 0^\circ}{5 \angle 53,13^\circ} \\ &= 60 \angle -53,13^\circ \end{aligned}$$

Pour trouver  $\mathbf{V}_{ab}$ , il nous faut maintenant appliquer la loi des tensions à la boucle illustrée à la figure 16.9, dans laquelle se trouvent les résistances de 3  $\Omega$  et de 8  $\Omega$ . On a ainsi:

$$-\mathbf{V}_{ab} + \mathbf{V}_{8\Omega} - \mathbf{V}_{3\Omega} = 0$$

ou, encore:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{ab} &= \mathbf{V}_{8\Omega} - \mathbf{V}_{3\Omega} \\ &= 80 \angle 36,87^\circ - 60 \angle -53,13^\circ \\ &= (64 + j48) - (36 - j48) \\ &= 28 + j96 \\ \mathbf{V}_{ab} &= 100 \angle 73,74^\circ \end{aligned}$$

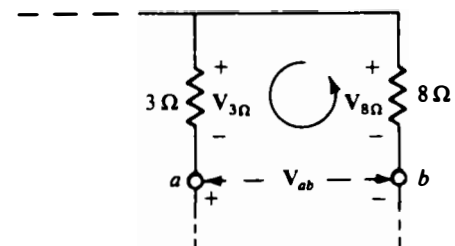


FIG. 16.9





**EXEMPLE 16.5** Voir le réseau illustré à la figure 16.10.

- Déterminer  $Z'_T$  et la comparer à  $R_1 = 50 \text{ k}\Omega$ .
- Déterminer  $I_1$  et le comparer à  $I$  [faire le parallèle avec le résultat obtenu en (a)].
- Déterminer  $V_{\text{charge}}$ .

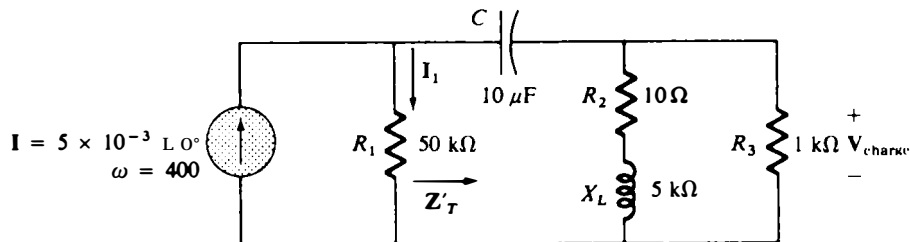


FIG. 16.10

*Solution:*

$$\begin{aligned} \text{a. } X_C &= \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{400(10) \times 10^{-6}} = \frac{10^6}{4 \times 10^3} \\ &= \frac{10^3}{4} = 250 \Omega = 0,25 \text{ k}\Omega \end{aligned}$$

Le circuit simplifié apparaît à la figure 16.11.

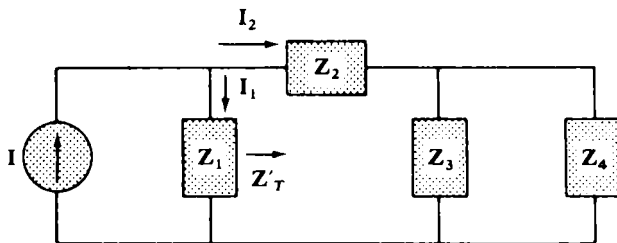


FIG. 16.11

$$Z_1 = 50 \text{ k}\Omega$$

$$Z_2 = 0,25 \times 10^3 \angle -90^\circ = -j250$$

$$Z_3 = 10 + j5 \times 10^3 \cong j5 \times 10^3 = 5 \times 10^3 \angle 90^\circ$$

$$Z_4 = 1 \text{ k}\Omega$$

de sorte que:

$$\begin{aligned} Z'_T &= Z_2 + Z_3 \parallel Z_4 \\ &= -j250 + \frac{(5 \times 10^3 \angle 90^\circ)(1 \times 10^3 \angle 0^\circ)}{(j5 \times 10^3 + 1 \times 10^3)} \\ &= -j250 + \frac{5 \times 10^3 \angle 90^\circ}{5,10 \angle 78,69^\circ} \\ &= -j250 + 980 \angle 11,31^\circ \\ &= -j250 + (960 + j190) \\ &= 960 - j60 = 962 \angle -3,58^\circ \end{aligned}$$

et:

$$Z'_T \cong \frac{1}{50} \text{ du module de } Z_1 = 50 \text{ k}\Omega$$



$$\begin{aligned}
 \text{b. } \mathbf{I}_1 &= \frac{\mathbf{Z}'_T \mathbf{I}}{\mathbf{Z}_T + \mathbf{Z}_1} = \frac{(962 \angle -3,58^\circ)(5 \times 10^{-3} \angle 0^\circ)}{(960 - j60) + 50 \times 10^3} \\
 &= \frac{4,81 \angle -3,58^\circ}{\cong 50,96 \times 10^3} = 0,0944 \times 10^{-3} \angle -3,58^\circ
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{I} = 94,4 \times 10^{-6} \angle -3,58^\circ$$

Le module de  $\mathbf{I}_1$  est approximativement le cinquantième du module de  $\mathbf{I}$ . Le rapport des courants est donc sensiblement celui des impédances.

c. Puisque:

$$|\mathbf{I}_1| \cong \frac{1}{50} |\mathbf{I}|$$

$$\mathbf{I}_2 \cong \mathbf{I} = 5 \times 10^{-3} \angle 0^\circ$$

et:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V}_{\text{charge}} &= \mathbf{I}_2(\mathbf{Z}_3 \parallel \mathbf{Z}_4) = (5 \times 10^{-3} \angle 0^\circ)(980 \angle 11,31^\circ) \\
 &= 4,90 \angle 11,31^\circ
 \end{aligned}$$

**EXEMPLE 16.6** Voir le réseau illustré à la figure 16.12.

- Calculer  $\mathbf{I}$ .
- Déterminer  $\mathbf{I}_1$ ,  $\mathbf{I}_2$ , et  $\mathbf{I}_3$ .
- Vérifier la loi des courants:

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3$$

- Calculer l'impédance totale du réseau.

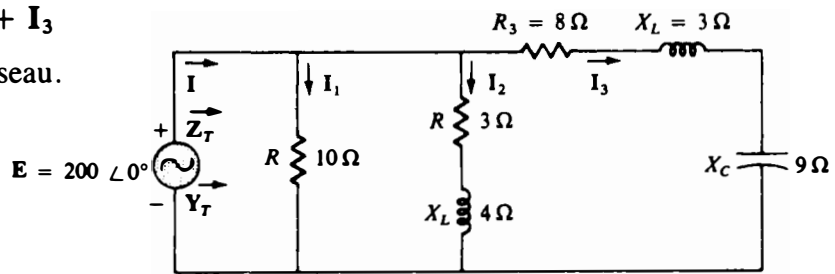


FIG. 16.12

*Solution:*

- La figure 16.13 représente le circuit simplifié. On a:

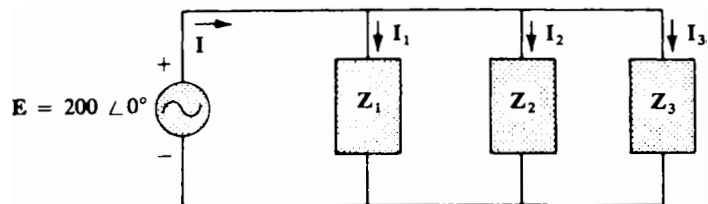


FIG. 16.13

$$\mathbf{Z}_1 = 10 \angle 0^\circ$$

$$\mathbf{Z}_2 = 3 + j4$$

$$\mathbf{Z}_3 = 8 + j3 - j9 = 8 - j6$$

L'admittance totale est:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Y}_T &= \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3 \\
 &= \frac{1}{\mathbf{Z}_1} + \frac{1}{\mathbf{Z}_2} + \frac{1}{\mathbf{Z}_3} = \frac{1}{10} + \frac{1}{3 + j4} + \frac{1}{8 - j6}
 \end{aligned}$$



mais:

$$\frac{1}{3 + j4} = \frac{3}{3^2 + 4^2} - j \frac{4}{3^2 + 4^2} = \frac{3}{25} - j \frac{4}{25}$$

et:

$$\frac{1}{8 - j6} = \frac{8}{8^2 + 6^2} + j \frac{6}{8^2 + 6^2} = \frac{8}{100} + j \frac{6}{100}$$

$$\therefore Y_1 = \frac{1}{10} + j0 = \frac{10}{100} + j0$$

$$Y_2 = \frac{3}{25} - j \frac{4}{25} = \frac{12}{100} - j \frac{16}{100}$$

$$Y_3 = \frac{8}{100} + j \frac{6}{100} = \frac{8}{100} + j \frac{6}{100}$$

$$Y_T = Y_1 + Y_2 + Y_3 = \frac{30}{100} - j \frac{10}{100}$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{E}Y_T = 200 \angle 0^\circ \left[ \frac{30}{100} - j \frac{10}{100} \right] = \mathbf{60} - j\mathbf{20}$$

b. Puisque la tension est la même aux bornes de toutes les branches parallèles, on a:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_1} = \frac{200 \angle 0^\circ}{10 \angle 0^\circ} = \mathbf{20} \angle 0^\circ$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_2} = \frac{200 \angle 0^\circ}{5 \angle 53,13^\circ} = \mathbf{40} \angle -53,13^\circ$$

$$\mathbf{I}_3 = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_3} = \frac{200 \angle 0^\circ}{10 \angle -36,87^\circ} = \mathbf{20} \angle +36,87^\circ$$

c.  $\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3$

$$60 - j20 = 20 \angle 0^\circ + 40 \angle -53,13^\circ + 20 \angle +36,87^\circ$$

$$= (20 + j0) + (24 - j32) + (16 + j12)$$

$$\underline{60 - j20 = 60 - j20 \text{ (résultat confirmé)}}$$

d.  $\mathbf{Z}_T = \frac{1}{\mathbf{Y}_T} = \frac{1}{0,3 - j0,1} = \frac{0,3}{(0,3)^2 + (0,1)^2}$

$$+ j \frac{0,1}{(0,3)^2 + (0,1)^2}$$

$$\mathbf{Z}_T = \frac{0,3}{0,1} + j \frac{0,1}{0,1} = \mathbf{3} + j$$

**EXEMPLE 16.7** Voir le réseau illustré à la figure 16.14.

- Calculer l'impédance totale  $\mathbf{Z}_T$ .
- Calculer  $\mathbf{I}$ .



- c. Calculer le facteur de puissance.
- d. Calculer  $I_1$  et  $I_2$ .
- e. Calculer la puissance moyenne fournie au réseau.

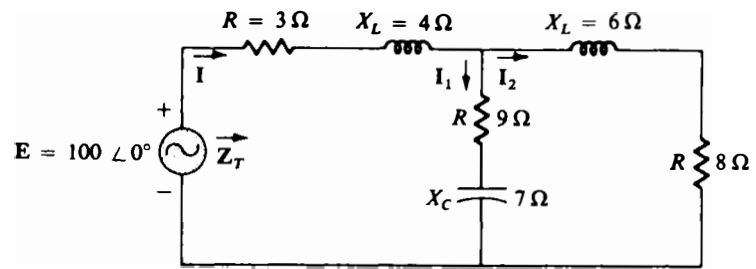


FIG. 16.14

*Solution:*

- a. La figure 16.15 représente le réseau simplifié. On a:

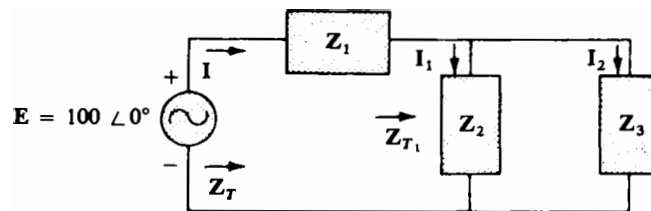


FIG. 16.15

$$\begin{aligned} Z_1 &= 3 + j4 = 5 \angle 53,13^\circ \\ Z_2 &= 9 - j7 = 11,40 \angle -37,87^\circ \\ Z_3 &= 8 + j6 = 10 \angle +36,87^\circ \end{aligned}$$

L'impédance totale est:

$$\begin{aligned} Z_T &= Z_1 + Z_{T_1} \\ &= Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} \\ &= (3 + j4) + \frac{(11,4 \angle -37,87^\circ)(10 \angle 36,87^\circ)}{(9 - j7) + (8 + j6)} \\ &= 3 + j4 + \frac{114 \angle -1,00^\circ}{17,03 \angle -3,37^\circ} \\ &= 3 + j4 + 6,69 \angle 2,37^\circ \\ &= 3 + j4 + 6,68 + j0,28 \\ Z_T &= 9,68 + j4,28 = 10,58 \angle 23,85^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } I &= \frac{E}{Z_T} = \frac{100 \angle 0^\circ}{10,58 \angle 23,85^\circ} = 9,45 \angle -23,85^\circ \\ \text{c. } F_p &= \cos \theta = \frac{R}{Z_T} = \frac{9,68}{10,58} = 0,915 = \cos 23,85^\circ \\ \text{d. } I_2 &= \frac{Z_2 I}{Z_2 + Z_3} = \frac{(11,40 \angle -37,87^\circ)(9,45 \angle -23,85^\circ)}{(9 - j7) + (8 + j6)} \\ &= \frac{107,73 \angle -61,72^\circ}{17 - j1} = \frac{107,73 \angle -61,72^\circ}{17,03 \angle -3,37^\circ} \\ I_2 &= 6,33 \angle -58,35^\circ \end{aligned}$$



La loi des courants donne:

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2$$

ou, encore:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1 &= \mathbf{I} - \mathbf{I}_2 \\ &= (9,45 \angle -23,85^\circ) - (6,33 \angle -58,35^\circ) \\ &= (8,64 - j3,82) - (3,32 - j5,39) \\ \mathbf{I}_1 &= 5,32 + j1,57 = \mathbf{5,55} \angle 16,44^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e. } P_T &= EI \cos \theta \\ &= (100)(9,45) \cos 23,85^\circ \\ &= (945)(0,915) \\ P_T &= \mathbf{864,68 \text{ W}} \end{aligned}$$

### 16.3 RÉSEAUX EN ÉCHELLE

Les réseaux en échelle ont déjà été étudiés au chapitre 6. Dans la présente section, nous appliquons les méthodes qui y sont décrites à l'analyse du réseau en échelle à courant alternatif (figure 16.16). La grandeur inconnue cherchée est le courant  $\mathbf{I}_6$ .

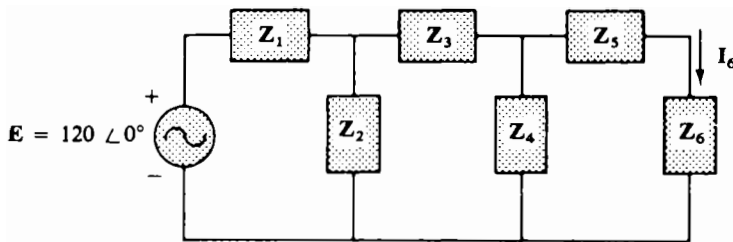


FIG. 16.16

#### Première méthode

La figure 16.17 précise ce que représentent les symboles  $\mathbf{Z}_T$ ,  $\mathbf{Z}'_T$ ,  $\mathbf{Z}''_T$ ,  $\mathbf{I}_1$  et  $\mathbf{I}_3$ . On a:

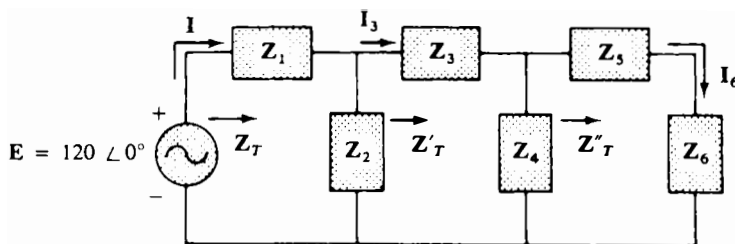


FIG. 16.17

$$\mathbf{Z}''_T = \mathbf{Z}_5 + \mathbf{Z}_6$$

$$\mathbf{Z}'_T = \mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_4 \parallel \mathbf{Z}''_T$$

$$\mathbf{Z}_T = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 \parallel \mathbf{Z}'_T$$



Par suite:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_T}$$

$$\mathbf{I}_3 = \frac{\mathbf{Z}_2(\mathbf{I})}{\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}'_T}$$

$$\mathbf{I}_6 = \frac{\mathbf{Z}_4(\mathbf{I}_3)}{\mathbf{Z}_4 + \mathbf{Z}''_T}$$

## Deuxième méthode

Voir la figure 16.18. On doit déterminer chacune des grandeurs en fonction de  $\mathbf{I}_6$ , grandeur cherchée, en remontant l'échelle à rebours. On arrive ainsi à exprimer la tension  $\mathbf{E}$  en fonction du courant cherché. On a donc:

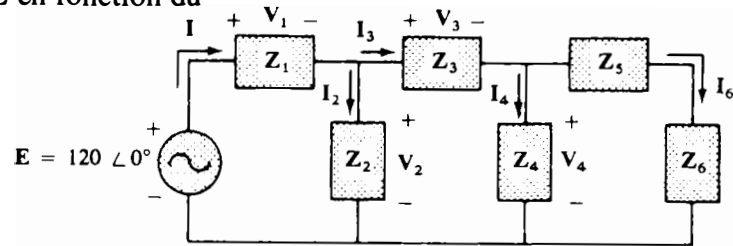


FIG. 16.18

$$\mathbf{I}_6 = \frac{\mathbf{V}_4}{\mathbf{Z}_5 + \mathbf{Z}_6}$$

$$\mathbf{V}_4 = \mathbf{I}_6(\mathbf{Z}_5 + \mathbf{Z}_6)$$

$$\mathbf{I}_4 = \frac{\mathbf{V}_4}{\mathbf{Z}_4} = \mathbf{I}_6 \frac{(\mathbf{Z}_5 + \mathbf{Z}_6)}{\mathbf{Z}_4}$$

$$\mathbf{I}_3 = \mathbf{I}_4 + \mathbf{I}_6 \quad (\text{en termes de } \mathbf{I}_6 \text{ seulement})$$

de sorte que:

$$\mathbf{V}_3 = \mathbf{I}_3 \mathbf{Z}_3 \quad (\text{fonction de } \mathbf{I}_6)$$

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_3 + \mathbf{V}_4 \quad (\text{fonction de } \mathbf{I}_6)$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{Z}_2} \quad (\text{fonction de } \mathbf{I}_6)$$

Ainsi:

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3 \quad (\text{fonction de } \mathbf{I}_6)$$

et:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_1 \mathbf{Z}_1 \quad (\text{fonction de } \mathbf{I}_6)$$

Enfin:

$$\mathbf{E} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$$

dans laquelle les tensions  $\mathbf{V}_1$  et  $\mathbf{V}_2$  sont des fonctions de  $\mathbf{I}_6$ . Il est donc possible de déterminer  $\mathbf{I}_6$ .



## PROBLÈMES

### Section 16.2

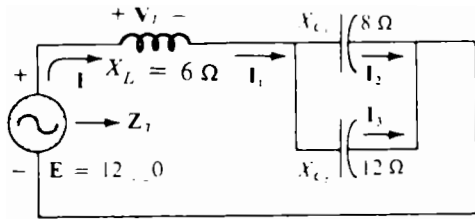


FIG. 16.19

1. Voir le réseau série-parallèle illustré à la figure 16.19. Déterminez:
  - a.  $Z_T$ ;
  - b.  $I$ ;
  - c.  $I_1$ ;
  - d.  $I_2$  et  $I_3$ ;
  - e.  $V_L$ .

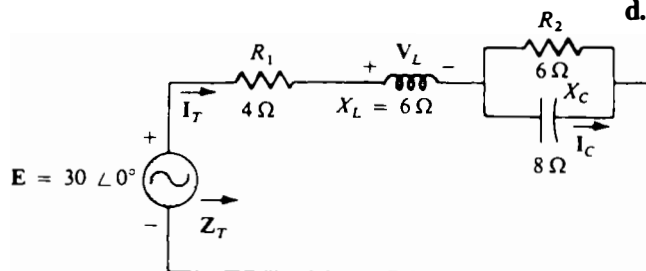


FIG. 16.20

2. Voir le réseau illustré à la figure 16.20.
  - a. Calculez l'impédance totale  $Z_T$ .
  - b. Déterminez le courant  $I_T$ .
  - c. Calculez  $I_C$  à l'aide de la règle du diviseur de courant.
  - d. Calculez  $V_L$  à l'aide de la règle du diviseur de tension.

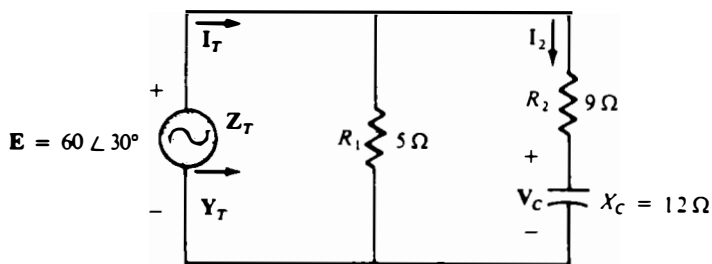


FIG. 16.21

3. Voir le réseau illustré à la figure 16.21.
  - a. Calculez l'impédance totale  $Z_T$  et l'admittance totale  $Y_T$ .
  - b. Calculez le courant  $I_T$ .
  - c. Calculez  $I_2$  à l'aide de la règle du diviseur de tension.
  - d. Calculez  $V_C$ .
  - e. Calculez la puissance moyenne fournie au réseau.

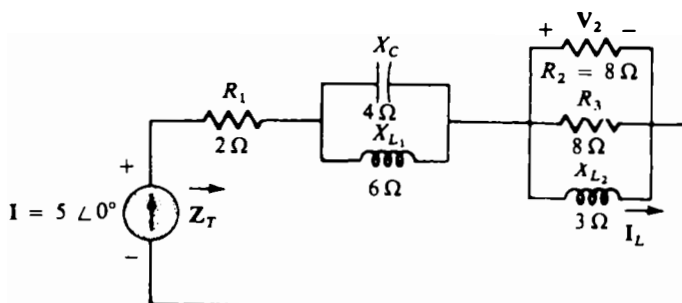


FIG. 16.22

4. Voir le réseau illustré à la figure 16.22.
  - a. Calculez l'impédance totale  $Z_T$ .
  - b. Calculez la tension  $V_2$  et le courant  $I_L$ .
  - c. Calculez le facteur de puissance.



5. Voir le réseau illustré à la figure 16.23.
  - a. Calculez le courant  $I$ .
  - b. Calculez la tension  $V_C$ .
  - c. Calculez la puissance moyenne fournie au réseau.

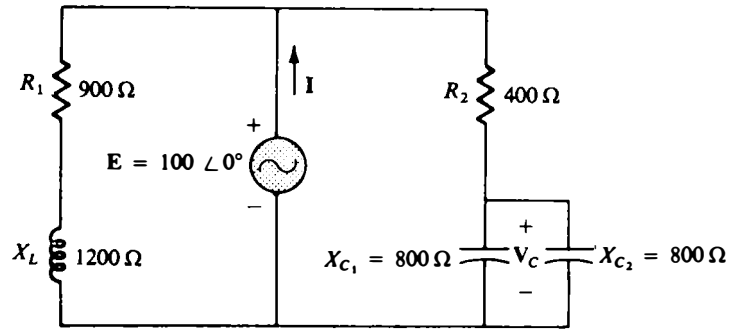


FIG. 16.23

- \*6. Voir le réseau illustré à la figure 16.24.
  - a. Calculez le courant  $I_1$ .
  - b. Calculez la tension  $V_C$  à l'aide de la règle du diviseur de tension.
  - c. Calculez la tension  $V_{ab}$ .

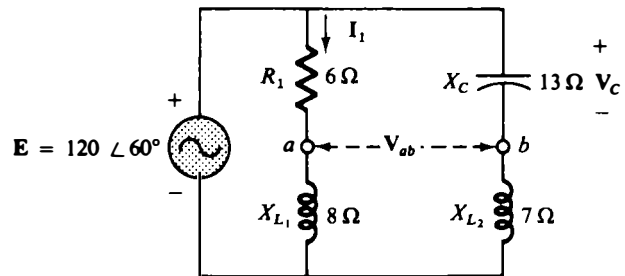


FIG. 16.24

- \*7. Voir le réseau illustré à la figure 16.25.
  - a. Calculez le courant  $I_1$ .
  - b. Calculez la tension  $V_1$ .
  - c. Calculez la puissance moyenne fournie au réseau.

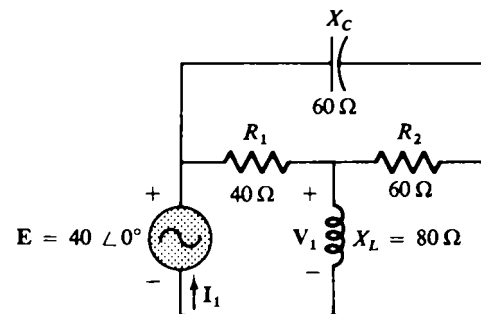


FIG. 16.25

8. Voir le réseau illustré à la figure 16.26.
  - a. Calculez l'impédance totale  $Z_T$  et l'admittance  $Y_T$ .
  - b. Calculez les courants  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$ .
  - c. Vérifiez la loi des courants:  $I_T = I_1 + I_2 + I_3$ .
  - d. Calculez le facteur de puissance et indiquez s'il est capacitif ou inductif.

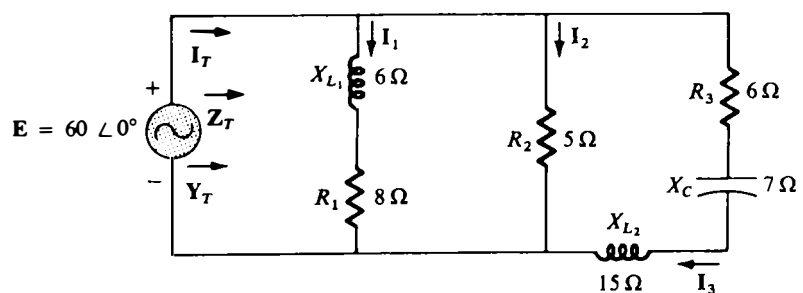


FIG. 16.26





\*9. Voir le réseau illustré à la figure 16.27.

- a. Calculez l'admittance totale  $Y_T$ .
- b. Calculez la tension  $V_1$ .
- c. Calculez le courant  $I_3$ .
- d. Calculez les tensions  $V_2$  et  $V_{ab}$ .

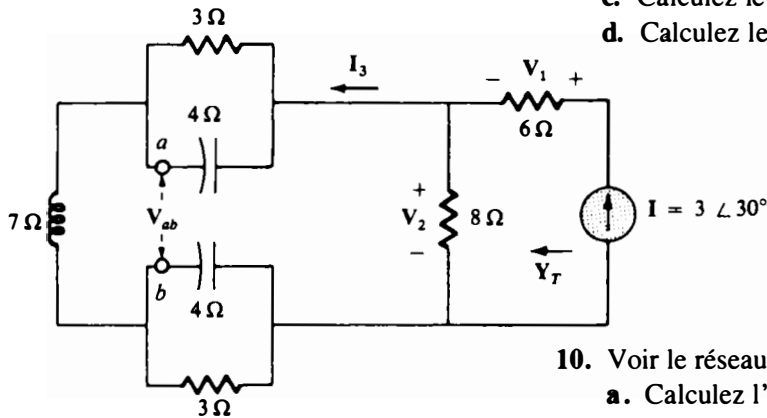


FIG. 16.27

10. Voir le réseau illustré à la figure 16.28.

- a. Calculez l'impédance totale  $Z_T$  et l'admittance  $Y_T$ .
- b. Calculez le courant  $i_T$  au moyen des vecteurs de phase.
- c. Calculez les courants  $i_1$  et  $i_2$  au moyen des vecteurs de phase.
- d. Calculez les tensions  $v_1$  et  $v_{ab}$  au moyen des vecteurs de phase.
- e. Calculez la puissance moyenne fournie au réseau.
- f. Calculez le facteur de puissance et indiquez s'il est capacitif ou inductif.

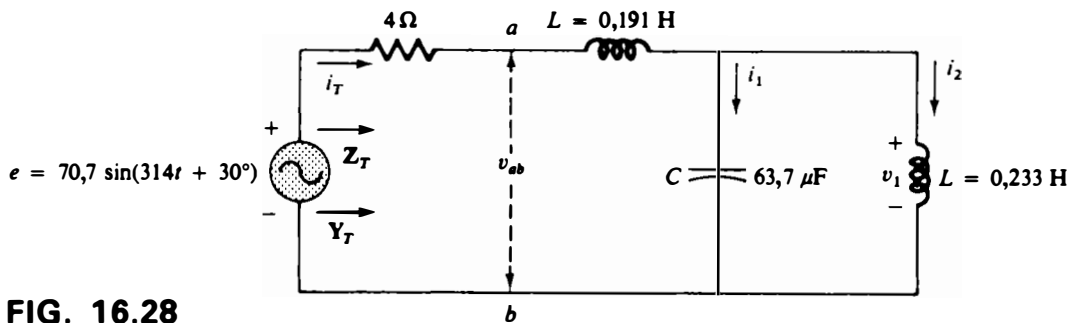


FIG. 16.28

\*11. Calculez le courant  $I$  dans le réseau illustré à la figure 16.29.

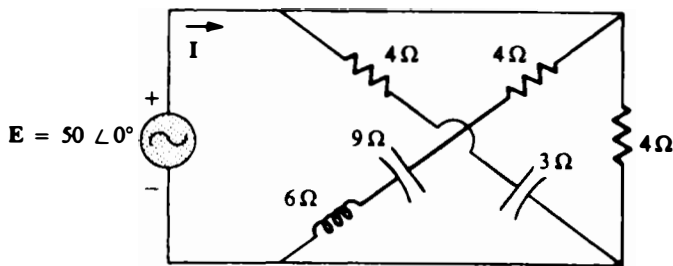


FIG. 16.29

Section 16.3

12. Calculez le courant  $I_5$  dans le réseau illustré à la figure 16.30. À noter l'effet d'un des éléments réactifs sur les calculs.

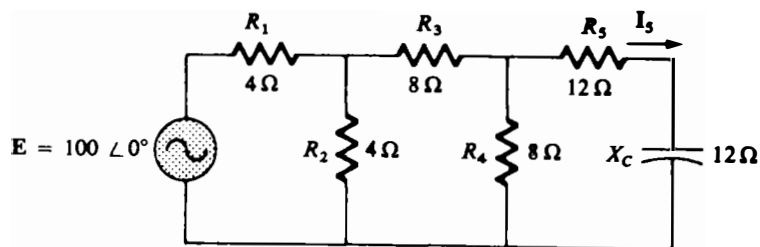


FIG. 16.30



13. Calculez la puissance moyenne fournie à la résistance  $R_5$  du réseau illustré à la figure 16.31.

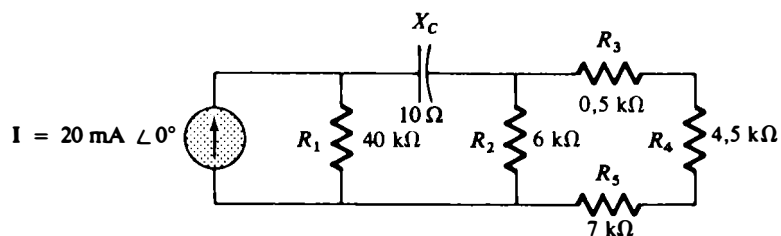


FIG. 16.31

14. Calculez le courant  $I_1$  dans le réseau illustré à la figure 16.32.

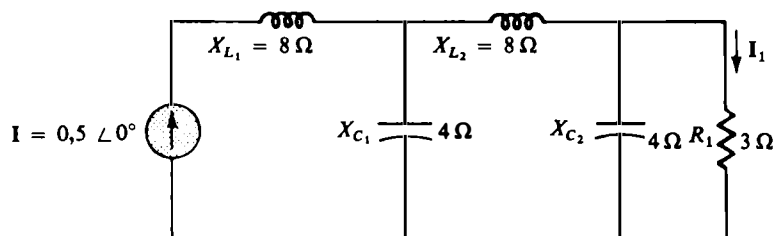


FIG. 16.32

## GLOSSAIRE

**Réseau en échelle** Combinaison répétitive de branches série et de branches parallèles ayant l'apparence d'une échelle.

**Réseau série-parallèle à courant alternatif** Réseau constitué d'une combinaison de branches série et de branches parallèles. Chacune des branches contient un nombre indéterminé d'éléments dont les impédances sont fonction de la fréquence appliquée.



# MÉTHODES D'ANALYSE ET SUJETS CHOISIS (COURANT ALTERNATIF)



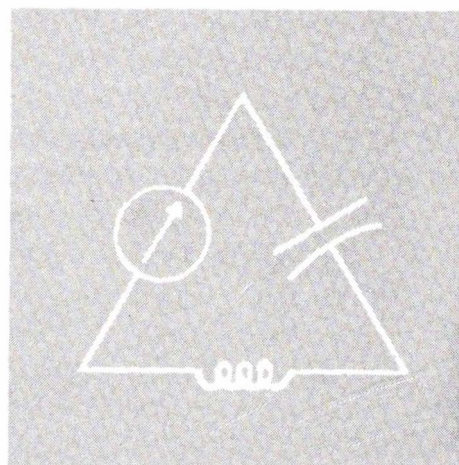
## 17.1 INTRODUCTION

Les méthodes décrites dans les deux derniers chapitres ne peuvent pas être appliquées aux réseaux comptant plusieurs sources qui ne sont ni en série ni en parallèle. Pour faire l'analyse de tels réseaux, il faut avoir recours soit à l'analyse par mailles soit à l'analyse par noeuds. Ces méthodes ayant été étudiées en détail au chapitre 7 dans le cas des réseaux à courant continu, nous consacrons le présent chapitre uniquement aux modifications à apporter pour pouvoir les utiliser avec les réseaux à courant alternatif.

Nous laissons de côté l'analyse par branches puisqu'elle est un cas particulier de l'analyse par mailles. Par ailleurs, on n'aura aucune difficulté à l'appliquer aux circuits alternatifs une fois terminée l'étude du présent chapitre.

Outre les méthodes susmentionnées, nous étudierons également le réseau en pont et les transfigurations  $\Delta$ -Y et Y- $\Delta$ .

Avant de passer à ces points, voyons d'abord ce que sont les sources indépendantes et les sources commandées.





## 17.2 SOURCES INDÉPENDANTES ET SOURCES COMMANDÉES

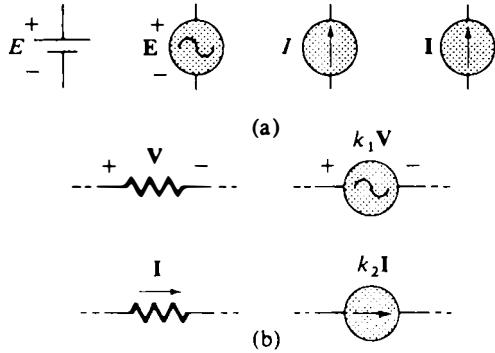


FIG. 17.1 Sources (a) indépendantes et (b) commandées.

Dans les chapitres antérieurs, les réseaux continus et alternatifs étudiés ne comportaient que des *sources indépendantes* (de courant ou de tension) qui étaient représentées par les symboles illustrés à la figure 17.1. Comme leur nom le laisse supposer, ces sources débitent un courant ou établissent une tension *indépendamment des caractéristiques des réseaux* auxquels elles sont raccordées.

La sortie d'une *source commandée* dépend par contre de la grandeur du courant ou de la tension du réseau auquel elle est raccordée. Ainsi, la tension de sortie  $k_1 V$  de la source de tension à la figure 17.1 dépend de la tension  $V$  présente aux bornes de la résistance et de la constante  $k_1$ . De même, le courant  $k_2 I$  de la source de courant dépend du courant  $I$  traversant la résistance et de la constante  $k_2$ .

La figure 17.2 montre les quatre types possibles de sources commandées: source de tension commandée par tension, source de courant commandée par tension, source de tension commandée par courant et source de courant commandée par courant. Notons que la source de tension commandée équivaut à un court-circuit et que la source de courant commandée équivaut à un circuit ouvert si la grandeur de commande ( $V$  ou  $I$ ) est nulle.

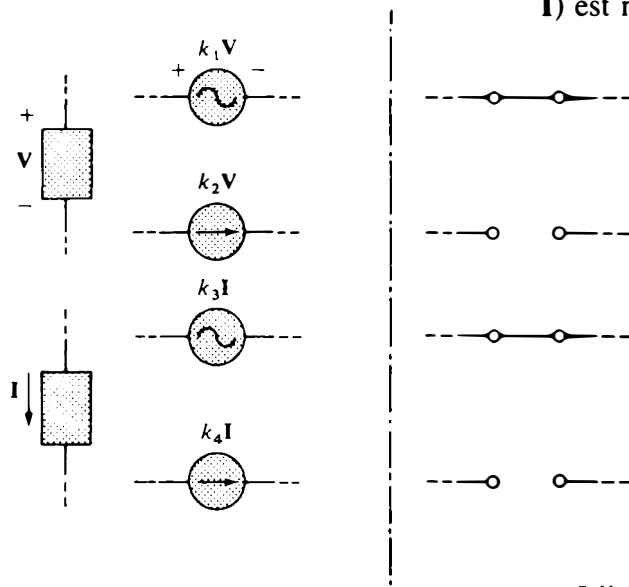


FIG. 17.2 Conditions pour que  $V = 0$  et  $I = 0$  dans une source commandée.

L'intérêt porté aux sources commandées s'explique par le fait que certains composants électroniques, notamment la lampe et le transistor, peuvent être représentés par un *circuit équivalent* comportant une source commandée. Rappelons que le circuit équivalent d'un dispositif est un montage d'éléments actifs (sources) et passifs ( $R$ ,  $L$  et  $C$ ) dont les valeurs sont choisies de sorte que les caractéristiques de sortie et la réponse du montage soient les mêmes que celles du dispositif. Quelques exemples permettront de dégager les caractéristiques fondamentales des circuits équivalents.



### 17.3 TRANSPOSITION DES SOURCES

L'application des méthodes exposées dans le présent chapitre nécessite parfois la transposition d'une source de courant en une source de tension, et inversement d'une source de tension en une source de courant. En courant alternatif, de telles transpositions se font comme en courant continu, mais les grandeurs à considérer sont des vecteurs de phase et des impédances plutôt que simplement des nombres réels et des résistances.

La figure 17.3 montre l'allure générale des sources et des transpositions effectuées.

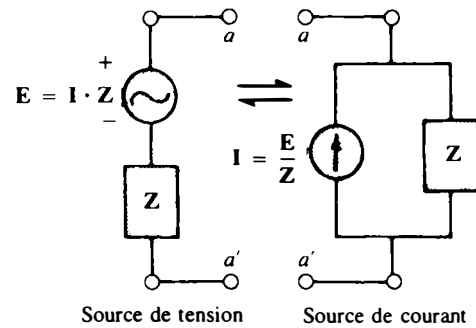


FIG. 17.3

**EXEMPLE 17.1** Transposer la source de tension illustrée à la figure 17.4a en une source de courant.

Solution:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I} &= \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}} = \frac{100 \angle 0^\circ}{5 \angle 53,13^\circ} \\
 &= 20 \angle -53,13^\circ \quad (\text{Fig. 17.4b})
 \end{aligned}$$

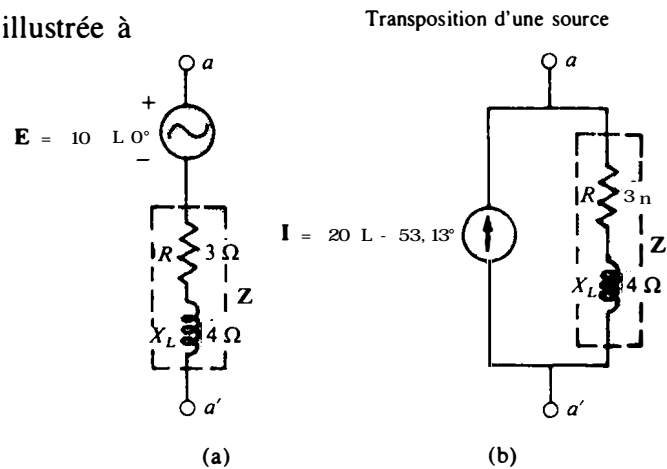


FIG. 17.4

**EXEMPLE 17.2** Transposer la source de courant illustrée à la figure 17.5a en une source de tension.

Solution:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Z} &= \frac{(4 \angle -90^\circ)(6 \angle 90^\circ)}{-j4 + j6} = \frac{24 \angle 0^\circ}{2 \angle 90^\circ} \\
 &= 12 \angle -90^\circ \quad (\text{Fig. 17.5b}) \\
 \mathbf{E} &= \mathbf{IZ} = (10 \angle 60^\circ)(12 \angle -90^\circ) \\
 &= 120 \angle -30^\circ \quad (\text{Fig. 17.5b})
 \end{aligned}$$

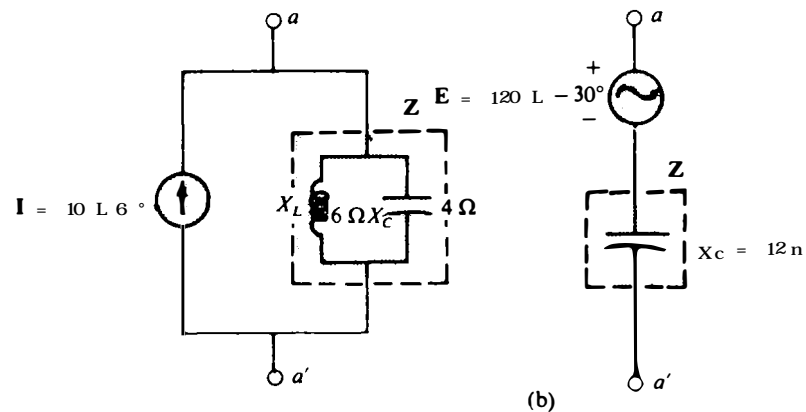


FIG. 17.5

La transposition directe illustrée à la figure 17.3 est possible si la grandeur de commande ( $V$  ou  $I$  à la figure 17.2) est totalement indépendante du réseau transposé. Ainsi  $V$  et  $I$



(figures 17.6 et 17.7 respectivement) dépendent uniquement d'un circuit étranger au réseau transposé. Les transpositions du second type, pour lesquelles  $V$  ou  $I$  dépendent du réseau transposé, seront étudiées aux sections 18.3 et 18.4.

**EXEMPLE 17.3** Transposer la source de tension illustrée à la figure 17.6a en une source de courant.

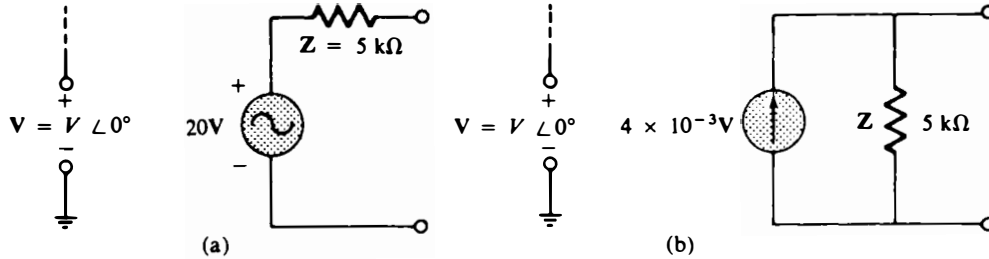


FIG. 17.6

Solution:

$$I = \frac{E}{Z} = \frac{20V \angle 0^\circ}{5 \text{ k}\Omega \angle 0^\circ} = 4 \times 10^{-3}V \angle 0^\circ \quad (\text{Fig. 17.6b})$$

**EXEMPLE 17.4** Transposer la source de courant illustrée à la figure 17.7a en une source de tension.

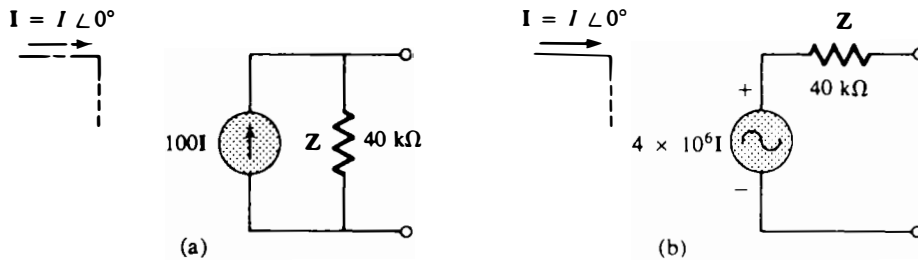


FIG. 17.7

Solution:

$$E = IZ = (100I \angle 0^\circ)(40 \text{ k}\Omega \angle 0^\circ) = 4 \times 10^6 I \angle 0^\circ \quad (\text{Fig. 17.7b})$$

## 17.4 ANALYSE PAR MAILLES (APPROCHE GÉNÉRALE)

Notre première méthode est l'analyse par mailles. Voici les étapes permettant de l'utiliser en courant alternatif.

1. Attribuer un courant distinct de sens horaire à chacune des boucles du réseau.
2. Pour chaque boucle, indiquer les polarités des chutes de tension aux bornes des impédances à partir du sens attribué au courant de la boucle.



3. Pour chaque boucle, appliquer la loi des tensions.
  - a. Si une impédance est traversée par plusieurs courants, le courant net la traversant est égal au courant de la boucle à laquelle est appliquée la loi des tensions, auquel on ajoute les courants des autres boucles traversant l'impédance dans le même sens et auquel on soustrait les courants des autres boucles la traversant dans le sens opposé.
  - b. La polarité d'une source de tension ne dépend pas des courants de boucle qui la traversent.
4. Résoudre le système d'équations linéaires résultant par la méthode des déterminants.

Ces quatre étapes sont celles que nous avons données à la section 7.8; nous n'avons fait que remplacer le mot *résistance* par *impédance*. De fait, les méthodes en courant alternatif seront exactement les mêmes qu'en courant continu, à la différence près qu'il sera question d'impédance et de vecteurs de phase et non plus de résistance et de nombres réels.

La méthode ci-dessus s'applique à tous les réseaux à sources indépendantes, et aux réseaux à sources commandées si la grandeur de commande n'origine pas du réseau qui fait l'objet de l'analyse (si ce n'est pas le cas, il y a lieu de redoubler de prudence).

**EXEMPLE 17.5** Appliquer l'analyse par mailles pour déterminer le courant  $I_1$  à la figure 17.8.

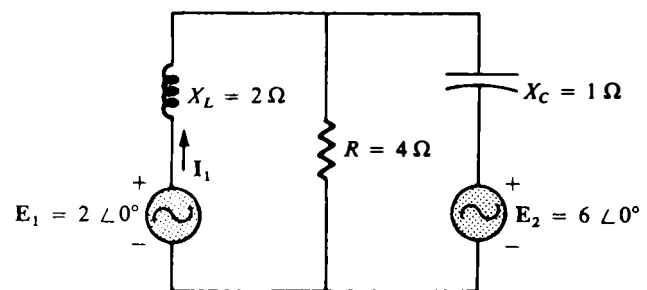


FIG. 17.8

*Solution:* Peu importe la méthode utilisée en courant alternatif, il est conseillé de représenter les résistances et les réactances (et leurs combinaisons) par des impédances affectées d'un indice inférieur, comme cela est fait à la figure 17.9. Une fois obtenue la solution générale en termes de ces impédances, les grandeurs inconnues sont déterminées par substitution des valeurs numériques dans les relations.

On a ainsi pour le réseau simplifié illustré à la figure 17.9:

$$Z_1 = +j2$$

$$Z_2 = 4$$

$$Z_3 = -j$$

Le résultat de l'application des *deux étapes 1 et 2* de la méthode apparaît à la figure.

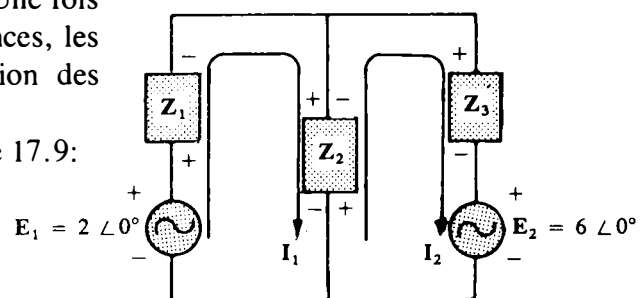


FIG. 17.9





L'étape 3 (application de la loi des tensions à chaque boucle) donne:

$$\begin{aligned} +E_1 - Z_1 I_1 - Z_2(I_1 - I_2) &= 0 \\ -E_2 - Z_3 I_2 - Z_2(I_2 - I_1) &= 0 \end{aligned}$$

ce qu'on peut réécrire de la façon suivante:

$$\begin{aligned} +E_1 - (Z_1 + Z_2)I_1 + Z_2 I_2 &= 0 \\ -E_2 - (Z_3 + Z_2)I_2 + Z_2 I_1 &= 0 \end{aligned}$$

ou encore:

$$\begin{aligned} (Z_1 + Z_2)I_1 - Z_2 I_2 &= E_1 \\ -(Z_2)I_1 + (Z_2 + Z_3)I_2 &= -E_2 \end{aligned}$$

Par la méthode des déterminants, on obtient:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\begin{vmatrix} E_1 & -Z_2 \\ -E_2 & Z_2 + Z_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_1 + Z_2 & -Z_2 \\ -Z_2 & Z_2 + Z_3 \end{vmatrix}} \\ &= \frac{E_1(Z_2 + Z_3) - E_2(Z_2)}{(Z_1 + Z_2)(Z_2 + Z_3) - (Z_2)^2} \\ &= \frac{(E_1 - E_2)Z_2 + E_1 Z_3}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3} \end{aligned}$$

Par substitution des valeurs numériques, on a enfin:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{(2 - 6)(4) + (2)(-j)}{(+j2)(4) + (+j2)(-j) + (4)(-j)} = \frac{-16 - j2}{j8 - j^2 2 - j4} \\ &= \frac{-16 - j2}{2 + j4} = \frac{16,1 \angle -172,87^\circ}{4,47 \angle 63,43^\circ} \\ &= 3,61 \angle -236,30^\circ \text{ ou } 3,61 \angle 123,70^\circ \end{aligned}$$

et, par conséquent:

$$I_1 = 3,61 \angle 123,70^\circ$$

**EXEMPLE 17.6** Appliquer l'analyse par mailles pour déterminer le courant  $I_2$  à la figure 17.10.

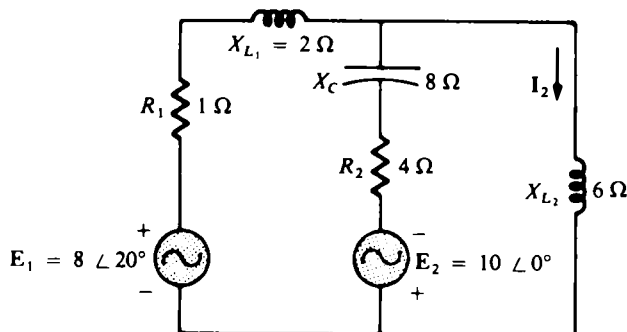


FIG. 17.10



Solution: La figure 17.11 représente le circuit simplifié. On a:

$$\begin{aligned} Z_1 &= 1 + j2 \\ Z_2 &= 4 - j8 \\ Z_3 &= +j6 \end{aligned}$$

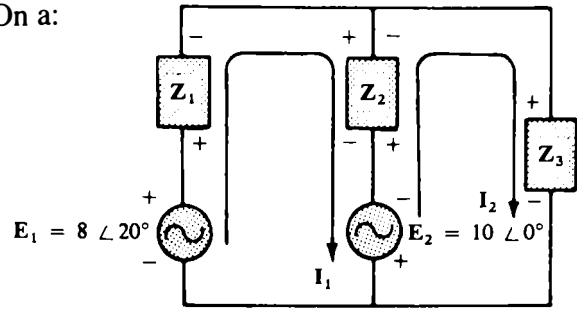


FIG. 17.11

À noter combien l'emploi des impédances simplifie le problème.

Le résultat de l'application des étapes 1 et 2 de la méthode apparaît à la figure.

L'étape 3 (application de la loi des tensions à chaque boucle) donne:

$$\begin{aligned} +E_1 - Z_1 I_1 - Z_2(I_1 - I_2) + E_2 &= 0 \\ -E_2 - Z_3 I_2 - Z_2(I_2 - I_1) &= 0 \end{aligned}$$

ce qu'on peut réécrire de la façon suivante:

$$\begin{aligned} E_1 + E_2 - (Z_1 + Z_2)I_1 + Z_2 I_2 &= 0 \\ -E_2 + Z_2 I_1 - (Z_2 + Z_3)I_2 &= 0 \end{aligned}$$

ou encore:

$$\begin{aligned} (Z_1 + Z_2)I_1 - Z_2 I_2 &= E_1 + E_2 \\ -(Z_2)I_1 + (Z_2 + Z_3)I_2 &= -E_2 \end{aligned}$$

Par la méthode des déterminants, on obtient:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{\begin{vmatrix} Z_1 + Z_2 & E_1 + E_2 \\ -Z_2 & -E_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_1 + Z_2 & -Z_2 \\ -Z_2 & Z_2 + Z_3 \end{vmatrix}} \\ &= \frac{-(Z_1 + Z_2)E_2 + Z_2(E_1 + E_2)}{(Z_1 + Z_2)(Z_2 + Z_3) - Z_2^2} \\ &= \frac{-Z_1 E_2 + Z_2 E_1}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3} \end{aligned}$$

Par substitution des valeurs numériques, on a enfin:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{-(1 + j2)(10 \angle 0^\circ) + (4 - j8)(8 \angle 20^\circ)}{(1 + j2)(4 - j8) + (1 + j2)(+j6) + (4 - j8)(+j6)} \\ &= \frac{-(10 + j20) + (4 - j8)(7,52 + j2,74)}{20 + (j6 - 12) + (j24 + 48)} \\ &= \frac{-(10 + j20) + (52,0 - j49,20)}{56 + j30} = \frac{+42,0 - j69,20}{56 + j30} \\ &= \frac{80,95 \angle -58,74^\circ}{63,53 \angle 28,18^\circ} = 1,27 \angle -86,92^\circ \end{aligned}$$



et, par conséquent:

$$I_2 = 1,27 \angle -86,92^\circ$$

**EXEMPLE 17.7** Écrire les équations de mailles du réseau illustré à la figure 17.12. Ne pas résoudre les équations.

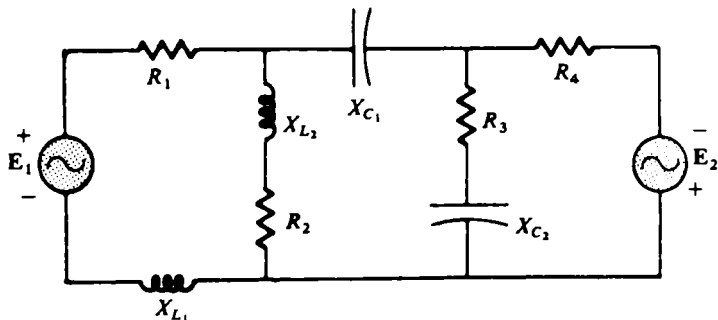


FIG. 17.12

*Solution:* La figure 17.13 représente le circuit simplifié. De nouveau, à noter combien l'emploi des impédances simplifie le problème et permet de se faire une idée nette de la situation. On a:

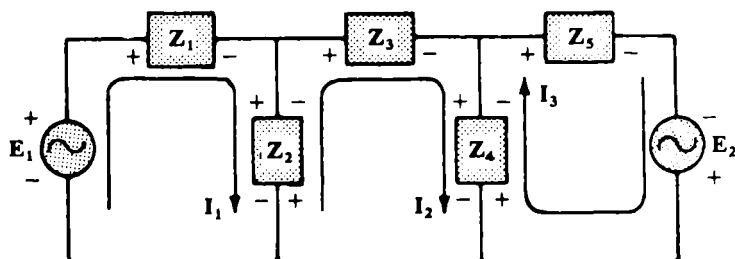


FIG. 17.13

$$\begin{aligned} Z_1 &= R_1 + jX_{L1} \\ Z_2 &= R_2 + jX_{L2} \\ Z_3 &= jX_{C1} \\ Z_4 &= R_3 - jX_{C2} \\ Z_5 &= R_4 \end{aligned}$$

Le résultat de l'application des étapes 1 et 3 de la méthode apparaît à la figure.

L'étape 3 (application de la loi des tensions à chaque boucle) donne:

$$\begin{aligned} +E_1 - I_1Z_1 - Z_2(I_1 - I_2) &= 0 \\ -Z_2(I_2 - I_1) - Z_3(I_2) - Z_4(I_2 - I_3) &= 0 \\ +E_2 - Z_4(I_3 - I_2) - Z_5I_3 &= 0 \end{aligned}$$

ce qu'on peut réécrire de la façon suivante:

$$\begin{array}{rcccc} I_1(Z_1 + Z_2) & - I_2(Z_2) & + 0 & = E_1 \\ I_1(Z_2) & - I_2(Z_2 + Z_3 + Z_4) & + I_3(Z_4) & = 0 \\ 0 & - I_2(Z_4) & + I_3(Z_4 + Z_5) & = E_2 \end{array}$$

En substituant aux impédances leurs expressions en termes des résistances et des réactances, on obtient:



$$\begin{aligned}
 \mathbf{I}_1[R_1 + R_2 + j(X_{L_1} + X_{L_2})] - \mathbf{I}_2(R_2 + jX_{L_2}) + 0 &= \mathbf{E}_1 \\
 \mathbf{I}_1(R_2 + jX_{L_2}) - \mathbf{I}_2[R_2 + R_3 + j(X_{L_2} - X_{C_1} - X_{C_2})] \\
 &\quad + \mathbf{I}_3(R_3 - jX_{C_2}) = 0 \\
 \hline
 0 - \mathbf{I}_2(R_3 - jX_{C_2}) + \mathbf{I}_3(R_3 + R_4 - jX_{C_2}) &= \mathbf{E}_2
 \end{aligned}$$

## 17.5 ANALYSE PAR MAILLES (APPROCHE PROGRAMMÉE)

Nous appliquons maintenant l'approche programmée élaborée à la section 7.9. Rappelons que cette approche permet d'écrire sans erreur et rapidement les équations de mailles.

En voici les cinq étapes.

1. Attribuer un courant de boucle à chaque boucle indépendante (comme il a été fait à la section précédente), et donner à ces courants le sens *horaire*.
2. Le nombre d'équations nécessaires est égal au nombre de boucles indépendantes choisies. Le premier terme (colonne 1) de chaque équation s'obtient par la somme des impédances traversées par le courant de la boucle et par la multiplication de cette somme par le courant.
3. Les autres termes (termes mixtes) du membre gauche de l'équation sont toujours affectés du signe négatif. Le nombre des termes mixtes peut être supérieur à un si le courant de la boucle considérée partage plusieurs éléments avec d'autres courants de boucle. Chaque terme mixte est le produit de l'impédance commune et du courant de l'autre boucle qui passe dans cette impédance.
4. Le terme du membre droit de l'équation est la somme algébrique des sources de tension que traverse le courant de la boucle considérée. Les sources que traverse le courant de la borne négative à la borne positive sont affectées du signe positif, celles que traverse le courant en sens contraire sont affectées du signe négatif.
5. Résoudre le système d'équations par la méthode des déterminants.

La symétrie est également une caractéristique des équations de mailles des réseaux alternatifs sinusoïdaux, comme l'illustre l'exemple 17.7 pour lequel le sens horaire a été attribué aux courants de boucle. Les équations des réseaux contenant des sources commandées *peuvent ne pas* présenter cette caractéristique.

**EXEMPLE 17.8** À l'aide de l'approche programmée, écrire les équations de mailles du réseau étudié à l'exemple 17.6. Faire la comparaison entre les résultats obtenus.

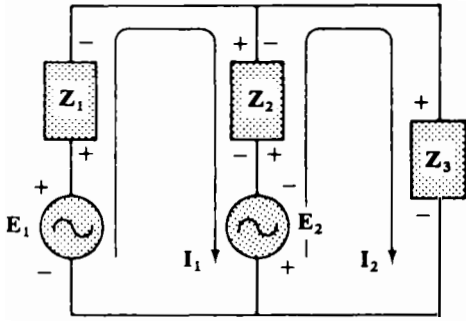


FIG. 17.14

Solution:

Étape 1: Le circuit illustré à la figure 17.11 est redessiné à la figure 17.14. le sens horaire a été attribué aux courants de boucle.

Étapes 2 à 4:

$$I_1: (Z_1 + Z_2)I_1 - (Z_2)I_2 = E_1 + E_2$$

$$I_2: (Z_2 + Z_3)I_2 - (Z_2)I_1 = -E_2$$

ou encore:

$$\begin{aligned} (Z_1 + Z_2)I_1 - (Z_2)I_2 &= E_1 + E_2 \\ -(Z_2)I_1 + (Z_2 + Z_3)I_2 &= -E_2 \end{aligned}$$

À noter la symétrie de part et d'autre de la diagonale. Les résultats sont évidemment les mêmes que ceux que nous avons obtenus à l'exemple 17.6.

EXEMPLE 17.9 À l'aide de l'approche programmée, écrire les équations de mailles du réseau illustré à la figure 17.15.

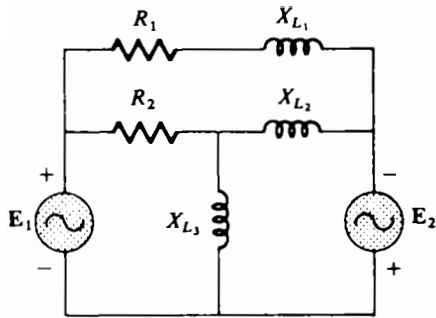


FIG. 17.15

Solution: Le circuit est redessiné à la figure 17.16. Nous avons:

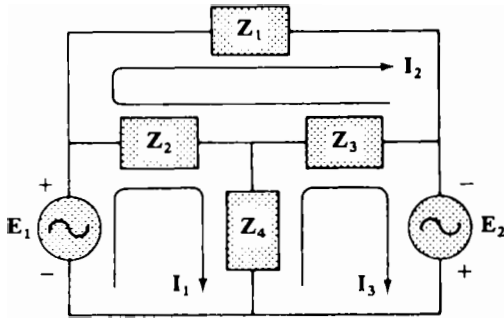


FIG. 17.16

$$Z_1 = R_1 + jX_{L1}$$

$$Z_2 = R_2$$

$$Z_3 = jX_{L2}$$

$$Z_4 = jX_{L3}$$

$$I_1: (Z_2 + Z_4)I_1 - (Z_2)I_2 - (Z_4)I_3 = E_1$$

$$I_2: (Z_1 + Z_2 + Z_3)I_2 - (Z_2)I_1 - (Z_3)I_3 = 0$$

$$I_3: (Z_3 + Z_4)I_3 - (Z_4)I_1 - (Z_3)I_2 = E_2$$

ou encore:

$$\begin{aligned} (Z_2 + Z_4)I_1 - (Z_2)I_2 - (Z_4)I_3 &= E_1 \\ -(Z_2)I_1 + (Z_1 + Z_2 + Z_3)I_2 - (Z_3)I_3 &= 0 \\ -(Z_4)I_1 - (Z_3)I_2 + (Z_3 + Z_4)I_3 &= E_2 \end{aligned}$$

À noter la symétrie de part et d'autre de la diagonale, c'est-à-dire la façon dont apparaissent les coefficients  $-Z_2$ ,  $-Z_4$  et  $-Z_3$ .

EXEMPLE 17.10 Le réseau à transistor illustré à la figure 17.17 peut se redessiner comme à la figure 17.18 lorsqu'on

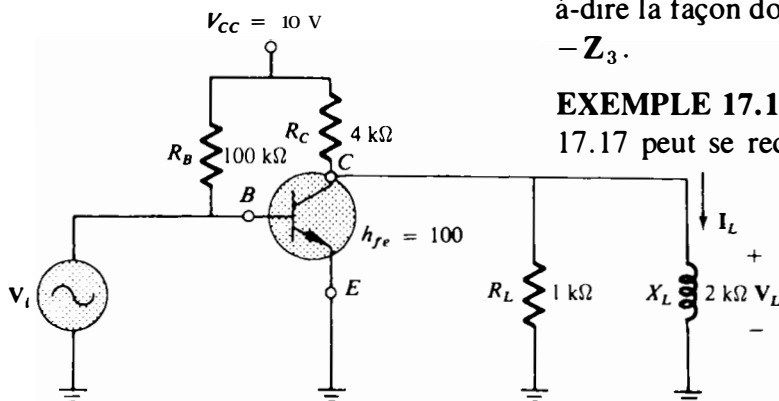


FIG. 17.17

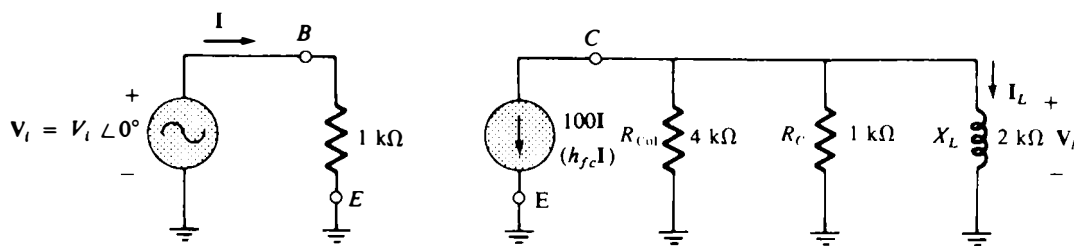


FIG. 17.18

remplace le transistor par son « circuit équivalent » approximatif. Le circuit ainsi obtenu présente une source de courant commandée par le courant d'un réseau isolé et se prête donc à l'application de notre méthode. La grandeur  $h_{fe}$  (constante) est une caractéristique du transistor. À l'aide de l'approche programmée de l'analyse par mailles, déterminer le courant  $I_L$ .

*Solution:* La transposition de la source de courant en une source de tension permet d'écrire:

$$E = IZ = (100I)(4 \text{ k}\Omega \angle 0^\circ) = 4 \times 10^5 I \angle 0^\circ$$

Le réseau illustré à la figure 17.18 peut alors être redessiné comme à la figure 17.19, pour lequel:

$$\begin{aligned} Z_1 &= 4 \text{ k}\Omega \\ Z_2 &= 1 \text{ k}\Omega \\ Z_3 &= 2 \text{ k}\Omega \angle 90^\circ \end{aligned}$$

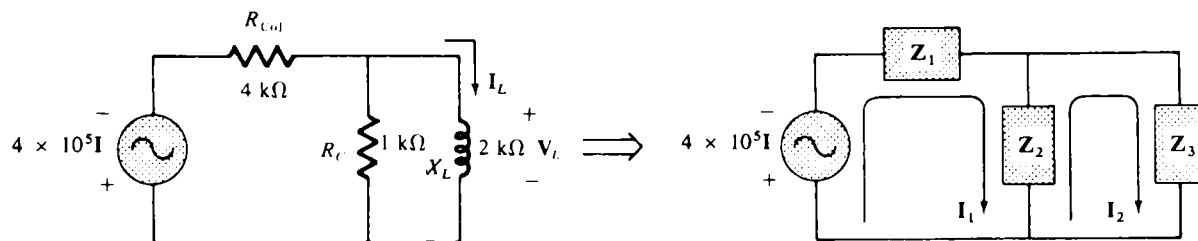


FIG. 17.19

L'approche programmée donne:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1: (\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2)\mathbf{I}_1 - (\mathbf{Z}_2)\mathbf{I}_2 &= -4 \times 10^5 \mathbf{I} \\ \mathbf{I}_2: (\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3)\mathbf{I}_2 - (\mathbf{Z}_2)\mathbf{I}_1 &= 0 \end{aligned}$$

ou encore:

$$\begin{aligned} (\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2)\mathbf{I}_1 - (\mathbf{Z}_2)\mathbf{I}_2 &= -4 \times 10^5 \mathbf{I} \\ -\mathbf{Z}_2\mathbf{I}_1 + (\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3)\mathbf{I}_2 &= 0 \end{aligned}$$

et:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_L &= \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 & -4 \times 10^5 \mathbf{I} \\ -\mathbf{Z}_2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 & -\mathbf{Z}_2 \\ -\mathbf{Z}_2 & \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 \end{vmatrix}} \\ &= \frac{-4 \times 10^5 \mathbf{Z}_2 \mathbf{I}}{\mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_2 \mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_3} \end{aligned}$$



Par substitution des valeurs numériques, on obtient:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_L &= \frac{-4 \times 10^5 (1 \times 10^3) \mathbf{I}}{(4 \times 10^3)(1 \times 10^3) + (1 \times 10^3)(2 \times 10^3 \angle 90^\circ) + (4 \times 10^3)(2 \times 10^3 \angle 90^\circ)} \\ &= \frac{-4 \times 10^2 \mathbf{I}}{4 + j2 + j8} = \frac{-4 \times 10^2 \mathbf{I}}{4 + j10} = \frac{-4 \times 10^2 \mathbf{I}}{10,77 \angle 68,2^\circ} \\ \mathbf{I}_L &= -37,14 \mathbf{I} \angle -68,2^\circ \end{aligned}$$

On a par ailleurs (figure 17.18):

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_i \angle 0^\circ}{1 \text{ k}\Omega}$$

et:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_L &= -37,14 \left( \frac{\mathbf{V}_i \angle 0^\circ}{1 \times 10^3} \right) \angle -68,2^\circ \\ &= -37,14 \times 10^{-3} \mathbf{V}_i \angle -68,2^\circ \\ \mathbf{V}_L &= \mathbf{I}_L \mathbf{Z}_3 = \mathbf{I}_L \mathbf{Z}_3 \\ &= (-37,14 \times 10^{-3} \mathbf{V}_i \angle -68,2^\circ)(2 \times 10^3 \angle 90^\circ) \\ \mathbf{V}_L &= -74,28 \mathbf{V}_i \angle 21,8^\circ \end{aligned}$$

Notons que dans ce cas particulier le gain de l'amplificateur est:

$$\frac{\mathbf{V}_L}{\mathbf{V}_i} \cong 74$$

## 17.6 ANALYSE PAR NOEUDS (APPROCHE PROGRAMMÉE)

Nous conseillons à l'étudiant de revoir la section du chapitre 7 consacrée à l'analyse par noeuds avant de passer à l'étude de l'application de la méthode aux circuits alternatifs, car nous ne répétons ici que les étapes de la méthode, sans les expliquer. Rappelons simplement que l'approche programmée permet d'obtenir directement les équations nodales qu'on résoud par la méthode des déterminants. En voici les cinq étapes.

1. Choisir un noeud de référence et attribuer une tension arbitraire aux  $N - 1$  autres noeuds du réseau.
2. Le nombre d'équations nécessaires à l'analyse du réseau est égal à  $N - 1$ . Le premier terme de chaque équation est obtenu par le produit de la tension associée au noeud considéré par la somme des admittances des branches aboutissant à ce noeud.
3. Les termes mixtes de chaque équation sont toujours affectés du signe moins. L'équation compte plusieurs termes mixtes si le nombre de branches aboutissant au noeud considéré est supérieur à deux. Chaque terme mixte est obtenu par le produit de la tension associée à un noeud par l'admittance de la branche reliant ce noeud au noeud considéré.



4. Le membre droit de chaque équation est la somme algébrique des valeurs des courants débités par les sources des branches aboutissant au noeud considéré. Cette valeur est affectée du signe plus si le courant arrive au noeud considéré, et du signe moins si le courant en part.
5. Résoudre le système d'équations résultant.

Les équations nodales des réseaux contenant des sources indépendantes présentent la caractéristique de symétrie mais celles des réseaux contenant des sources commandées peuvent ne pas la présenter.

**EXEMPLE 17.11** À l'aide de l'analyse par noeuds, déterminer la tension aux bornes de la résistance de  $4 \Omega$  dans le réseau illustré à la figure 17.20.

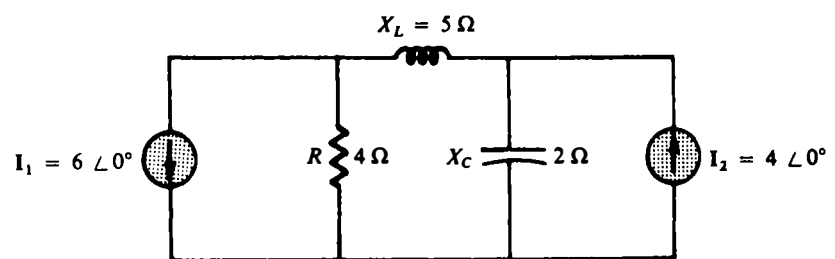


FIG. 17.20

*Solution:* Voir les noeuds choisis à la figure 17.21. Les équations nodales sont:

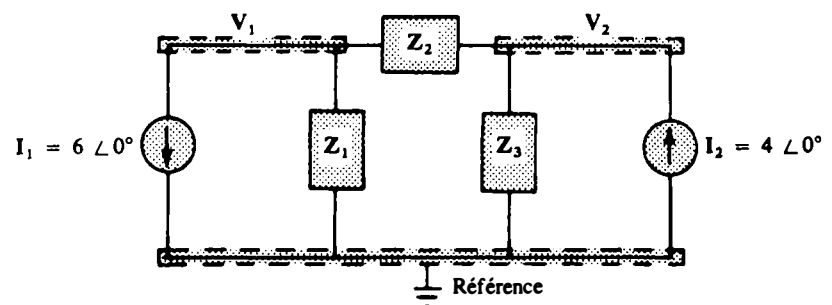


FIG. 17.21

$$Z_1 = 4 \quad Z_2 = j5 \quad Z_3 = -j2$$

$$V_1(Y_1 + Y_2) - V_2(Y_2) = -I_1$$

$$V_2(Y_3 + Y_2) - V_1(Y_2) = +I_2$$

ou encore:

$$V_1(Y_1 + Y_2) - V_2(Y_2) = -I_1$$

$$-V_1(Y_2) + V_2(Y_3 + Y_2) = +I_2$$

$$Y_1 = \frac{1}{Z_1} \quad Y_2 = \frac{1}{Z_2} \quad Y_3 = \frac{1}{Z_3}$$

La méthode des déterminants donne:

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} -I_1 & -Y_2 \\ +I_2 & Y_3 + Y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Y_1 + Y_2 & -Y_2 \\ -Y_2 & Y_3 + Y_2 \end{vmatrix}}$$





$$= \frac{-(Y_3 + Y_2)I_1 + I_2 Y_2}{(Y_1 + Y_2)(Y_3 + Y_2) - Y_2^2}$$

$$= \frac{-(Y_3 + Y_2)I_1 + I_2 Y_2}{Y_1 Y_3 + Y_2 Y_3 + Y_1 Y_2}$$

Par substitution des valeurs numériques, on obtient:

$$V_1 = \frac{-[(1/-j2) + (1/j5)]6 \angle 0^\circ + 4 \angle 0^\circ(1/5)}{(1/4)(1/-j2) + (1/j5)(1/-j2) + (1/4)(1/j5)}$$

$$= \frac{-(+j0,5 - j0,2)6 \angle 0^\circ + 4 \angle 0^\circ(-j0,2)}{(1/-j8) + (1/10) + (1/j20)}$$

$$= \frac{(-0,3 \angle 90^\circ)(6 \angle 0^\circ) + (4 \angle 0^\circ)(0,2 \angle -90^\circ)}{j0,125 + 0,1 - j0,05}$$

$$= \frac{-1,8 \angle 90^\circ + 0,8 \angle -90^\circ}{0,1 + j0,075}$$

$$= \frac{2,6 \angle -90^\circ}{0,125 \angle 36,87^\circ}$$

$$V_1 = 20,80 \angle -126,87^\circ$$

**EXEMPLE 17.12** Écrire les équations nodales du réseau illustré à la figure 17.22. À noter que ce réseau contient une source de tension.

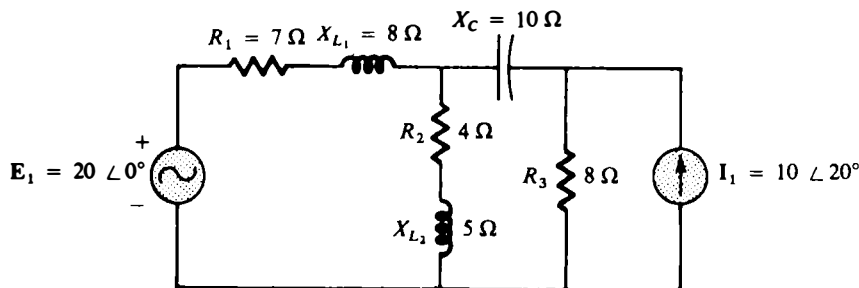


FIG. 17.22

*Solution:* Le circuit est redessiné à la figure 17.23. On a:

$$Z_1 = 7 + j8 \quad Z_2 = 4 + j5$$

$$Z_3 = -j10 \quad Z_4 = 8$$

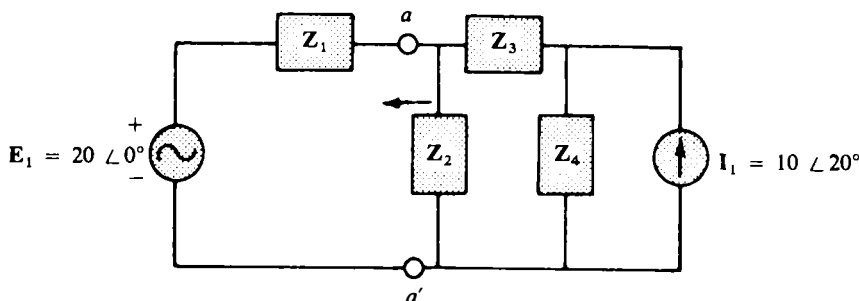


FIG. 17.23



La figure 17.24 représente le réseau obtenu une fois la source de tension transposée en une source de courant, avec les noeuds choisis. À noter la simplification que permet l'emploi des impédances. Travailler directement à partir du réseau illustré à la figure 17.22 serait difficile et conduirait probablement à des erreurs.

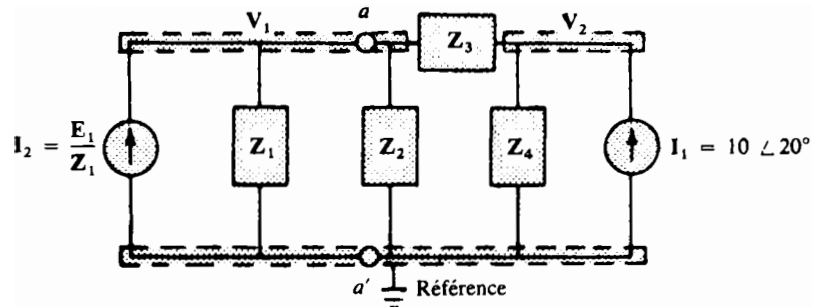


FIG. 17.24

Les équations nodales sont:

$$\begin{aligned} V_1(Y_1 + Y_2 + Y_3) - V_2(Y_3) &= +I_2 \\ V_2(Y_3 + Y_4) - V_1(Y_3) &= +I_1 \end{aligned}$$

$$Y = \frac{1}{Z_1} \quad Y_2 = \frac{1}{Z_2} \quad Y_3 = \frac{1}{Z_3} \quad Y_4 = \frac{1}{Z_4}$$

et peuvent se réécrire de la façon suivante:

$$\begin{aligned} V_1(Y_1 + Y_2 + Y_3) - V_2(Y_3) &= +I_2 \\ -V_1(Y_3) + V_2(Y_3 + Y_4) &= +I_1 \end{aligned}$$

$$Y_1 = \frac{1}{7 + j8} \quad Y_2 = \frac{1}{4 + j5} \quad Y_3 = \frac{1}{-j10} \quad Y_4 = \frac{1}{8}$$

$$I_2 = \frac{20 \angle 0^\circ}{7 + j8} \quad I_1 = 10 \angle 20^\circ$$

**EXEMPLE 17.13** Écrire les équations nodales du réseau illustré à la figure 17.25.

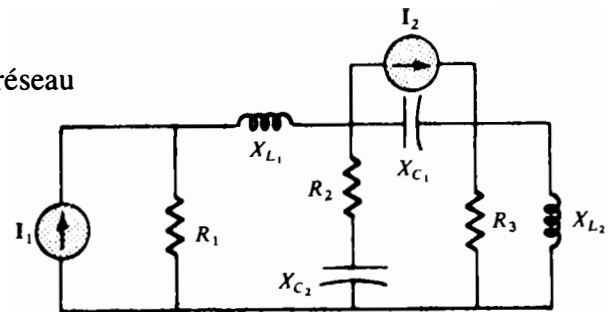


FIG. 17.25

*Solution:* Une fois les noeuds judicieusement choisis (figure 17.26), les équations sont:

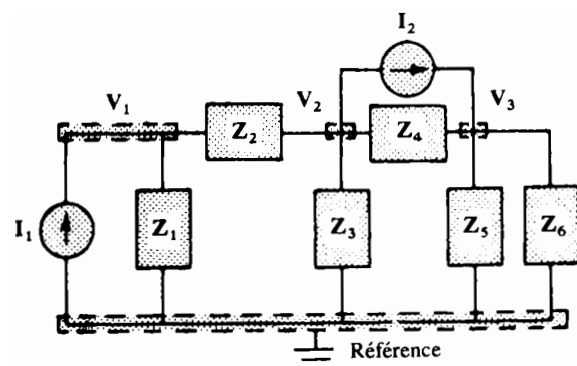


FIG. 17.26



$$\begin{aligned}
 Z_1 &= R_1 & Z_2 &= jX_{L1} & Z_3 &= R_2 - jX_{C2} \\
 Z_4 &= -jX_{C1} & Z_5 &= R_3 & Z_6 &= jX_{L2} \\
 V_1(Y_1 + Y_2) - V_2(Y_2) &= +I_1 \\
 V_2(Y_2 + Y_3 + Y_4) - V_1(Y_2) - V_3(Y_4) &= -I_2 \\
 V_3(Y_4 + Y_5 + Y_6) - V_2(Y_4) &= +I_2
 \end{aligned}$$

et peuvent se réécrire de la façon suivante:

$$\begin{aligned}
 V_1(Y_1 + Y_2) - V_2(Y_2) + 0 &= +I_1 \\
 -V_1(Y_2) + V_2(Y_2 + Y_3 + Y_4) - V_3(Y_4) &= -I_2 \\
 0 - V_2(Y_4) + V_3(Y_4 + Y_5 + Y_6) &= +I_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= \frac{1}{R_1} & Y_2 &= \frac{1}{jX_{L1}} & Y_3 &= \frac{1}{R_2 - jX_{C2}} \\
 Y_4 &= \frac{1}{-jX_{C1}} & Y_5 &= \frac{1}{R_3} & Y_6 &= \frac{1}{jX_{L2}}
 \end{aligned}$$

À noter la symétrie de part et d'autre de la diagonale de ces équations et de celles des exemples précédents.

**EXEMPLE 17.14** Appliquer l'analyse par noeuds au réseau étudié à l'exemple 17.11, c'est-à-dire déterminer la tension  $V_L$  du réseau illustré à la figure 17.18 (reproduit à la figure 17.27 par souci de commodité). Comparer les résultats obtenus.

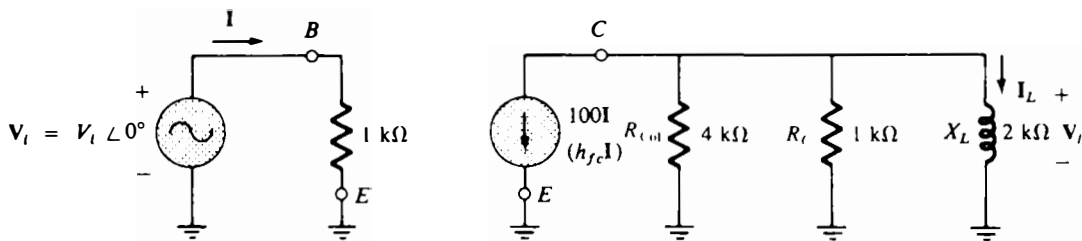


FIG. 17.27

*Solution:* Nul besoin ici de transposer la source. La figure 17.28 représente le réseau redessiné une fois les noeuds choisis et les impédances identifiées.

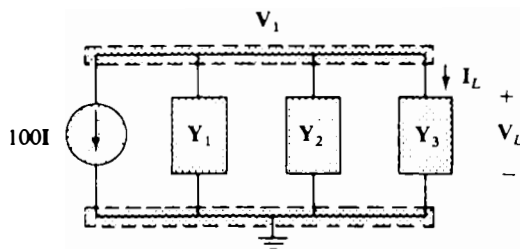


FIG. 17.28

L'approche programmée donne:

$$Y_1 = \frac{1}{Z_1} = \frac{1}{4 \text{ k}\Omega} = 0,25 \times 10^{-3} \angle 0^\circ = G_1$$

$$Y_2 = \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{1 \text{ k}\Omega} = 1,0 \times 10^{-3} \angle 0^\circ = G_2$$



$$\begin{aligned}
 Y_3 &= \frac{1}{Z_3} = \frac{1}{2 \text{ k}\Omega \angle 90^\circ} = 0,5 \times 10^{-3} \angle -90^\circ \\
 &= -j0,5 \times 10^{-3} = B_L \\
 V_1: (Y_1 + Y_2 + Y_3)V_1 &= -100I
 \end{aligned}$$

et:

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \frac{-100I}{Y_1 + Y_2 + Y_3} \\
 &= \frac{-100I}{(0,25 \times 10^{-3}) + (1 \times 10^{-3}) + (-j0,5 \times 10^{-3})} \\
 &= \frac{-100 \times 10^3 I}{1,25 - j0,5} = \frac{-100 \times 10^3 I}{1,3463 \angle -21,80^\circ} \\
 &= -74,28 \times 10^3 I \angle 21,80^\circ \\
 &= -74,28 \times 10^3 \left( \frac{V_i}{1 \text{ k}\Omega} \right) \angle 21,80^\circ
 \end{aligned}$$

$$V_1 = V_L = -74,28 V_i \angle 21,80^\circ$$

résultat identique à celui que nous avons obtenu à l'exemple 17.10.

**EXEMPLE 17.15** Le montage à transistors illustré à la figure 17.29 devient d'apparence extrêmement semblable à celle du réseau illustré à la figure 17.30, une fois faite la substitution des circuits équivalents des transistors. Les grandeurs  $h_1$  et  $h_2$  sont des constantes caractéristiques des transistors. Déterminer la tension  $V_C$  dans le réseau illustré à la figure 17.30. Les valeurs des résistances ne sont pas typiques: elles ont été choisies pour simplifier les calculs. Dans ce cas précis, l'une des grandeurs de commande est rattachée au réseau à analyser. On redoublera donc de prudence en appliquant la méthode.

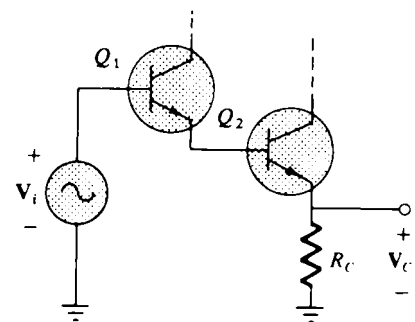


FIG. 17.29

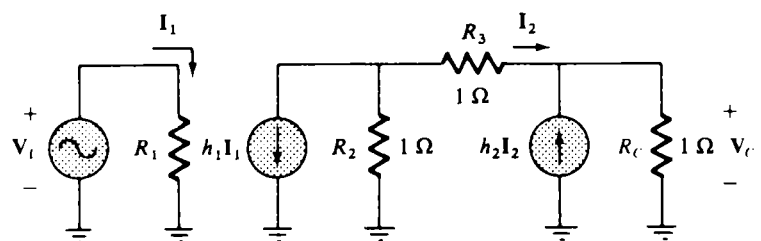


FIG. 17.30

*Solution:* Le réseau est redessiné à la figure 17.31. À noter que la grandeur de commande est:

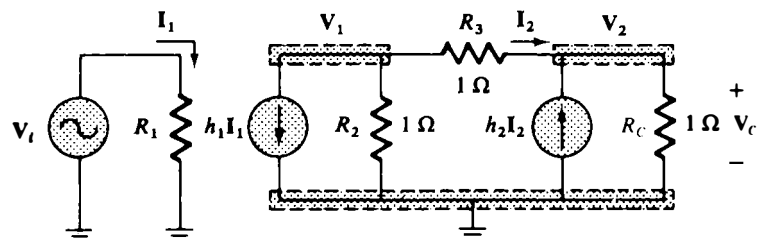


FIG. 17.31



$$I_2 = \frac{V_1 - V_2}{R_3} = \frac{V_1 - V_2}{1} = V_1 - V_2$$

et que:

$$I_1 = \frac{V_i}{R_1} = \frac{V_i}{1} = V_i$$

L'approche programmée donne:

$$\begin{cases} V_1: V_1(1 + 1) - (1)V_2 = -h_1 I_1 \\ V_2: V_2(1 + 1) - (1)V_1 = h_2 I_2 \end{cases}$$

et:

$$\begin{cases} 2V_1 - V_2 = -h_1 V_i \\ 2V_2 - V_1 = h_2(V_1 - V_2) = h_2 V_1 - h_2 V_2 \end{cases}$$

de sorte que:

$$2V_1 - V_2 = -h_1 V_i$$

et:

$$-V_1 - h_2 V_1 + 2V_2 + h_2 V_2 = 0$$

On a encore:

$$2V_1 - V_2 = -h_1 V_i$$

$$-(1 + h_2)V_1 + (2 + h_2)V_2 = 0$$

et:

$$\begin{aligned} V_2 = V_c &= \frac{\begin{vmatrix} 2 & -h_1 V_i \\ -(1 + h_2) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -(1 + h_2) & (2 + h_2) \end{vmatrix}} \\ &= \frac{-h_1(1 + h_2)V_i}{2(2 + h_2) - (1 + h_2)} \\ &= \frac{-h_1(1 + h_2)V_i}{4 + 2h_2 - 1 - h_2} \end{aligned}$$

de sorte que:

$$V_c = \left[ -\frac{h_1(1 + h_2)}{3 + h_2} \right] V_i$$

Pour:

$$h_1 = h_2 = 100 \quad (\text{valeur typique})$$

$$V_c = \frac{-100(101)}{3 + 100} V_i \cong -98V_i$$



### 17.7 RÉSEAUX EN PONT (courant alternatif)

À la section 7.13, nous avons étudié avec amples détails le montage de base des réseaux en pont à courant alternatif. Nous poursuivons ici cette étude en nous intéressant aux réseaux constitués d'éléments réactifs, auxquels sont appliqués une tension alternative ou un courant alternatif.

Notre examen portera sur les diverses formes familières du réseau en pont, auxquelles nous appliquerons l'approche programmée de l'analyse par mailles et de l'analyse par noeuds, et sur leurs conditions d'équilibre.

Commençons par le réseau illustré à la figure 17.32. L'analyse par mailles appliquée au réseau redessiné à la figure 17.33, pour lequel:

$$Z_1 = \frac{1}{Y_1} = \frac{1}{G_1 + jB_C} = \frac{G_1}{G_1^2 + B_C^2} - j \frac{B_C}{G_1^2 + B_C^2}$$

$$Z_2 = R_2$$

$$Z_3 = R_3$$

$$Z_4 = R_4 + jX_L$$

$$Z_5 = R_5$$

donne:

$$\begin{aligned} (Z_1 + Z_3)I_1 - (Z_1)I_2 - (Z_3)I_3 &= E \\ (Z_1 + Z_2 + Z_5)I_2 - (Z_1)I_1 - (Z_5)I_3 &= 0 \\ (Z_3 + Z_4 + Z_5)I_3 - (Z_3)I_1 - (Z_5)I_2 &= 0 \end{aligned}$$

Ces équations se réécrivent de la façon suivante:

$$\begin{aligned} (Z_1 + Z_3)I_1 - (Z_1)I_2 - (Z_3)I_3 &= E \\ -(Z_1)I_1 + (Z_1 + Z_2 + Z_5)I_2 - (Z_5)I_3 &= 0 \\ -(Z_3)I_1 - (Z_5)I_2 + (Z_3 + Z_4 + Z_5)I_3 &= 0 \end{aligned}$$

On notera la symétrie de part et d'autre de la diagonale. À l'équilibre on a  $I_{Z_5} = 0$  A, et par conséquent:

$$I_{Z_5} = I_2 - I_3 = 0$$

La méthode des déterminants (appliquée aux équations ci-dessus) permet d'écrire:

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} Z_1 + Z_3 & E & -Z_3 \\ -Z_1 & 0 & -Z_5 \\ -Z_3 & 0 & (Z_3 + Z_4 + Z_5) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_1 + Z_3 & -Z_1 & -Z_3 \\ -Z_1 & Z_1 + Z_2 + Z_5 & -Z_5 \\ -Z_3 & -Z_5 & Z_3 + Z_4 + Z_5 \end{vmatrix}} = \frac{E(Z_1 Z_3 + Z_1 Z_4 + Z_1 Z_5 + Z_3 Z_5)}{\Delta}$$

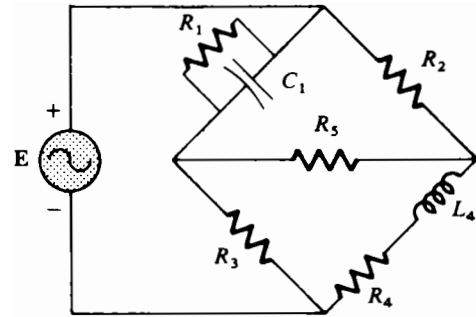


FIG. 17.32 Pont de Maxwell.

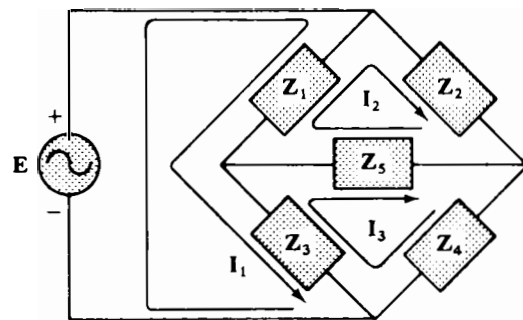


FIG. 17.33

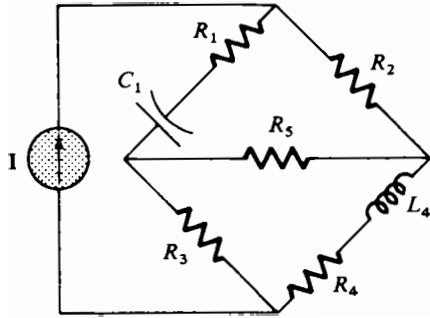


FIG. 17.34 Pont de Hay.

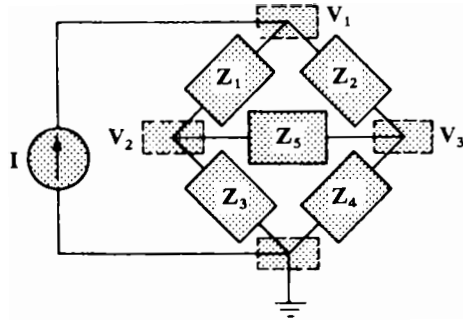


FIG. 17.35

où  $\Delta$  représente le déterminant du dénominateur. De façon semblable, on a:

$$I_3 = \frac{E(Z_1 Z_3 + Z_3 Z_2 + Z_1 Z_5 + Z_3 Z_5)}{\Delta}$$

et:

$$I_{Z_5} = I_2 - I_3 = \frac{E(Z_1 Z_4 - Z_3 Z_2)}{\Delta}$$

La condition,  $I_{Z_5} = 0$ , entraîne que (pour un  $\Delta$  fini non nul):

$$\boxed{Z_1 Z_4 = Z_3 Z_2} \quad I_{Z_5} = 0 \quad (17.1)$$

Nous approfondirons l'analyse de cette condition plus loin dans la présente section.

Appliquons maintenant l'analyse par noeuds au réseau illustré à la figure 17.34. Dans le réseau redessiné à la figure 17.35, on a:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{1}{Z_1} = \frac{1}{R_1 - jX_C} & Y_2 &= \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{R_2} \\ Y_3 &= \frac{1}{Z_3} = \frac{1}{R_3} & Y_4 &= \frac{1}{Z_4} = \frac{1}{R_4 + jX_L} \\ Y_5 &= \frac{1}{R_5} \end{aligned}$$

et:

$$\begin{aligned} (Y_1 + Y_2)V_1 - (Y_1)V_2 - (Y_2)V_3 &= I \\ (Y_1 + Y_3 + Y_5)V_2 - (Y_1)V_1 - (Y_5)V_3 &= 0 \\ (Y_2 + Y_4 + Y_5)V_3 - (Y_2)V_1 - (Y_5)V_2 &= 0 \end{aligned}$$

Ces équations se réécrivent de la façon suivante:

$$\begin{aligned} (Y_1 + Y_2)V_1 - (Y_1)V_2 - (Y_2)V_3 &= I \\ -(Y_1)V_1 + (Y_1 + Y_3 + Y_5)V_2 - (Y_5)V_3 &= 0 \\ -(Y_2)V_1 - (Y_5)V_2 + (Y_2 + Y_4 + Y_5)V_3 &= 0 \end{aligned}$$

Il y a ici aussi symétrie de part et d'autre de la diagonale. À l'équilibre  $V_{Z_5} = 0$  V et:

$$V_{Z_5} = V_2 - V_3 = 0$$

Par la méthode des déterminants, on a:

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} Y_1 + Y_2 & I & -Y_2 \\ -Y_1 & 0 & -Y_5 \\ -Y_2 & 0 & (Y_2 + Y_4 + Y_5) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Y_1 + Y_2 & -Y_1 & -Y_2 \\ -Y_1 & (Y_1 + Y_3 + Y_5) & -Y_5 \\ -Y_2 & -Y_5 & (Y_2 + Y_4 + Y_5) \end{vmatrix}}$$



$$= \frac{I(Y_1 Y_3 + Y_1 Y_4 + Y_1 Y_5 + Y_3 Y_5)}{\Delta}$$

De façon semblable, on a:

$$V_3 = \frac{I(Y_1 Y_3 + Y_3 Y_2 + Y_1 Y_5 + Y_3 Y_5)}{\Delta}$$

Remarquons la similitude entre ces équations et celles qu'a données l'analyse par mailles. On a ensuite:

$$V_{Z_5} = V_2 - V_3 = \frac{I(Y_1 Y_4 - Y_3 Y_2)}{\Delta}$$

La condition,  $V_{Z_5} = 0$ , entraîne que (pour un  $\Delta$  fini non nul):

$$\boxed{Y_1 Y_4 = Y_3 Y_2} \quad V_{Z_5} = 0 \quad (17.2)$$

Cependant, les substitutions  $Y_1 = 1/Z_1$ ,  $Y_2 = 1/Z_2$ ,  $Y_3 = 1/Z_3$  et  $Y_4 = 1/Z_4$  permettent d'écrire:

$$\frac{1}{Z_1 Z_4} = \frac{1}{Z_3 Z_2}$$

ou:

$$\boxed{Z_1 Z_4 = Z_3 Z_2} \quad V_{Z_5} = 0$$

résultat qui confirme l'équation (17.1).

Examinons maintenant en détail les conditions d'équilibre à l'aide du réseau illustré à la figure 17.36, pour lequel il est précisé que  $I = 0$  et  $V = 0$ .

Puisque  $I = 0$ , on a:

$$\boxed{I_1 = I_3} \quad (17.3a)$$

et:

$$\boxed{I_2 = I_4} \quad (17.3b)$$

En outre, comme  $V = 0$ , on a:

$$\boxed{I_1 Z_1 = I_2 Z_2} \quad (17.3c)$$

et:

$$\boxed{I_3 Z_3 = I_4 Z_4} \quad (17.3d)$$

La substitution des relations entre les courants dans l'équation (17.3d) donne:

$$I_1 Z_3 = I_2 Z_4$$

et:

$$I_2 = \frac{Z_3}{Z_4} I_1$$

En reportant l'expression de  $I_2$  dans l'équation (17.3c), on a maintenant:

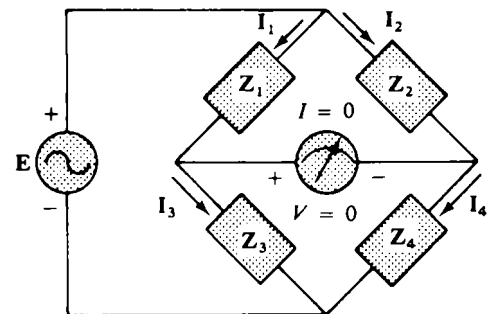


FIG. 17.36





$$I_1 Z_1 = \left( \frac{Z_3}{Z_4} I_1 \right) Z_2$$

et:

$$Z_1 Z_4 = Z_2 Z_3$$

relation qui exprime la condition d'équilibre. Réécrite sous la forme:

$$\boxed{\frac{Z_1}{Z_3} = \frac{Z_2}{Z_4}} \quad (17.4)$$

elle correspond à l'équation (7.7a) obtenue pour les réseaux résistifs à courant continu.

Dans le réseau illustré à la figure 17.34, appelé *pont de Hay*, lorsque  $Z_5$  est remplacée par un galvanomètre sensible, on a:

$$Z_1 = R_1 + jX_C$$

$$Z_2 = R_2$$

$$Z_3 = R_3$$

$$Z_4 = R_4 + jX_L$$

Ce réseau est utilisé pour la mesure de la résistance et de l'inductance des bobines dont la résistance est de beaucoup inférieure à la réactance  $X_L$ .

L'équation (17.4) devient donc:

$$Z_2 Z_3 = Z_4 Z_1$$

$$R_2 R_3 = (R_4 + jX_L)(R_1 - jX_C)$$

ou encore:

$$R_2 R_3 = R_1 R_4 + j(R_1 X_L - R_4 X_C) + X_C X_L$$

de sorte que:

$$R_2 R_3 + j0 = (R_1 R_4 + X_C X_L) + j(R_1 X_L - R_4 X_C)$$

L'égalité entre les deux membres de l'équation exige l'égalité entre les parties réelles et entre les parties imaginaires. Les conditions d'équilibre du pont de Hay s'écrivent alors ainsi:

$$\boxed{R_2 R_3 = R_1 R_4 + X_C X_L} \quad (17.5a)$$

et:

$$\boxed{0 = R_1 X_L - R_4 X_C} \quad (17.5b)$$

En faisant les substitutions suivantes:

$$X_L = \omega L$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

$$X_C X_L = \left( \frac{1}{\omega C} \right) (\omega L) = \frac{L}{C}$$



on peut aussi écrire:

$$R_2 R_3 = R_1 R_4 + \frac{L}{C}$$

$$R_1 \omega L = \frac{R_4}{\omega C}$$

En substituant enfin l'expression de  $R_4$ :

$$R_4 = \omega^2 L C R_1$$

dans l'équation antérieure, on a:

$$R_2 R_3 = R_1 (\omega^2 L C R_1) + \frac{L}{C}$$

La multiplication par  $C$  et la mise en facteur donnent:

$$C R_2 R_3 = L (\omega^2 C^2 R_1^2 + 1)$$

et:

$$L = \frac{C R_2 R_3}{1 + \omega^2 C^2 R_1^2} \quad (17.6a)$$

ou encore, après manipulation algébrique:

$$R_4 = \frac{\omega^2 C^2 R_1 R_2 R_3}{1 + \omega^2 C^2 R_1^2} \quad (17.6b)$$

Les équations (17.5) et (17.6) expriment les conditions d'équilibre du pont de Hay. Soulignons que ces dernières dépendent de la fréquence. Pour une bobine donnée, les valeurs des éléments résistifs et de l'élément capacitif permettant de réaliser l'équilibre ne sont donc pas les mêmes à toutes les fréquences. Notons enfin que les équations (17.6a) et (17.6b) permettent de déterminer la résistance et l'inductance d'une bobine montée dans le pont de Hay comme à la figure 17.35, lorsque ce dernier est à l'équilibre.

Le pont illustré à la figure 17.32 est appelé *pont de Maxwell* lorsque  $Z_5$  est remplacée par un galvanomètre. Un tel montage sert à la mesure des inductances des bobines dont la résistance est suffisamment grande pour supprimer la nécessité d'employer un pont de Hay.

L'application de l'équation (17.4) à ce pont permet d'établir les relations suivantes:

$$L = C R_2 R_3 \quad (17.7)$$

$$R_4 = \frac{R_2 R_3}{R_1} \quad (17.8)$$

Ces relations s'obtiennent d'une façon semblable à celle des relations associées au pont de Hay. La clé est l'égalité entre les



parties réelles et les parties imaginaires. La manière exacte d'obtenir les relations fait l'objet d'un problème en fin de chapitre.

Un autre pont bien connu est le *pont capacimétrique* illustré à la figure 17.37. Il sert à mesurer des capacités inconnues et leurs résistances associées. L'application de l'équation (17.4) à ce pont permet d'établir les relations suivantes:

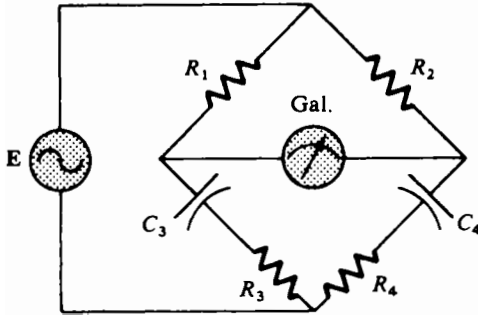


FIG. 17.37 Pont capacimétrique.

$$C_4 = C_3 \frac{R_1}{R_2} \quad (17.9)$$

$$R_4 = \frac{R_2 R_3}{R_1} \quad (17.10)$$

La façon d'obtenir ces relations fait aussi l'objet d'un problème en fin de chapitre.

## 17.8 TRANSFIGURATIONS

### Δ-Y et Y-Δ

Les transfigurations Δ-Y et Y-Δ se font en courant alternatif tout comme en courant continu; il est donc inutile de les expliquer de nouveau. Voyons la transfiguration Δ-Y illustrée à la figure 17.38. Les équations générales exprimant les impédances du montage en étoile en fonction de celles du montage en triangle sont:

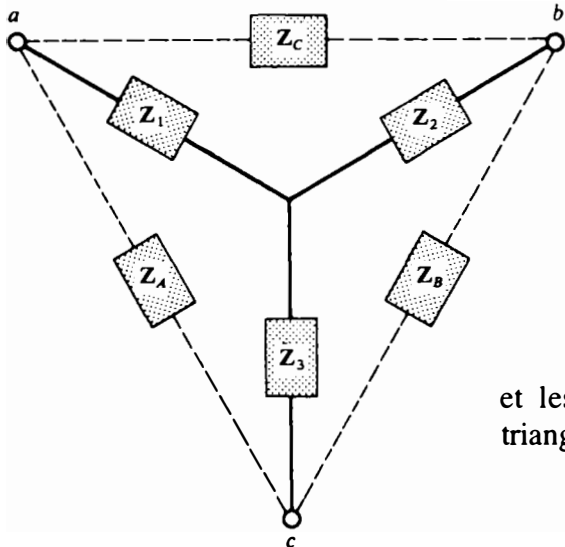


FIG. 17.38 Configuration Δ-Y.

$$Z_1 = \frac{Z_A Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C} \quad (17.11)$$

$$Z_2 = \frac{Z_B Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C} \quad (17.12)$$

$$Z_3 = \frac{Z_A Z_B}{Z_A + Z_B + Z_C} \quad (17.13)$$

et les équations exprimant les impédances du montage en triangle en fonction de celles du montage en étoile sont:

$$Z_A = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_2} \quad (17.14)$$

$$Z_B = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_1} \quad (17.15)$$

$$Z_C = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_3} \quad (17.16)$$



Notons que chacune des impédances du montage en étoile est égale au quotient du produit des impédances des deux branches les plus rapprochées du montage en triangle par la somme des impédances de ce montage, et que chacune des impédances du montage en triangle est égale au quotient de la somme de tous les produits possibles des impédances du montage en étoile par l'impédance de la branche la plus éloignée de ce montage.

Soulignons d'autre part que les deux montages sont aussi appelés réseau en T et réseau en π (figure 17.39).

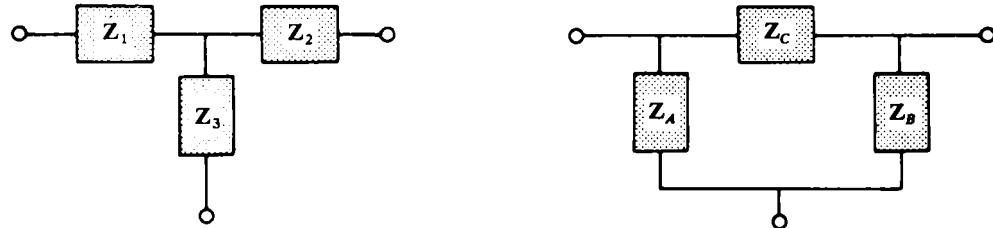


FIG. 17.39

Dans notre étude des réseaux continus, nous avons établi que si toutes les résistances d'un montage (en étoile ou en triangle) étaient de valeurs identiques, la transfiguration d'un montage à l'autre pouvait se faire à l'aide de l'équation:

$$R_{\Delta} = 3R_Y \quad \text{ou} \quad R_Y = \frac{R_{\Delta}}{3}$$

En courant alternatif, on a:

$$Z_{\Delta} = 3Z_Y \quad \text{ou} \quad Z_Y = \frac{Z_{\Delta}}{3} \quad (17.17)$$

Mais attention! En courant alternatif, il ne suffit pas que les grandeurs des impédances soient les mêmes: *il faut aussi que les angles associés aux impédances soient égaux.*

**EXEMPLE 17.16** Calculer l'impédance totale  $Z_T$  du réseau illustré à la figure 17.40.

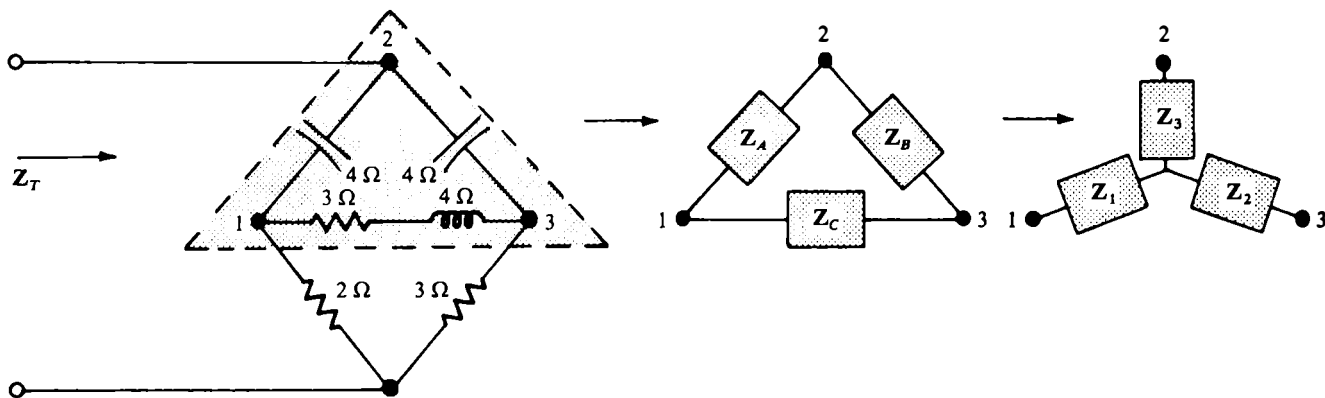


FIG. 17.40

Solution:

$$Z_A = -j4 \quad Z_B = -j4 \quad Z_C = 3 + j4$$

$$Z_1 = \frac{Z_A Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C} = \frac{(-j4)(3 + j4)}{-j4 - j4 + 3 + j4}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{(4 \angle -90^\circ)(5 \angle 53,13^\circ)}{3 - j4} = \frac{20 \angle -36,87^\circ}{5 \angle -53,13^\circ} \\
 &= 4 \angle 16,13^\circ = 3,84 + j1,11 \\
 \mathbf{Z}_2 &= \frac{\mathbf{Z}_B \mathbf{Z}_C}{\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_C} = \frac{(-j4)(3 + j4)}{5 \angle -53,13^\circ} \\
 &= 4 \angle 16,13^\circ = 3,84 + j1,11
 \end{aligned}$$

Rappelons de notre étude des circuits continus que si deux branches du montage sont identiques, le réseau transfiguré a aussi deux branches identiques. Dans le présent exemple,  $\mathbf{Z}_A = \mathbf{Z}_B$ ; par conséquent  $\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_2$  et:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Z}_3 &= \frac{\mathbf{Z}_A \mathbf{Z}_B}{\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_C} = \frac{(-j4)(-j4)}{5 \angle -53,13^\circ} \\
 &= \frac{16 \angle -180^\circ}{5 \angle -53,13^\circ} = 3,2 \angle -126,87^\circ = -1,92 - j2,56
 \end{aligned}$$

La substitution du montage en étoile au montage en triangle (figure 17.41) donne:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Z}_1 &= 3,84 + j1,11 & \mathbf{Z}_2 &= 3,84 + j1,11 \\
 \mathbf{Z}_3 &= -1,92 - j2,56 & \mathbf{Z}_4 &= 2 \\
 \mathbf{Z}_5 &= 3
 \end{aligned}$$

Les impédances  $\mathbf{Z}_1$  et  $\mathbf{Z}_4$  sont en série, de sorte que:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Z}_{T_1} &= \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_4 = 3,84 + j1,11 + 2 = 5,84 + j1,11 \\
 &= 5,94 \angle 10,76^\circ
 \end{aligned}$$

De même,  $\mathbf{Z}_2$  et  $\mathbf{Z}_5$  étant en série, on a:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Z}_{T_2} &= \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_5 = 3,84 + j1,11 + 3 = 6,84 + j1,11 \\
 &= 6,93 \angle 9,21^\circ
 \end{aligned}$$

Les impédances  $\mathbf{Z}_{T_1}$  et  $\mathbf{Z}_{T_2}$  étant par ailleurs en parallèle, on écrit:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Z}_{T_3} &= \frac{\mathbf{Z}_{T_1} \mathbf{Z}_{T_2}}{\mathbf{Z}_{T_1} + \mathbf{Z}_{T_2}} = \frac{(5,94 \angle 10,76^\circ)(6,93 \angle 9,21^\circ)}{5,84 + j1,11 + 6,84 + j1,11} \\
 &= \frac{41,16 \angle 19,97^\circ}{12,68 + j2,22} = \frac{41,16 \angle 19,97^\circ}{12,87 \angle 9,93^\circ} = 3,198 \angle 10,04^\circ \\
 &= 3,15 + j0,56
 \end{aligned}$$

De même,  $\mathbf{Z}_3$  et  $\mathbf{Z}_{T_3}$  étant en parallèle, on a:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Z}_T &= \mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_{T_3} = -1,92 - j2,56 + 3,15 + j0,56 \\
 &= 1,23 - j2,0 = 2,35 \angle -58,41^\circ
 \end{aligned}$$

**EXEMPLE 17.17** À l'aide des deux types de transfigurations, calculer l'impédance totale  $\mathbf{Z}_T$  du réseau illustré à la figure 17.42.

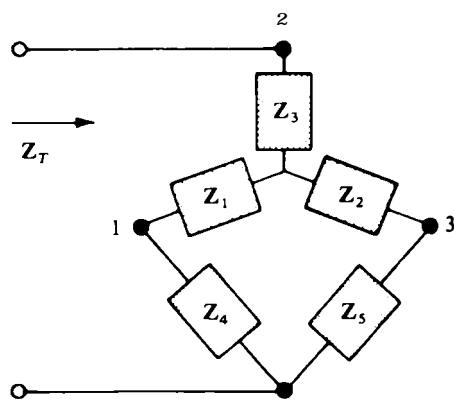


FIG. 17.41

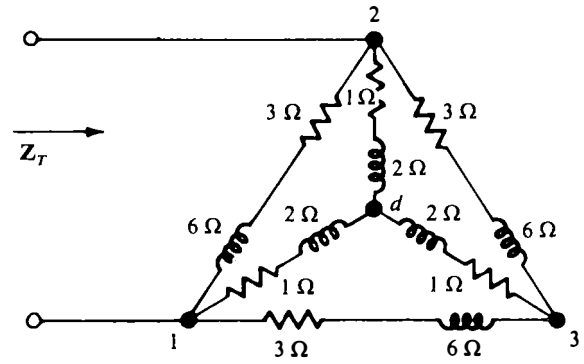


FIG. 17.42

Solution: La transfiguration Δ-Y donne le réseau illustré à la figure 17.43. Les deux réseaux étant à l'équilibre dans ce cas particulier (même impédance dans chaque branche), le centre  $d'$  du montage en triangle résultant est le point  $d$  du montage en étoile. On a donc:

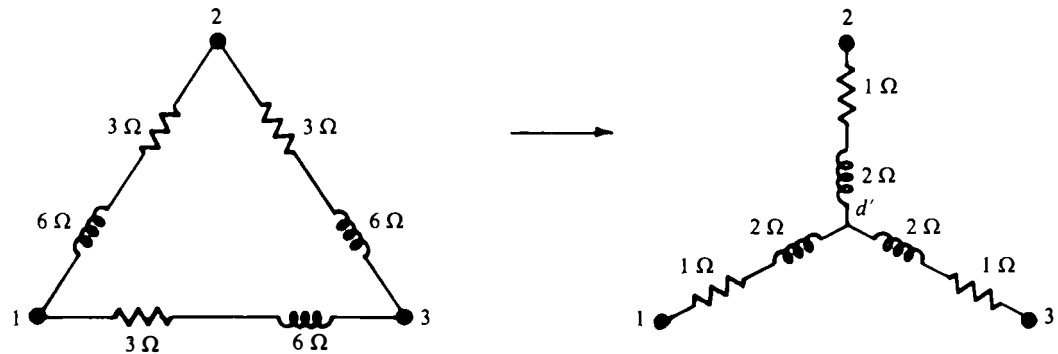


FIG. 17.43

$$Z_Y = \frac{Z_\Delta}{3} = \frac{3 + j6}{3} = 1 + j2$$

et (figure 17.44):

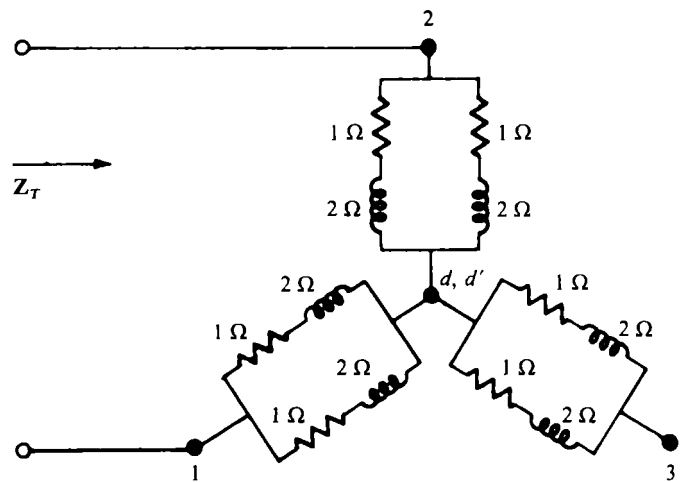


FIG. 17.44

$$Z_T = 2 \left( \frac{1 + j2}{2} \right) = 1 + j2$$



La transfiguration Y-Δ donne (figure 17.45):

$$Z_{\Delta} = 3Z_Y = 3(1 + j2) = 3 + j6$$

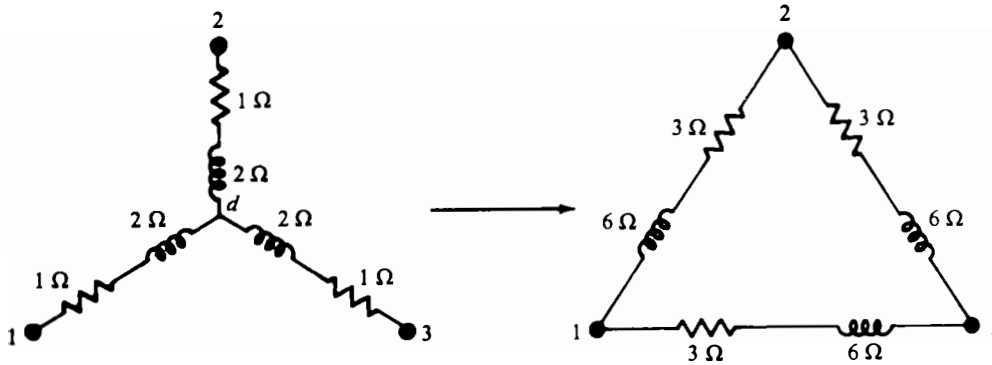


FIG. 17.45

L'impédance parallèle de chacune des branches du réseau illustré à la figure 17.46 est:

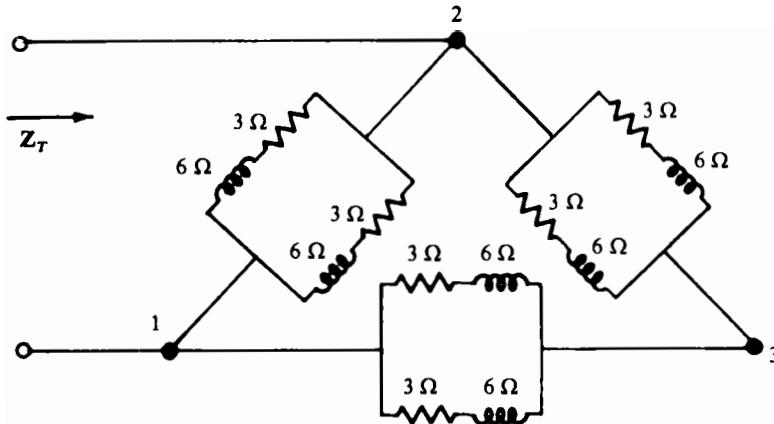


FIG. 17.46

$$Z' = \frac{3 + j6}{2} = 1,5 + j3$$

et, par conséquent:

$$Z_T = \frac{Z'(2Z')}{Z' + 2Z'} = \frac{2(Z')^2}{3Z'} = \frac{2Z'}{3}$$

$$Z_T = \frac{2(1,5 + j3)}{3} = 1 + j2$$

ce qui est identique au résultat ci-dessus.

## PROBLÈMES

### Section 17.2

1. Identifiez, en vos propres mots, la différence entre une source indépendante et une source commandée.



Section 17.3

2. Transposez les sources de tension illustrées à la figure 17.47 en sources de courant.

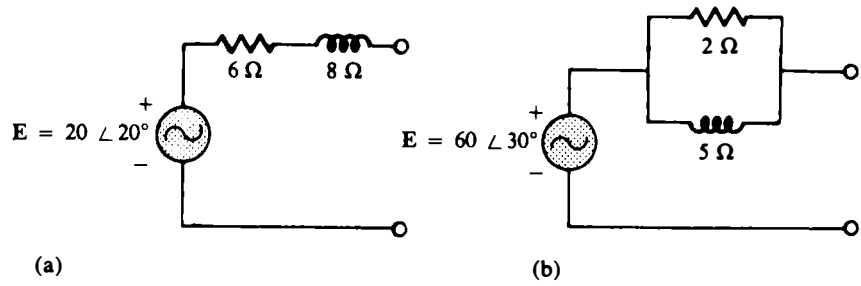


FIG. 17.47

3. Transposez les sources de courant illustrées à la figure 17.48 en sources de tension.

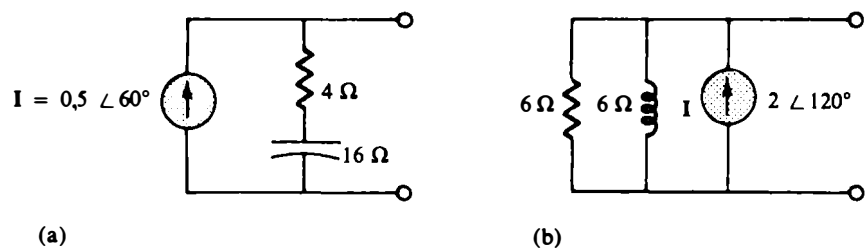


FIG. 17.48

4. Transposez la source de tension illustrée à la figure 17.49a en une source de courant et la source de courant illustrée à la figure 17.49b en une source de tension.

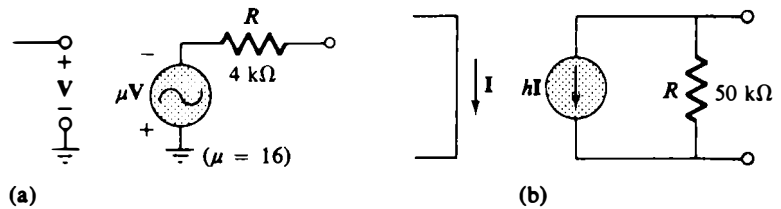


FIG. 17.49

Section 17.4

5. a. Écrivez les équations de mailles des réseaux illustrés à la figure 17.50.  
b. Déterminez le courant qui traverse la résistance  $R_1$ .

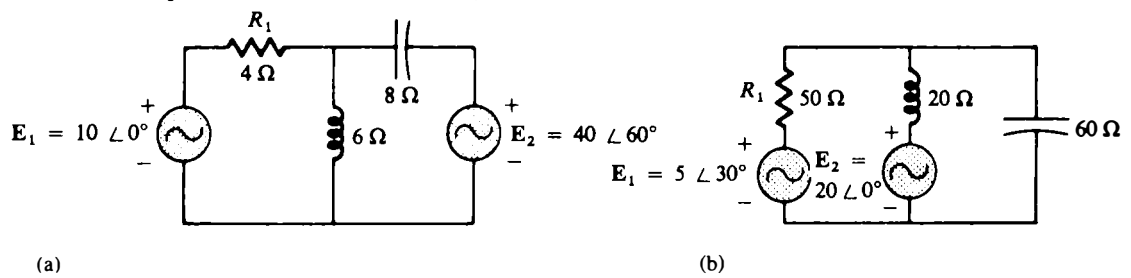


FIG. 17.50

6. Refaites le problème 5 dans le cas des réseaux illustrés à la figure 17.51.

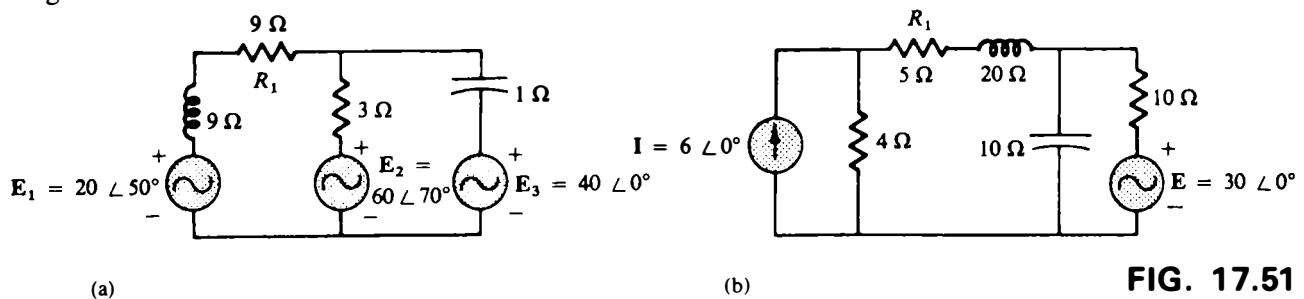


FIG. 17.51





\*7. Refaites le problème 5 dans le cas des réseaux illustrés à la figure 17.52.

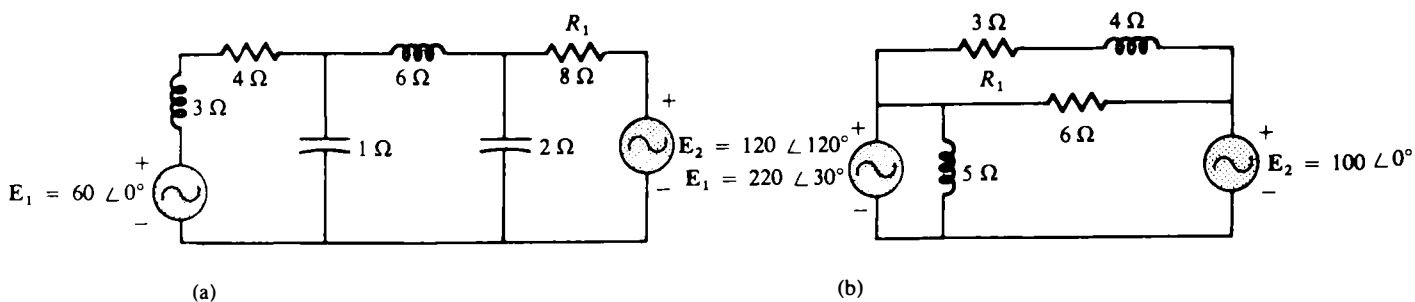


FIG. 17.52

\*8. Refaites le problème 5 dans le cas des réseaux illustrés à la figure 17.53.

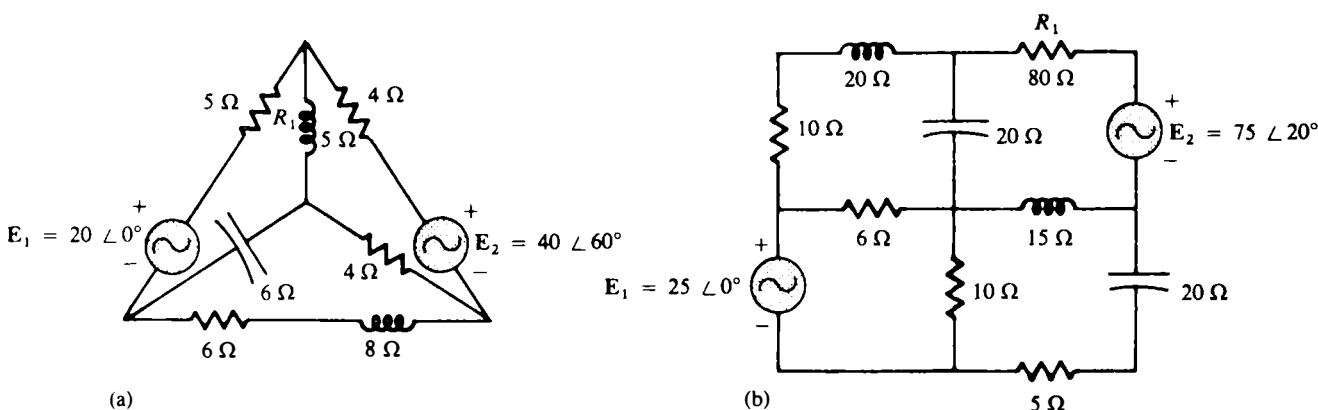


FIG. 17.53

Section 17.5

9. a. À l'aide de l'approche programmée, déterminez les équations de mailles des réseaux illustrés à la figure 17.50.
- b. Y a-t-il symétrie dans les équations?
- c. Déterminez le courant qui traverse la résistance  $R_1$ .
10. Refaites le problème 9 dans le cas des réseaux illustrés à la figure 17.51.
- \*11. Refaites le problème 9 dans le cas des réseaux illustrés à la figure 17.52.
- \*12. Refaites le problème 9 dans le cas des réseaux illustrés à la figure 17.53.
13. À l'aide de l'approche programmée de l'analyse par mailles, déterminez le courant  $I_c$  (en fonction de  $V$ ) dans le réseau illustré à la figure 17.54.

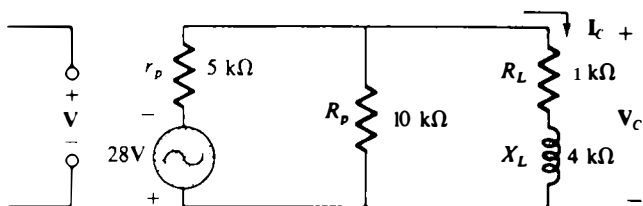


FIG. 17.54



\*14. À l'aide de l'approche programmée de l'analyse par mailles, déterminez le courant  $I_L$  (en fonction de  $I$ ) dans le réseau illustré à la figure 17.55.

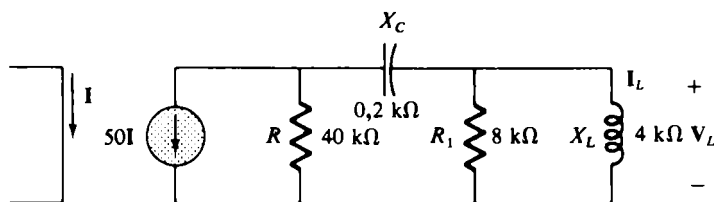
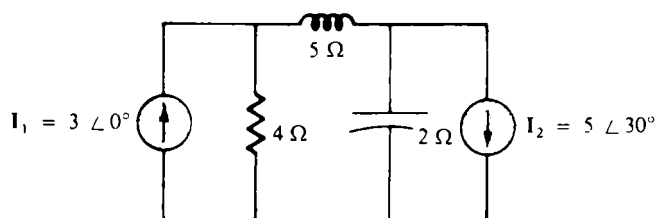


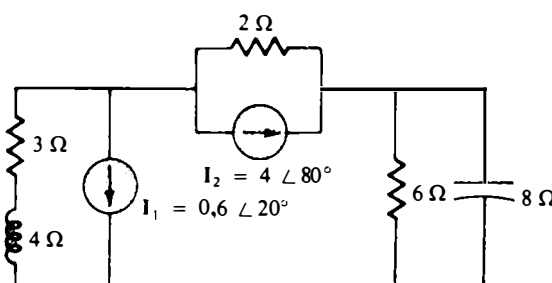
FIG. 17.55

Section 17.6

15. a. À l'aide de l'approche programmée, déterminez les équations nodales des réseaux illustrés à la figure 17.56.  
 b. Y a-t-il symétrie entre les équations?  
 c. Déterminez les tensions aux noeuds.



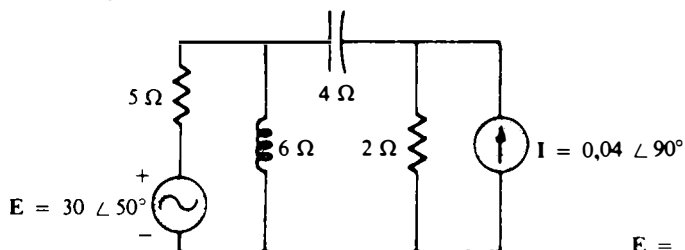
(a)



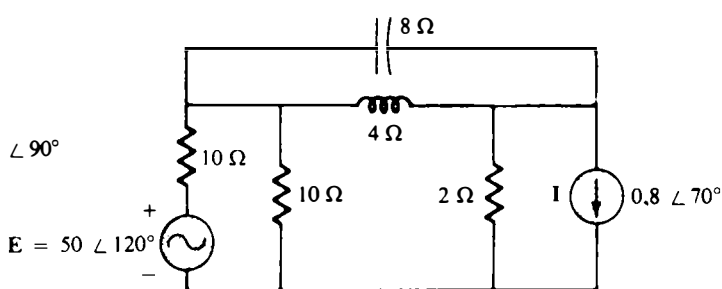
(b)

FIG. 17.56

\*16. Refaites le problème 15 dans le cas des réseaux illustrés à la figure 17.57.



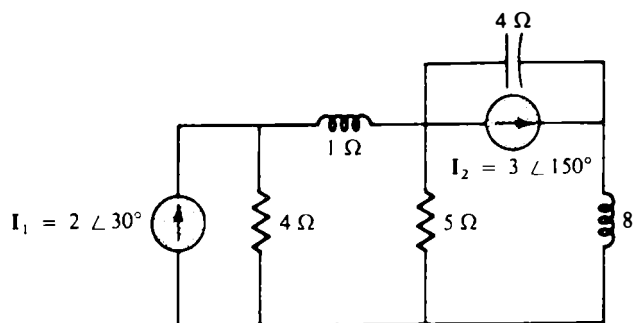
(a)



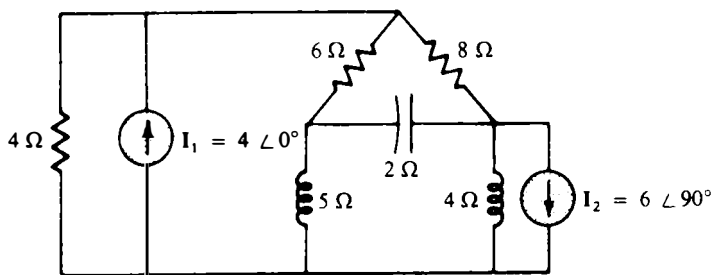
(b)

FIG. 17.57

17. Refaites le problème 15 dans le cas des réseaux illustrés à la figure 17.58.



(a)



(b)

FIG. 17.58



- 18. À l'aide de l'analyse par noeuds, déterminez la tension  $V_C$  (en fonction de  $V$ ) dans le réseau illustré à la figure 17.54.
- \*19. À l'aide de l'analyse par noeuds, déterminez la tension  $V_L$  (en fonction de  $I$ ) dans le réseau illustré à la figure 17.55.
- \*20. Voir le réseau illustré à la figure 17.59.
  - a. Déterminez les équations nodales de ce réseau.
  - b. Y a-t-il symétrie entre les équations? Pourquoi?
  - c. Déterminez  $V_C$  en fonction de  $E_i$ .

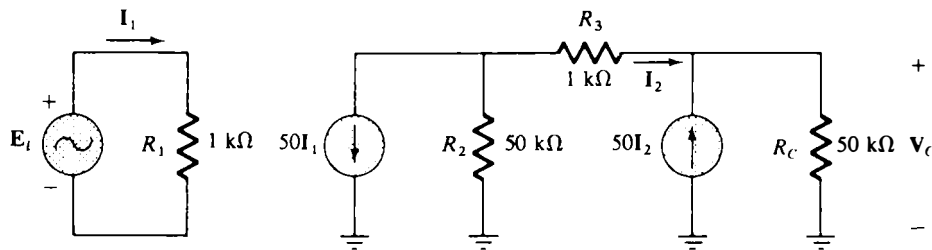


FIG. 17.59

Section 17.7

- 21. Voir le réseau illustré à la figure 17.60.
  - a. Le pont est-il à l'équilibre?
  - b. À l'aide de l'analyse par mailles, déterminez le courant qui traverse la réactance capacitive.
  - c. À l'aide de l'analyse par noeuds, déterminez la tension aux bornes de la réactance capacitive.

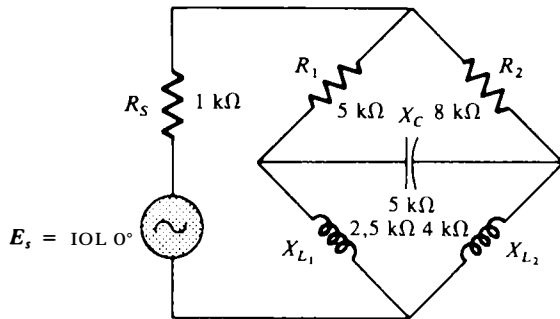


FIG. 17.60

- 22. Refaites le problème 21 dans le cas du réseau en pont illustré à la figure 17.61.

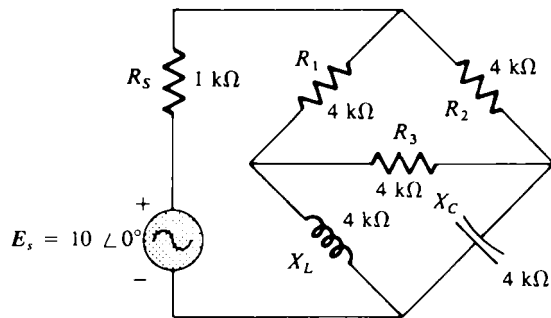


FIG. 17.61

- 23. Sachant que le pont de Hay illustré à la figure 17.62 est à l'équilibre, déterminez l'inductance  $L_x$  et la résistance  $R_x$  au moyen de l'équation (17.1).

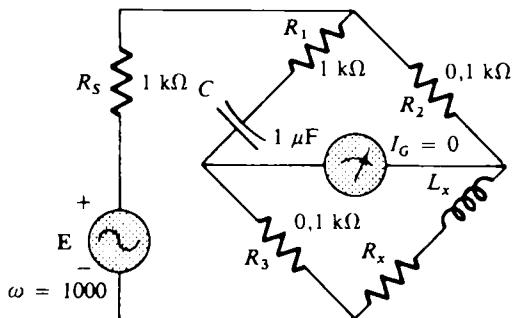


FIG. 17.62



24. Déterminez si le pont de Maxwell illustré à la figure 17.63 est à l'équilibre ( $\omega = 1000$ ).

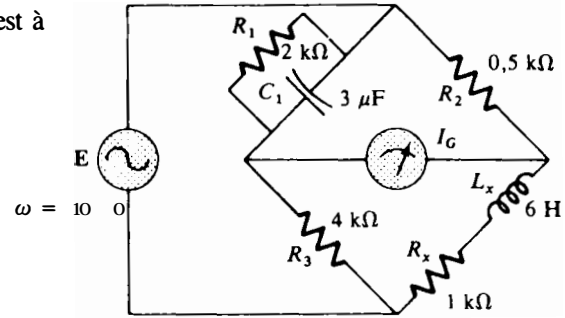


FIG. 17.63

25. Identifiez les conditions d'équilibre [équations (17.9) et (17.10)] du pont capacimétrique.

26. Identifiez les conditions d'équilibre du pont à inductances illustré à la figure 17.64.

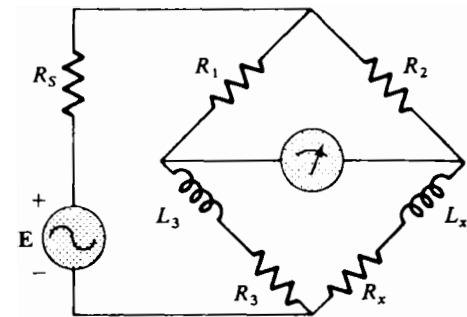


FIG. 17.64

Section 17.8

27. Par transfiguration  $\Delta$ -Y ou Y- $\Delta$ , déterminez le courant I dans les réseaux illustrés à la figure 17.65.

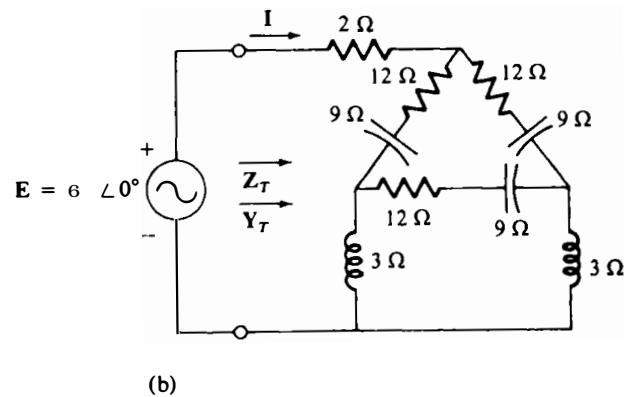
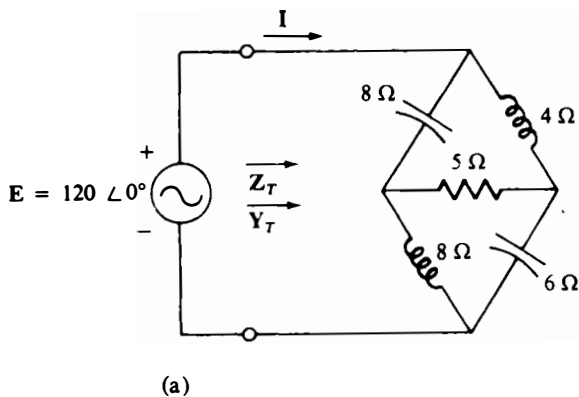


FIG. 17.65

28. Refaites le problème 27 dans le cas des réseaux illustrés à la figure 17.66 ( $E = 100 \angle 0^\circ$  dans chaque cas).

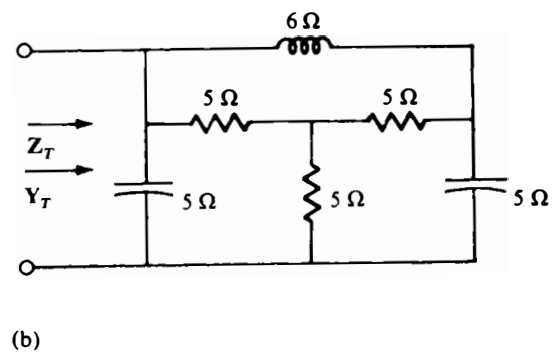
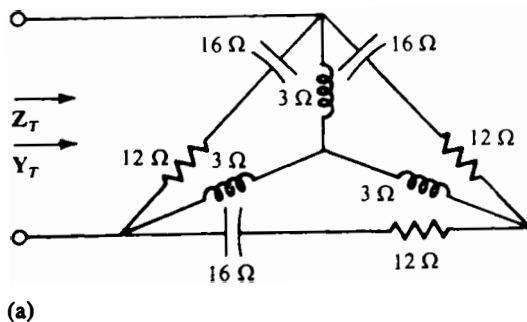


FIG. 17.66



## GLOSSAIRE

**Analyse par mailles** Méthode permettant de déterminer les courants de boucle (ou de maille) d'un réseau et, par conséquent, les courants de branche.

**Analyse par noeuds** Méthode permettant de déterminer les tensions nodales d'un réseau et, à l'aide de la loi des tensions de Kirchhoff, la tension aux bornes de chacun des éléments.

**Pont capacimétrique** Pont, dont la branche centrale est munie d'un galvanomètre, servant à déterminer une capacité inconnue et sa résistance associée.

**Pont de Hay** Pont servant à mesurer la résistance et l'inductance d'une bobine quand la résistance de celle-ci n'est égale qu'à une petite fraction de sa réactance.

**Pont de Maxwell** Pont servant à mesurer l'inductance d'une bobine quand la résistance de celle-ci est trop grande et que l'emploi du pont de Hay n'est pas possible.

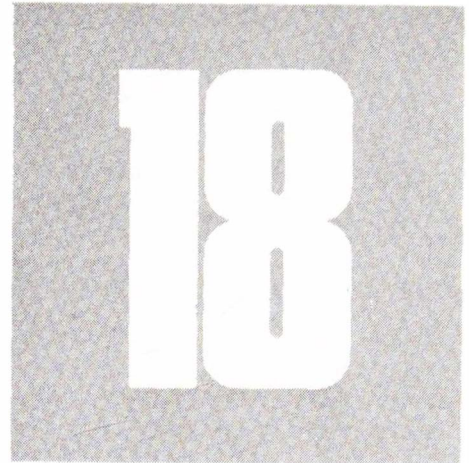
**Réseau en pont** Réseau en forme de losange dont les branches ne sont ni en série ni en parallèle.

**Source commandée** Source dont la sortie et/ou le déphasage sont déterminés par une tension ou par un courant du réseau auquel elle appartient.

**Source indépendante** Source dont la sortie ne dépend pas des caractéristiques du réseau.

**Transposition de source** Substitution d'une source de tension par une source de courant (ou vice versa) qui ne change pas les caractéristiques aux bornes et qui, par conséquent, n'a aucune incidence sur le réseau.

# THÉORÈMES DE L'ANALYSE DES CIRCUITS (COURANT ALTERNATIF)



## 18.1 INTRODUCTION

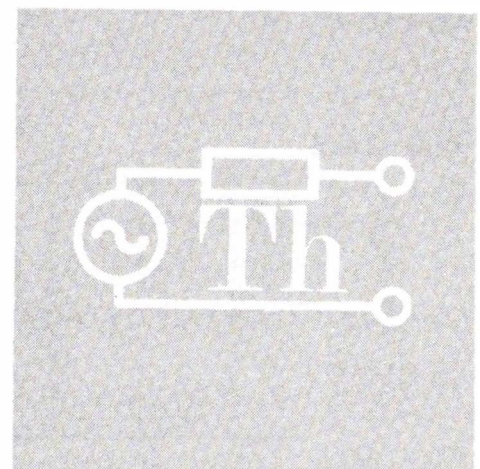
Le développement du présent chapitre est calqué sur celui du chapitre 8 consacré aux théorèmes de l'analyse des circuits en courant continu. Nous conseillons d'y revoir chacun des théorèmes avant de commencer l'étude du présent chapitre, car maintes explications déjà données ne seront pas répétées.

Désireux de laisser à l'étudiant l'occasion d'acquérir une certaine maîtrise dans l'application des divers théorèmes aux réseaux à sources commandées, nous traitons séparément les sources indépendantes et les sources commandées dans certaines sections.

Nous étudierons en détail les théorèmes de superposition, de Thévenin, de Norton et du transfert maximal de puissance mais non les théorèmes de substitution, de réciprocité et de Millman. Ces derniers ont été amplement expliqués au chapitre 8 et peuvent être appliqués sans grande difficulté aux réseaux alternatifs sinusoïdaux.

## 18.2 THÉORÈME DE SUPERPOSITION

Nous avons appris au chapitre 8 que le théorème de superposition nous dispensait de résoudre des systèmes d'équations linéaires puisqu'il permettait de tenir compte séparément des effets de chaque source. Pour isoler chaque source, nous supprimions du réseau les autres sources: les sources de tension étaient remplacées par des courts-circuits et les sources de





courant, par des circuits ouverts. Par la somme algébrique des courants (ou des tensions), produits par chacune des sources dans une partie du réseau, nous obtenons alors le courant (ou la tension) total.

Abstraction faite de la substitution d'impédances et de vecteurs de phase aux résistances et aux nombres réels, la même méthode s'applique intégralement aux réseaux alternatifs à sources indépendantes.

Le théorème de superposition ne peut cependant pas servir au calcul de la puissance dans un réseau alternatif, pour la simple raison que les relations de puissance ne sont pas linéaires. On ne peut l'appliquer aux réseaux, dont les sources ont des fréquences différentes, qu'à la condition de déterminer la réponse totale pour *chacune* des fréquences et de développer les résultats en une expression non sinusoïdale, comme il est fait au chapitre 23.

Nous commencerons notre étude par les réseaux ne comportant que des sources indépendantes. L'approche est très semblable à celle que nous avons adoptée en courant continu.

### Sources indépendantes

**EXEMPLE 18.1** À l'aide du théorème de superposition, calculer le courant  $I$  dans la réactance de  $4 \Omega$  ( $X_{L_2}$ ) du réseau illustré à la figure 18.1.

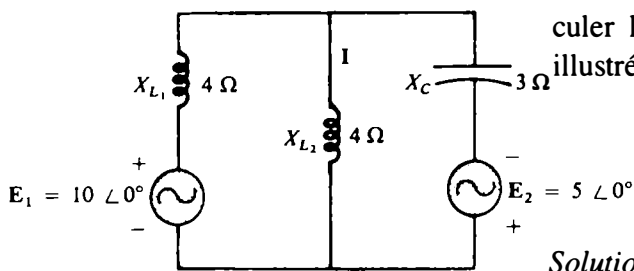


FIG. 18.1

*Solution:* Dans le réseau simplifié illustré à la figure 18.2, on a:

$$Z_1 = j4 \quad Z_2 = j4 \quad Z_3 = -j3$$

En ne tenant maintenant compte que des effets de la source de tension  $E_1$  (figure 18.3), on écrit:

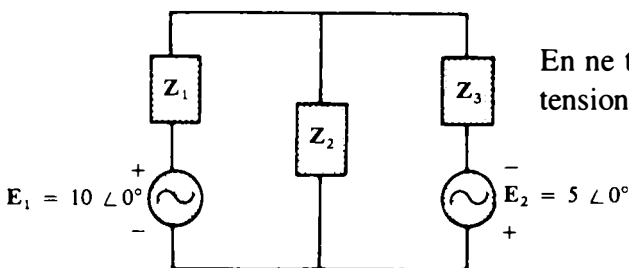


FIG. 18.2

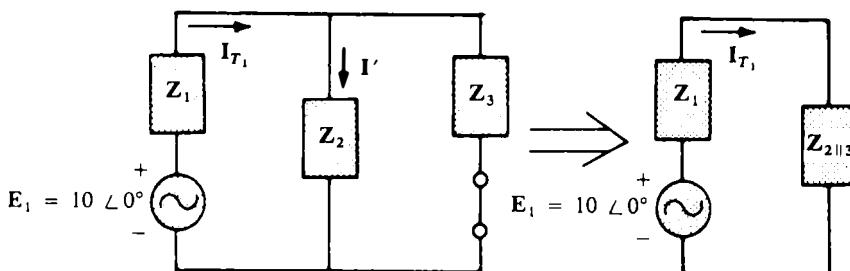


FIG. 18.3

$$Z_{2 \parallel 3} = \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} = \frac{(j4)(-j3)}{j4 - j3}$$

$$= 12 \angle -90^\circ$$

$$I_{T1} = \frac{E_1}{Z_{2 \parallel 3} + Z_1} = \frac{10 \angle 0^\circ}{-j12 + j4} = \frac{10 \angle 0^\circ}{8 \angle -90^\circ}$$

$$= 1,25 \angle 90^\circ$$

et:

$$I' = \frac{Z_2 I_{T1}}{Z_2 + Z_3} \quad (\text{règle du diviseur de courant})$$

$$I' = \frac{(-j3)(j1,25)}{j4 - j3} = \frac{3,75}{j} = 3,75 \angle -90^\circ$$

En isolant la source  $E_2$  (figure 18.4), on obtient:

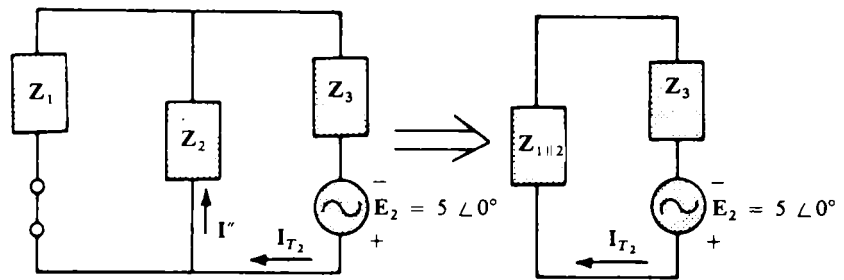


FIG. 18.4

$$Z_{1 \parallel 2} = \frac{Z_1}{N} = \frac{j4}{2} = j2$$

$$I_{T2} = \frac{E_2}{Z_{1 \parallel 2} + Z_3} = \frac{5 \angle 0^\circ}{j2 - j3} = \frac{5 \angle 0^\circ}{1 \angle -90^\circ} = 5 \angle 90^\circ$$

et:

$$I'' = \frac{I_{T2}}{2} = 2,5 \angle 90^\circ$$

Le courant total passant dans la réactance  $X_{L2}$  (figure 18.5) est donc:

$$I = I' - I''$$

$$= 3,75 \angle -90^\circ - 2,50 \angle 90^\circ = -j3,75 - j2,50$$

$$= -j6,25$$

$$I = 6,25 \angle -90^\circ$$

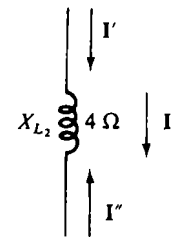


FIG. 18.5

**EXEMPLE 18.2** À l'aide du théorème de superposition, calculer le courant  $I$  dans la résistance de  $6 \Omega$  du réseau illustré à la figure 18.6.

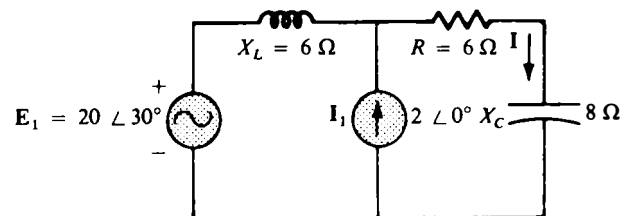


FIG. 18.6



Solution: Dans le réseau simplifié (figure 18.7), on a:

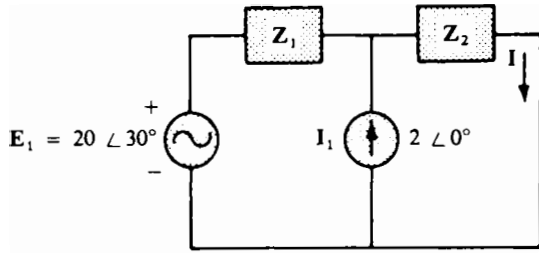


FIG. 18.7

$$Z_1 = j6 \quad Z_2 = 6 - j8$$

Après isolement de la source de courant (figure 18.8) et application de la règle du diviseur de courant, on obtient:

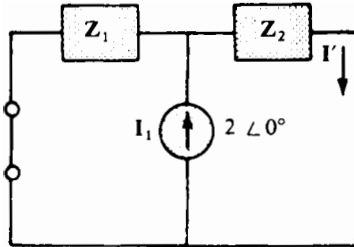


FIG. 18.8

$$I' = \frac{Z_1 I_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{j6(2)}{j6 + 6 - j8} = \frac{j12}{6 - j2} = \frac{12 \angle 90^\circ}{6,32 \angle -18,43^\circ}$$

$$I' = 1,9 \angle 108,43^\circ$$

De façon semblable, l'isolement de la source de tension (figure 18.9) et la loi d'Ohm donnent:

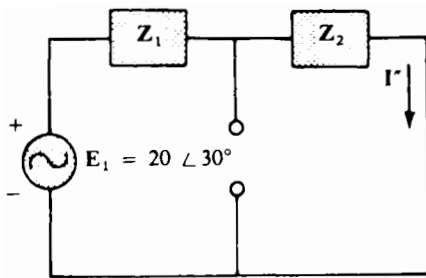


FIG. 18.9

$$I'' = \frac{E_1}{Z_T} = \frac{E_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{20 \angle 30^\circ}{6,32 \angle -18,43^\circ}$$

$$I'' = 3,16 \angle 48,43^\circ$$

Le courant total traversant la résistance de 6 Ω (figure 18.10) est donc:

$$I = I' + I''$$

$$= 1,9 \angle 108,43^\circ + 3,16 \angle 48,43^\circ$$

$$= (-0,60 + j1,80) + (2,10 + j2,36)$$

$$= 1,50 + j4,16$$

$$I = 4,42 \angle 70,2^\circ$$

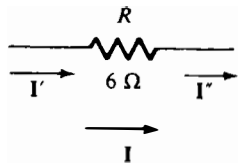


FIG. 18.10

**EXEMPLE 18.3** À l'aide du théorème de superposition, calculer la tension aux bornes de la résistance de 6 Ω du réseau illustré à la figure 18.6. Vérifier si le résultat est bien  $V_{6\Omega} = I \times 6$  (I étant le courant calculé à l'exemple précédent).

Solution: On a pour la source de courant:

$$V'_{6\Omega} = I'6 = (1,9 \angle 108,43^\circ)(6) = 11,4 \angle 108,43^\circ$$

et pour la source de tension:

$$V''_{6\Omega} = I''(6) = (3,16 \angle 48,43^\circ)(6) = 18,96 \angle 48,43^\circ$$

La tension totale aux bornes de la résistance de 6 Ω (figure 18.11) est donc:

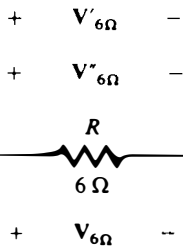


FIG. 18.11

$$V_{6\Omega} = V'_{6\Omega} + V''_{6\Omega}$$

$$= 11,4 \angle 108,43^\circ + 18,96 \angle 48,43^\circ$$

$$= (-3,60 + j10,82) + (12,58 + j14,18)$$

$$= 8,98 + j25,0$$

$$V_{6\Omega} = 26,5 \angle 70,2^\circ$$

La vérification confirme le résultat:

$$V_{6\Omega} = I(6) = (4,42 \angle 70,2^\circ)(6) = 26,5 \angle 70,2^\circ$$

**Sources commandées**

Lorsque la source est commandée par une grandeur qui ne se rattache pas au réseau auquel on désire appliquer le théorème de superposition, on procède comme si la source était indépendante. Évidemment, la solution cherchée sera exprimée en termes de la grandeur de commande.

**EXEMPLE 18.4** À l'aide du théorème de superposition, calculer le courant  $I_2$  dans le réseau illustré à la figure 18.12. les coefficients  $\mu$  et  $h$  sont des constantes.

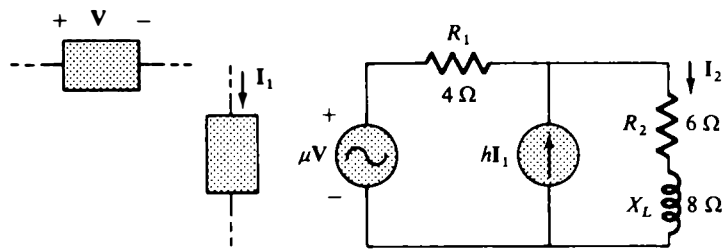


FIG. 18.12

*Solution:* Après simplification d'une partie du réseau (figure 18.13), on écrit:

$$Z_1 = 4 \quad \text{et} \quad Z_2 = 6 + j8$$

On a pour la source de tension (figure 18.14):

$$I' = \frac{\mu V}{Z_1 + Z_2} = \frac{\mu V}{4 + 6 + j8} = \frac{\mu V}{10 + j8}$$

$$I' = \frac{\mu V}{12,8 \angle 38,66^\circ} = 0,078 \mu V \angle -38,66^\circ$$

et pour la source de courant (figure 18.15):

$$I'' = \frac{Z_1(hI)}{Z_1 + Z_2} = \frac{4(hI)}{12,8 \angle 38,66^\circ} = 4(0,078)hI \angle -38,66^\circ$$

$$I'' = 0,312hI \angle -38,66^\circ$$

Le courant est donc:

$$I_2 = I' + I'' = 0,078 \mu V \angle -38,66^\circ + 0,312hI \angle -38,66^\circ$$

Pour  $V = 10 \angle 0^\circ$ ,  $I = 20 \times 10^{-3} \angle 0^\circ$ ,  $\mu = 20$ ,  $h = 100$ ,

on a: 
$$I_2 = 0,078(20)(10) \angle -38,66^\circ + 0,312(100)(20 \times 10^{-3}) \angle -38,66^\circ = 15,60 \angle -38,66^\circ + 0,62 \angle -38,66^\circ$$

$$I_2 = 16,22 \angle -38,66^\circ$$

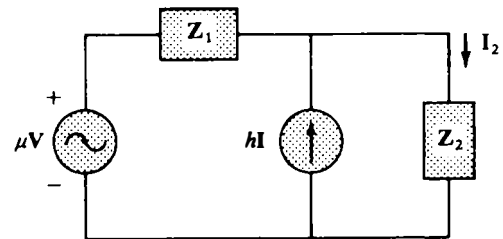


FIG. 18.13

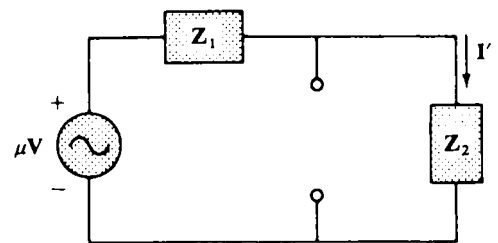


FIG. 18.14

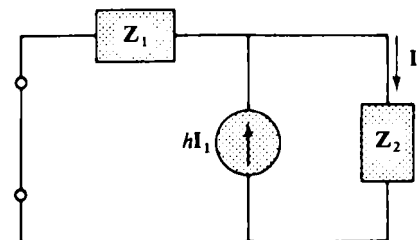


FIG. 18.15



Lorsque la source est commandée par une grandeur rattachée au réseau auquel on désire appliquer le théorème de superposition, on ne peut plus par contre supposer que la sortie de la source commandée soit nulle (à moins que la grandeur de commande soit nulle). Pour faire l'analyse de réseaux contenant des sources commandées des deux types (source de l'exemple 18.4 et source ci-dessus), on n'a d'autre choix que d'appliquer le théorème pour chacune des sources indépendantes et pour chacune des sources commandées, dont les grandeurs de commande ne sont pas rattachées à la partie étudiée du réseau. Soulignons ici que les sources commandées ne sont pas des sources d'énergie à proprement parler, puisque la suppression du réseau de toutes les sources indépendantes annule toutes les tensions et tous les courants.

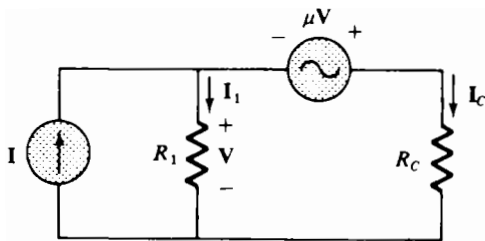


FIG. 18.16

**EXEMPLE 18.5** Calculer le courant  $I_C$  traversant la résistance  $R_C$  du réseau illustré à la figure 18.16.

*Solution:* À noter d'abord que la grandeur de commande  $V$  est déterminée par le réseau à analyser. De la discussion ci-dessus, il ressort qu'on ne peut pas supposer que la sortie  $\mu V$  de la source commandée soit nulle, à moins que  $V$  soit aussi nulle. Si par ailleurs on suppose que  $I = 0$ , le réseau n'a plus de source de f.é.m.,  $V = 0$  et, par conséquent,  $\mu V = 0$ . Dans ces conditions,  $I_C$  est nul. Il apparaît donc clairement que le réseau doit être analysé tel qu'il se présente à la figure 18.16, aucune source ne pouvant être supprimée et le théorème de superposition ne pouvant être appliquée.

Pour résoudre le problème, il faut faire appel à la loi des tensions:

$$V_C = V + \mu V = (1 + \mu)V$$

et:

$$I_C = \frac{(1 + \mu)V}{R_C}$$

Ce résultat doit maintenant être exprimé en fonction de  $I$  puisque  $V$  et  $\mu V$  sont seulement des grandeurs dépendantes.

On a par application de la loi des courants:

$$I = I_1 + I_C = \frac{V}{R_1} + \frac{(1 + \mu)V}{R_C}$$

et:

$$I = V \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1 + \mu}{R_C} \right)$$

ou encore:

$$V = \frac{I}{\left( \frac{1}{R_1} + \frac{1 + \mu}{R_C} \right)}$$

Par substitution de cette expression de  $V$  dans l'expression de  $I_c$  on a:

$$I_c = \frac{(1 + \mu)V}{R_c} = \frac{(1 + \mu)}{R_c} \left[ \frac{I}{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1 + \mu}{R_c}\right)} \right]$$

de sorte que:

$$I_c = \frac{(1 + \mu)R_1 I}{R_c + (1 + \mu)R_1}$$

### 18.3 THÉORÈME DE THÉVENIN

En courant alternatif, le théorème de Thévenin s'énonce ainsi: *Tout réseau alternatif linéaire à deux bornes peut être remplacé par un circuit équivalent constitué d'une source de tension et d'une impédance montées en série* (voir la figure 18.17).

Les réactances d'un circuit étant fonction de la fréquence, la correspondance établie entre un générateur de Thévenin et un circuit n'est valable qu'à une fréquence donnée.

Les étapes de l'application du théorème sont à toutes fins utiles les mêmes en courants continu et alternatif, la modification majeure étant la substitution du mot *impédance* au mot *résistance*. Les sources indépendantes et les sources commandées sont traitées séparément.

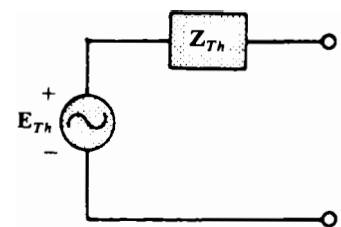


FIG. 18.17

#### Sources indépendantes

Étape 1: Détacher du réseau la partie à laquelle on raccordera le générateur de Thévenin.

Étape 2: Repérer (○, ●, etc.) les bornes du réseau résiduel à deux bornes.

Étape 3: Calculer  $Z_{Th}$  entre les deux bornes repérées. Pour ce faire, remplacer au préalable toutes les sources de tension par des courts-circuits et toutes les sources de courant par des circuits ouverts.

Étape 4: Calculer  $E_{Th}$  en déterminant la tension en circuit ouvert entre les deux bornes repérées. Pour ce faire, restituer d'abord au circuit ses sources de tension et de courant.

Étape 5: Dessiner le générateur de Thévenin et le raccorder aux bornes du réseau laissé de côté à l'étape 1.

**EXEMPLE 18.6** Déterminer le générateur de Thévenin du réseau extérieur à la résistance  $R$  (figure 18.18).

Solution:

Étapes 1 et 2: Voir la figure 18.19. On a:

$$Z_1 = j8 \quad \text{et} \quad Z_2 = -j2$$

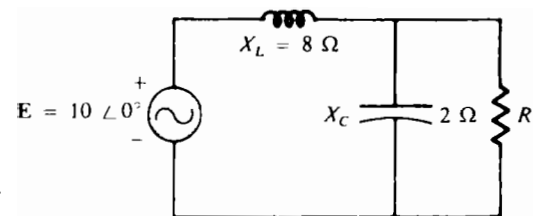


FIG. 18.18

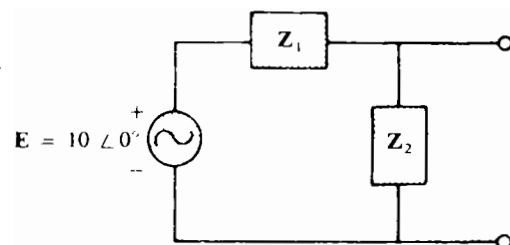


FIG. 18.19

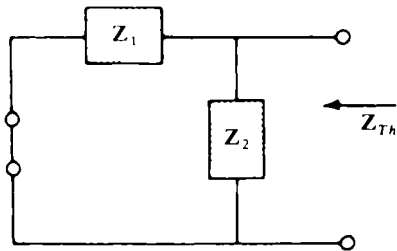


FIG. 18.20

Étape 3: Voir la figure 18.20. On a:

$$Z_{Th} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{(j8)(-j2)}{j8 - j2} = \frac{-j^2 16}{j6} = \frac{16}{6 \angle 90^\circ} = 2.67 \angle -90^\circ$$

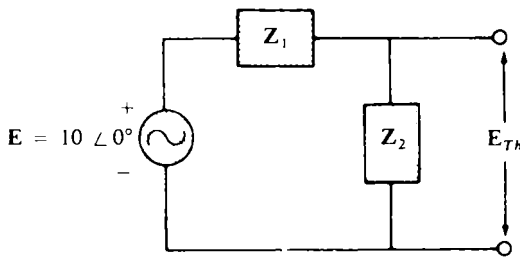


FIG. 18.21

Étape 4: Voir la figure 18.21. On a:

$$E_{Th} = \frac{Z_2 E}{Z_1 + Z_2} \quad (\text{règle du diviseur de tension})$$

$$E_{Th} = \frac{(-j2)(10)}{j8 - j2} = \frac{-j20}{j6} = 3.33 \angle -180^\circ$$

Étape 5: Le circuit résultant et le générateur de Thévenin sont illustrés à la figure 18.22.

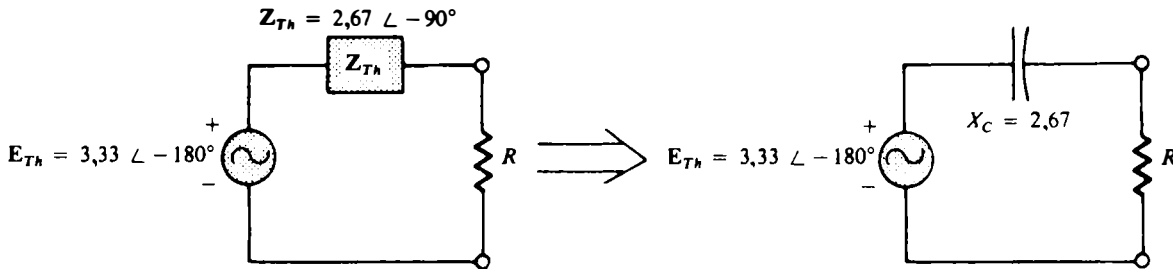


FIG. 18.22

EXEMPLE 18.7 Déterminer le générateur de Thévenin du réseau illustré à la figure 18.23 et amputé de la branche a-a'.

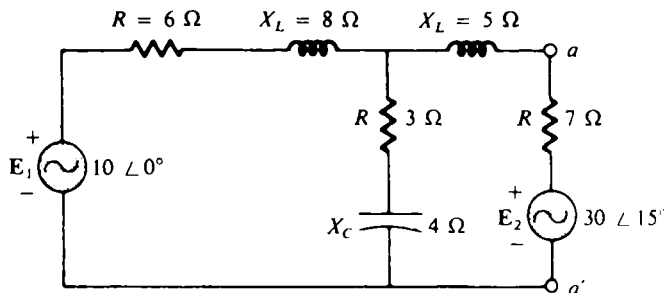


FIG. 18.23

Solution:

Étapes 1 et 2: Voir la figure 18.24. À noter la simplification que permet l'emploi des impédances:

$$Z_1 = 6 + j8 \quad Z_2 = 3 - j4 \quad Z_3 = j5$$

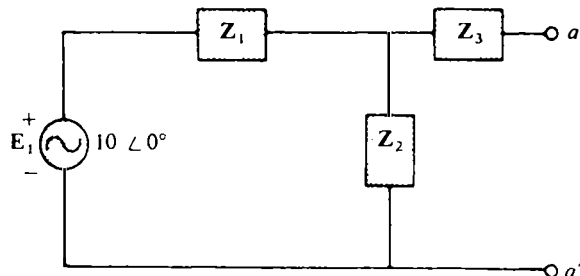


FIG. 18.24

Étape 3: Voir la figure 18.25. On a:

$$\begin{aligned} Z_{Th} &= Z_3 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = j5 + \frac{(10 \angle 53,13^\circ)(5 \angle -53,13^\circ)}{(6 + j8) + (3 - j4)} \\ &= j5 + \frac{50 \angle 0^\circ}{9 + j4} = j5 + \frac{50 \angle 0^\circ}{9,85 \angle 23,96^\circ} \\ &= j5 + 5,08 \angle -23,96^\circ = j5 + 4,64 - j2,06 \\ Z_{Th} &= 4,64 + j2,94 = 5,49 \angle 32,36^\circ \end{aligned}$$

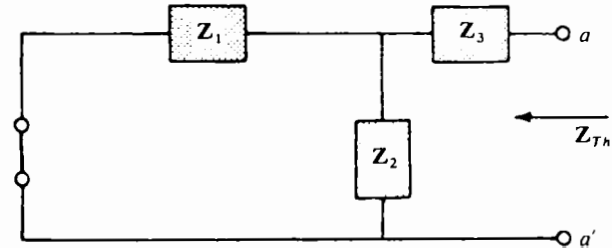


FIG. 18.25

Étape 4: Voir la figure 18.26. Puisque  $a-a'$  est un circuit ouvert,  $I_{Z_3} = 0$ . La f.é.m.  $E_{Th}$  est alors la chute de potentiel aux bornes de  $Z_2$ :

$$\begin{aligned} E_{Th} &= \frac{Z_2 E}{Z_2 + Z_1} \quad (\text{règle du diviseur de tension}) \\ &= \frac{(5 \angle -53,13^\circ)(10 \angle 0^\circ)}{9,85 \angle 23,96^\circ} \\ E_{Th} &= \frac{50 \angle -53,13^\circ}{9,85 \angle 23,96^\circ} = 5,08 \angle -77,09^\circ \end{aligned}$$

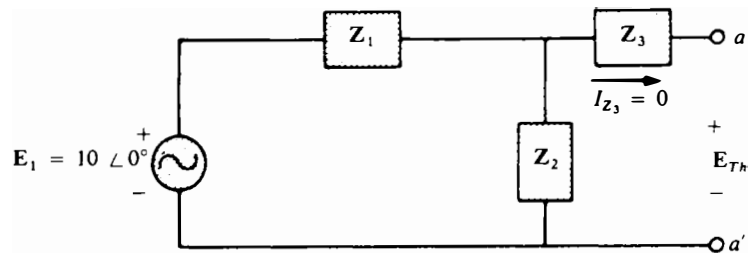


FIG. 18.26

Étape 5: Le circuit résultant et le générateur de Thévenin sont illustrés à la figure 18.27.

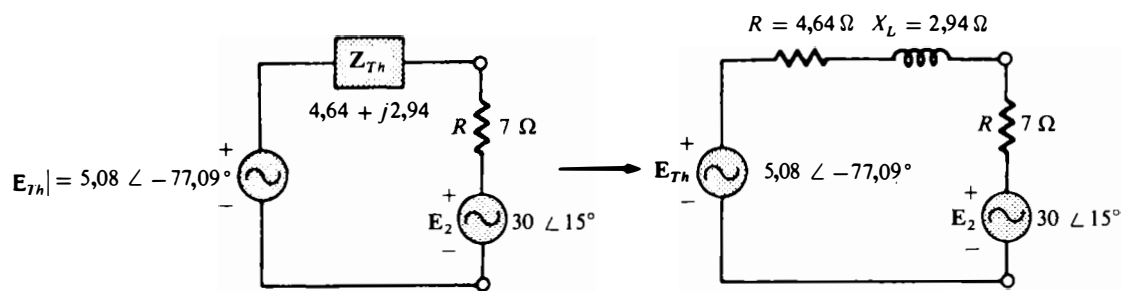


FIG. 18.27

### Sources commandées

La méthode décrite ci-dessus peut être employée en présence de sources commandées, si leurs grandeurs de commande ne sont pas rattachées au réseau étudié. Il faut par contre adopter

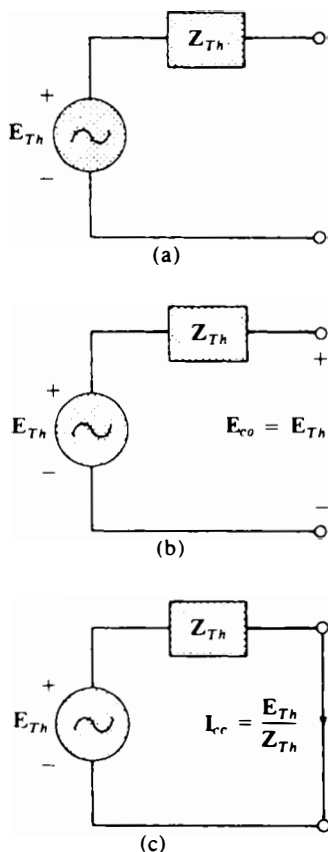


FIG. 18.28

une autre approche si ce n'est pas le cas, comme l'exemple suivant le démontrera. Cette approche n'est toutefois pas limitée au cas particulier où les sources sont commandées par des grandeurs rattachées au réseau étudié: elle est valable pour tout réseau continu ou alternatif. Évidemment, si les sources sont indépendantes, on aura avantage à suivre la méthode décrite au chapitre 8 et ci-dessus puisque, en règle générale, elle est plus directe, qu'elle permet de gagner du temps et qu'elle évite de faire certaines erreurs.

À ce point-ci, la meilleure façon de présenter la nouvelle approche du théorème de Thévenin consiste à prendre le générateur de Thévenin illustré à la figure 18.28a comme point de départ. Comme l'indique la figure 18.28b, la tension en circuit ouvert ( $E_{co}$ ) aux bornes du générateur est égale à la f.é.m.  $E_{Th}$  du générateur:

$$E_{co} = E_{Th} \quad (18.1)$$

Si, comme à la figure 18.28c, les bornes sont maintenant court-circuitées, le courant de court-circuit résultant est:

$$I_{cc} = \frac{E_{Th}}{Z_{Th}} \quad (18.2)$$

ou encore:

$$Z_{Th} = \frac{E_{Th}}{I_{cc}}$$

et:

$$Z_{Th} = \frac{E_{co}}{I_{cc}} \quad (18.3)$$

Les équations (18.1) et (18.3) indiquent que pour tout réseau linéaire bilatéral, continu ou alternatif, contenant des sources commandées d'un type ou de l'autre ou n'en contenant pas, il suffit de connaître la tension en circuit ouvert aux bornes d'une partie du réseau ainsi que le courant de court-circuit entre ces deux mêmes bornes pour déterminer le générateur de Thévenin correspondant à cette partie du réseau. Quelques exemples rendront transparente la marche à suivre. L'avantage de cette méthode, que nous avons soulignée lors de notre discussion des sources indépendantes, devrait maintenant ressortir avec un peu plus d'évidence. Le courant  $I_{cc}$ , nécessaire à la détermination de  $Z_{Th}$ , est plus difficile à obtenir, du moins en règle générale, puisqu'il est le courant résultant de toutes les sources.

Il existe une troisième approche, souvent commode, du théorème de Thévenin. On y détermine la f.é.m. du générateur

comme dans les deux méthodes précédentes mais l'impédance du générateur se calcule par l'application d'une f.é.m. extérieure aux bornes du réseau étudié et par la mesure du courant débité par la source de cette f.é.m. (voir la figure 18.29). Pour que cette méthode puisse être utilisée, il faut évidemment court-circuiter toutes les sources de tension du réseau étudié. L'impédance du générateur est bien sûr égale au quotient de la f.é.m. par le courant débité:

$$Z_{Th} = \frac{E_g}{I_g} \quad (18.4)$$

Soulignons ici que chacune des méthodes fait appel au fait que  $E_{Th} = E_{co}$  mais que l'impédance se calcule de trois façons différentes.

Les deux premiers exemples ont trait à des réseaux qui sont fréquemment des objets d'analyse en électronique. Ces réseaux comportent une source commandée par une grandeur *extérieure*, ce qui permet l'emploi de l'une quelconque des méthodes décrites dans la présente section.

**EXEMPLE 18.8** À l'aide de chacune des trois méthodes décrites dans la présente section, déterminer le générateur de Thévenin du réseau illustré à la figure 18.30.

*Solution:* La f.é.m. du générateur devant être déterminée dans chacune des méthodes, trouvons-la en premier lieu. Dans le réseau illustré à la figure 18.30,  $I_{X_C} = 0$ . Nous avons donc:

$$V_{R_1} = E_{Th} = E_{co} = \frac{R_1(\mu V)}{R_1 + R} = - \frac{\mu R_1 V}{R_1 + R}$$

en raison de la polarité de V et de la polarité choisie pour les deux bornes

Employons maintenant chacune des méthodes, dans l'ordre de leur présentation.

*Méthode 1:* Voir la figure 18.31. On a:

$$Z_{Th} = R \parallel R_1 - jX_C$$

*Méthode 2:* Voir la figure 18.32. Une fois la source de tension transposée en une source de courant (figure 18.33), la règle du diviseur de courant permet d'écrire:

$$\begin{aligned} I_{cc} &= \frac{-(R \parallel R_1) \frac{\mu V}{R}}{(R \parallel R_1) - jX_C} = - \frac{RR_1}{R + R_1} \left( \frac{\mu V}{R} \right) \\ &= \frac{-\mu R_1 V}{R + R_1} \\ &= \frac{-\mu R_1 V}{(R \parallel R_1) - jX_C} \end{aligned}$$

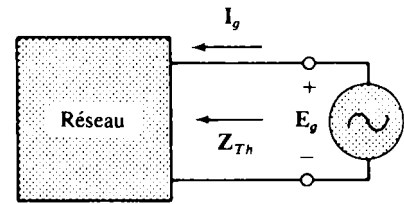


FIG. 18.29 Détermination de  $Z_{Th}$ .

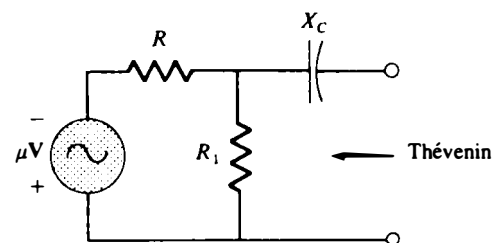


FIG. 18.30

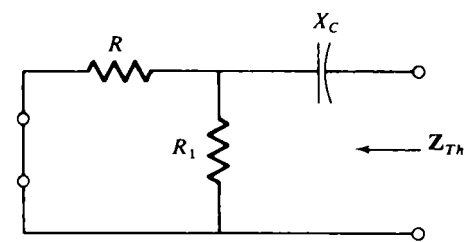


FIG. 18.31

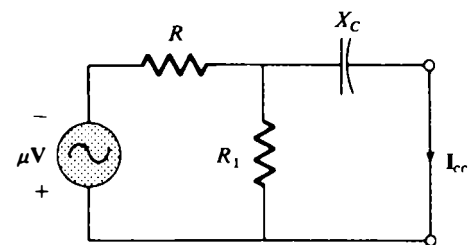


FIG. 18.32

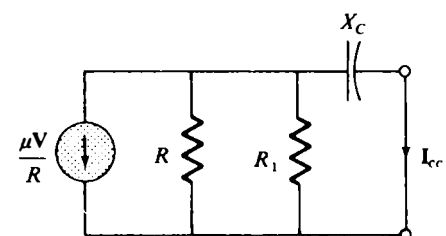


FIG. 18.33



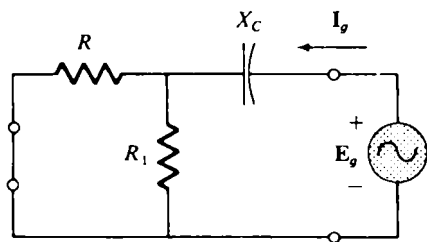


FIG. 18.34

d'où:

$$Z_{Th} = \frac{E_{co}}{I_{cc}} = \frac{\frac{-\mu R_1 V}{R_1 + R}}{\frac{-\mu R_1 V}{R + R_1}} = \frac{1}{(R \parallel R_1) - jX_C}$$

$$= R \parallel R_1 - jX_C$$

Méthode 3: Voir la figure 18.34. On a:

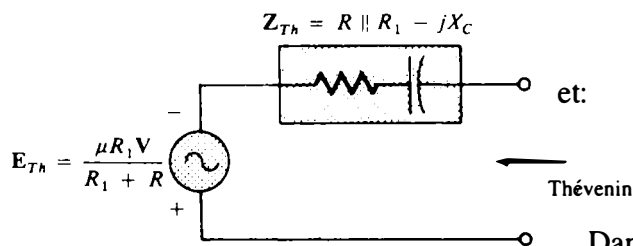


FIG. 18.35

$$I_g = \frac{E_g}{(R \parallel R_1) - jX_C}$$

$$Z_{Th} = \frac{E_g}{I_g} = R \parallel R_1 - jX_C$$

Dans chacun des cas, l'impédance du générateur est la même. La figure 18.35 représente le générateur de Thévenin qu'il fallait déterminer.

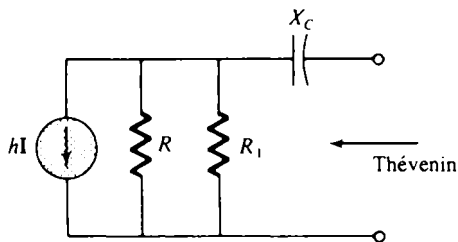


FIG. 18.36

**EXEMPLE 18.9** Reprendre l'exemple 18.8 pour le réseau illustré à la figure 18.36.

*Solution:* Voir la figure 18.36. La f.é.m. du générateur est:

$$E_{Th} = E_{co} = -hI(R \parallel R_1) = \frac{hRR_1 I}{R + R_1}$$

Méthode 1: Voir la figure 18.37. On a:

$$Z_{Th} = R \parallel R_1 - jX_C$$

À noter la similitude entre cette solution et celle de l'exemple précédent.

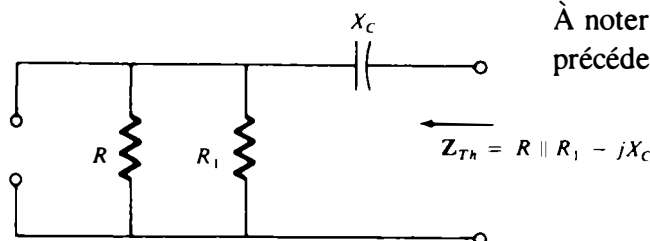


FIG. 18.37

Méthode 2: Voir la figure 18.38. On a:

$$I_{cc} = \frac{-(R \parallel R_1)hI}{(R \parallel R_1) - jX_C}$$

et:

$$Z_{Th} = \frac{E_{co}}{I_{cc}} = \frac{-hI(R \parallel R_1)}{\frac{-(R \parallel R_1)hI}{(R \parallel R_1) - jX_C}} = R \parallel R_1 - jX_C$$

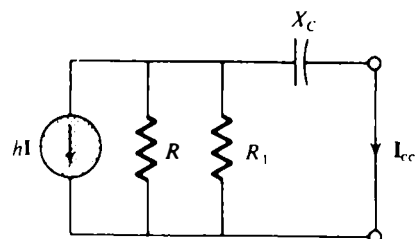


FIG. 18.38

Méthode 3: Voir la figure 18.39. On a:

$$I_{\theta} = \frac{E_g}{(R \parallel R_1) - jX_C}$$

et:

$$Z_{Th} = \frac{E_g}{I_{\theta}} = R \parallel R_1 - jX_C$$

L'exemple qui suit a trait à un réseau comprenant une source commandée de telle manière que la méthode décrite pour les réseaux à sources indépendantes ne peut pas être employée. Nous appliquerons toutefois nos trois méthodes, de façon à pouvoir en comparer les résultats.

**EXEMPLE 18.10** Voir le réseau illustré à la figure 18.40 (déjà présenté à l'exemple 18.5). Déterminer le générateur de Thévenin correspondant à la partie du réseau comprise entre les deux bornes indiquées à l'aide de chacune des méthodes décrites dans la présente section. Comparer les résultats obtenus.

*Solution:* On détermine d'abord la f.é.m. du générateur à l'aide de la loi des tensions. On a ainsi:

$$E_{Th} = V + \mu V = (1 + \mu)V$$

Cependant:

$$V = IR_1$$

de sorte que:

$$E_{Th} = (1 + \mu)IR_1$$

Trouvons maintenant  $Z_{Th}$ .

*Méthode 1:* Voir la figure 18.41. Puisque  $I = 0$ ,  $V$  et  $\mu V = 0$ :

~~$$Z_{Th} = R_1$$~~ (ce qui est faux)

*Méthode 2:* Voir la figure 18.42. L'application de la loi des tensions sur la boucle indiquée donne:

$$V + \mu V = 0$$

et:

$$V(1 + \mu) = 0$$

Puisque  $\mu$  est une constante positive, l'égalité est réalisée si et seulement si  $V = 0$ . La substitution de ce résultat dans le réseau illustré à la figure 18.42 permet de tracer le circuit à la figure 18.43. On a alors:

$$I_{cc} = I$$

et:

$$Z_{Th} = \frac{E_{co}}{I_{cc}} = \frac{(1 + \mu)IR_1}{I} = (1 + \mu)R_1 \text{ (ce qui est correct)}$$

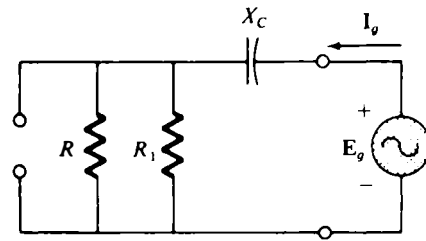


FIG. 18.39

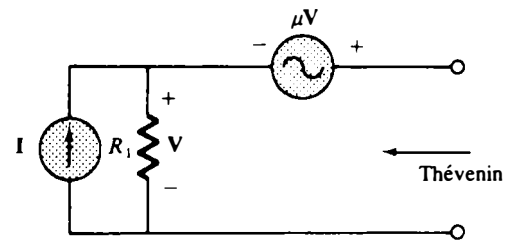


FIG. 18.40

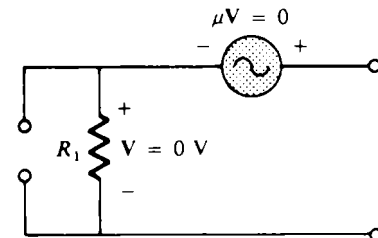


FIG. 18.41

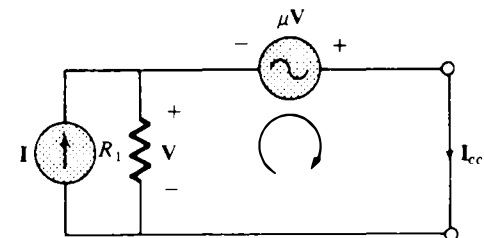


FIG. 18.42

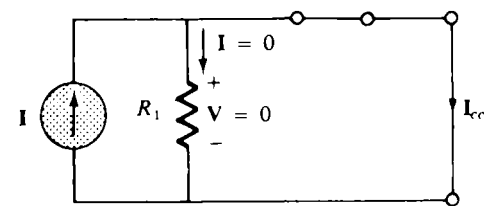


FIG. 18.43

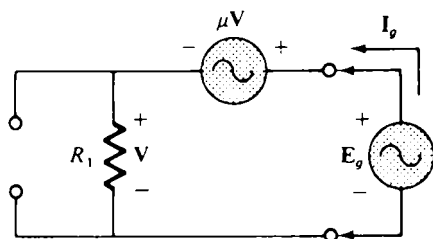


FIG. 18.44

Méthode 3: Voir la figure 18.44. On a:

$$E_g = V + \mu V = (1 + \mu)V$$

ou encore:

$$V = \frac{E_g}{1 + \mu}$$

et:

$$I_g = \frac{V}{R_1} = \frac{E_g}{(1 + \mu)R_1}$$

de sorte que:

$$Z_{Th} = \frac{E_g}{I_g} = (1 + \mu)R_1 \quad (\text{ce qui est correct})$$

La figure 18.45 illustre le générateur de Thévenin cherché, pour lequel:

$$I_c = \frac{(1 + \mu)R_1 I}{R_c + (1 + \mu)R_1}$$

ce qui confirme la solution obtenue à l'exemple 18.5.

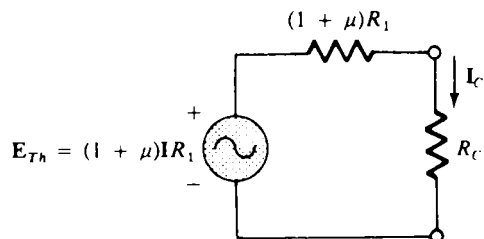


FIG. 18.45

Le réseau illustré à la figure 18.46 est le circuit équivalent du transistor aujourd'hui le plus fréquemment employé. Il va sans dire qu'il est indispensable d'en connaître les caractéristiques sur le bout du doigt et de savoir s'en servir les yeux fermés. À noter la présence dans ce circuit d'une source de tension et d'une source de courant, commandées toutes deux par des grandeurs du circuit.

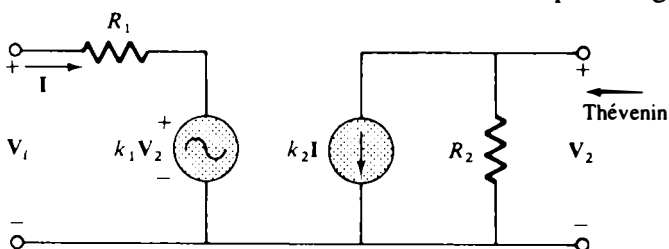


FIG. 18.46

**EXEMPLE 18.11** Déterminer le générateur de Thévenin aux bornes indiquées du réseau illustré à la figure 18.46.

*Solution:* Employons ici la deuxième méthode décrite dans la présente section. Nous avons:

$E_{Th}$ :

$$E_{co} = V_2$$

$$I = \frac{V_i - k_1 V_2}{R_1} = \frac{V_i - k_1 E_{co}}{R_1}$$

et:

$$E_{co} = -k_2 I R_2 = -k_2 R_2 \left( \frac{V_i - k_1 E_{co}}{R_1} \right)$$

$$= \frac{-k_2 R_2 V_i}{R_1} + \frac{k_1 k_2 R_2 E_{co}}{R_1}$$

ou encore:

$$E_{co} \left( 1 - \frac{k_1 k_2 R_2}{R_1} \right) = \frac{-k_2 R_2 V_i}{R_1}$$

et:

$$E_{co} \left( \frac{R_1 - k_1 k_2 R_2}{R_1} \right) = \frac{-k_2 R_2 V_i}{R_1}$$

de sorte que:

$$E_{co} = \frac{-k_2 R_2 V_i}{R_1 - k_1 k_2 R_2} = E_{Th} \quad (18.5)$$

$I_{cc}$ :

Nous avons pour le réseau illustré à la figure 18.47:

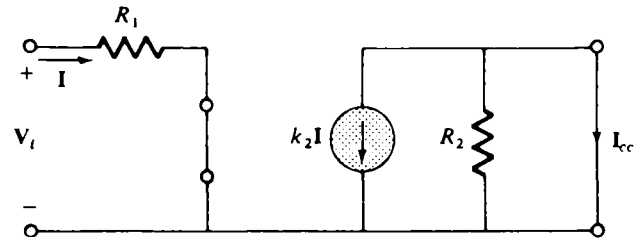


FIG. 18.47

$$V_2 = 0 \quad k_1 V_2 = 0 \quad I = \frac{V_i}{R_1}$$

et:

$$I_{cc} = -k_2 I = \frac{-k_2 V_i}{R_1}$$

de sorte que:

$$Z_{Th} = \frac{E_{co}}{I_{cc}} = \frac{\frac{-k_2 R_2 V_i}{R_1 - k_1 k_2 R_2}}{\frac{-k_2 V_i}{R_1}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 - k_1 k_2 R_2}$$

de sorte que:

$$Z_{Th} = \frac{R_2}{1 - \frac{k_1 k_2 R_2}{R_1}} \quad (18.6)$$

L'approximation  $k_1 = 0$  est fréquemment utilisée. Elle permet d'écrire:

$$E_{Th} = \frac{-k_2 R_2 V_i}{R_1} \quad k_1 = 0 \quad (18.7)$$

$$Z_{Th} = R_2 \quad k_1 = 0 \quad (18.8)$$

Appliquons maintenant la relation  $Z_{Th} = E_g / I_g$  au réseau illustré à la figure 18.48, dans lequel:

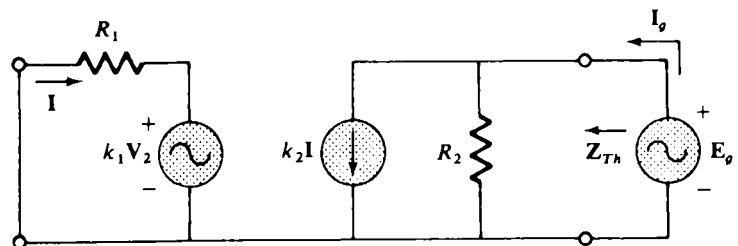


FIG. 18.48

$$I_1 = \frac{-k_1 V_2}{R_1}$$

Mais comme:

$$V_2 = E_g$$

on a:

$$I_1 = \frac{-k_1 E_g}{R_1}$$

L'application de la loi des courants donne alors:

$$\begin{aligned} I_g &= k_2 I_1 + \frac{E_g}{R_2} = k_2 \left( -\frac{k_1 E_g}{R_1} \right) + \frac{E_g}{R_2} \\ &= E_g \left( \frac{1}{R_2} - \frac{k_1 k_2}{R_1} \right) \end{aligned}$$

et:

$$\frac{I_g}{E_g} = \frac{R_1 - k_1 k_2 R_2}{R_1 R_2}$$

ou encore:

$$Z_{Th} = \frac{E_g}{I_g} = \frac{R_1 R_2}{R_1 - k_1 k_2 R_2}$$

résultat identique au résultat obtenu ci-dessus.

Les deux dernières méthodes décrites dans la section n'ont été appliquées qu'aux réseaux dans lesquels les sorties des sources commandées dépendaient d'une grandeur rattachée à la partie du réseau dont il fallait déterminer le générateur de Thévenin. On comprendra par ailleurs que ces deux méthodes peuvent aussi s'appliquer à tout réseau, soit continu soit alternatif, ne contenant que des sources indépendantes ou que des sources commandées par des grandeurs non rattachées à la partie du réseau dont on veut déterminer le générateur de Thévenin.

## 18.4 THÉORÈME DE NORTON

Les trois méthodes que nous avons utilisées pour appliquer le théorème de Thévenin peuvent être adaptées au théorème de Norton. Les impédances des générateurs de Thévenin et de Norton étant les mêmes pour un réseau donné, certaines parties de notre démonstration seront très semblables à des passages de la section précédente. Notre étude portera d'abord sur les réseaux à sources indépendantes, pour lesquels nous adopterons l'approche élaborée au chapitre 8, puis sur les réseaux à sources commandées, pour lesquels nous adapterons les méthodes mises au point pour le théorème de Thévenin.

Le chapitre 8 nous apprend que le théorème de Norton permet de remplacer tout réseau linéaire bilatéral en courant alternatif par un générateur constitué d'une source de courant et d'une impédance (figure 18.49).

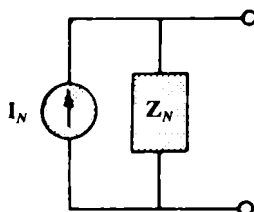


FIG. 18.49

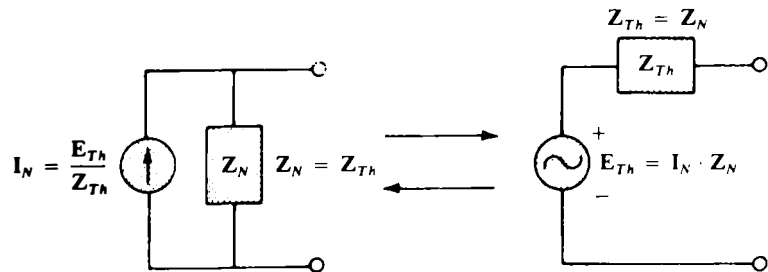
Les réactances étant fonction de la fréquence, la correspondance entre le réseau remplacé et le générateur de Norton ne vaut toutefois qu'à une fréquence donnée, tout comme pour le générateur de Thévenin.

### Sources indépendantes

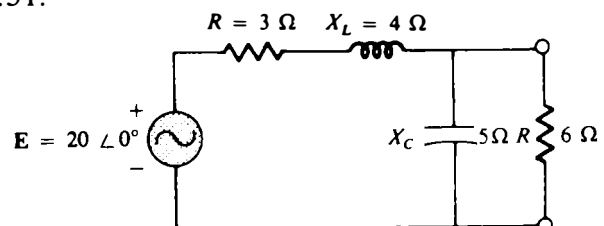
Les étapes permettant de déterminer le générateur de Norton d'un circuit sont données ci-dessous. On notera que la phraséologie est la même qu'au chapitre 8, la seule différence étant la substitution du mot *impédance* au mot *résistance*.

1. Retirer du réseau la branche ou la partie à laquelle sera raccordé le générateur.
2. Repérer les deux bornes du réseau résiduel (○, ●, etc).
3. Calculer  $Z_N$ . Pour ce faire, court-circuiter toutes les sources de tension et mettre en circuit ouvert toutes les sources de courant; déterminer ensuite l'impédance totale présente aux deux bornes repérées.
4. Calculer  $I_N$ . Pour ce faire, restituer au réseau ses sources de tension et de courant, puis déterminer l'intensité du courant qui passerait dans un court-circuit reliant les deux bornes repérées.
5. Remplacer le réseau résiduel par le générateur et raccorder aux bornes de ce dernier la branche ou la partie qui avait été retirée du réseau.

La transposition des sources illustrées à la figure 18.50 permet d'obtenir le générateur de Norton à partir du générateur de Thévenin, et vice versa. Cette transposition peut se faire pour tout générateur de Thévenin ou de Norton correspondant à un réseau constitué d'un nombre quelconque de sources indépendantes ou commandées.


**FIG. 18.50**

**EXEMPLE 18.12** Déterminer le générateur de Norton du réseau extérieur à la résistance de  $6 \Omega$  illustré à la figure 18.51.


**FIG. 18.51**

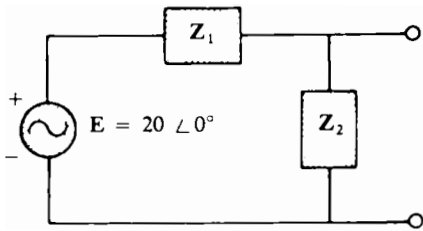


FIG. 18.52

Solution:

Étapes 1 et 2: Voir la figure 18.52. On a:

$$Z_1 = 3 + j4 = 5 \angle 53,13^\circ \quad Z_2 = -j5$$

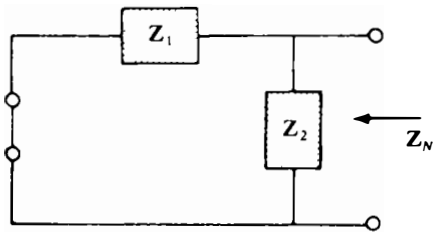


FIG. 18.53

Étape 3: Voir la figure 18.53. On a:

$$Z_N = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{(5 \angle 53,13^\circ)(5 \angle -90^\circ)}{3 + j4 - j5} = \frac{25 \angle -36,87^\circ}{3 - j1}$$

$$Z_N = \frac{25 \angle -36,87^\circ}{3,16 \angle -18,43^\circ} = 7,91 \angle -18,44^\circ = 7,50 - j2,50$$

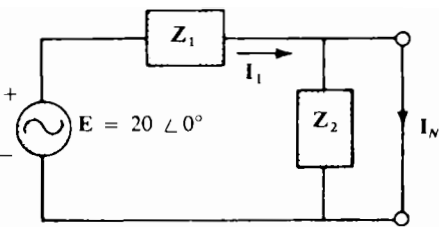


FIG. 18.54

Étape 4: Voir la figure 18.54. On a:

$$I_N = I_1 = \frac{E}{Z_1} = \frac{20 \angle 0^\circ}{5 \angle 53,13^\circ} = 4 \angle -53,13^\circ$$

Étape 5: La figure 18.55 illustre le générateur de Norton cherché.

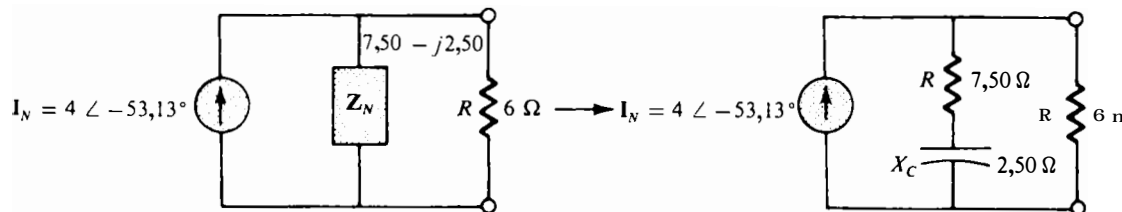


FIG. 18.55

**EXEMPLE 18.13** Déterminer le générateur de Norton du réseau extérieur à la réactance capacitive de  $7 \Omega$  illustré à la figure 18.56.

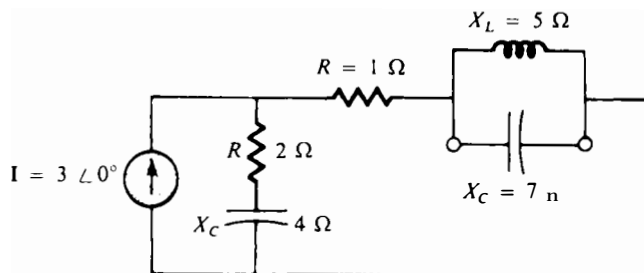


FIG. 18.56

Solution:

Étape 1 et 2: Voir la figure 18.57. On a:

$$Z_1 = 2 - j4 \quad Z_2 = 1 \quad Z_3 = j5$$

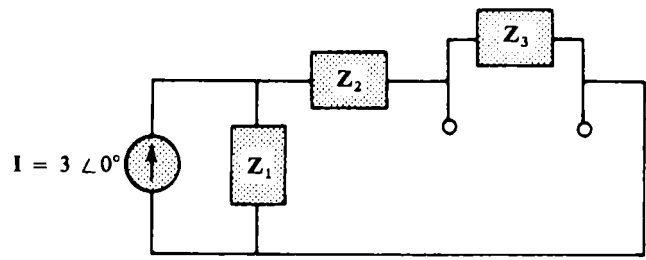


FIG. 18.57

Étape 3: Voir la figure 18.58. On a:

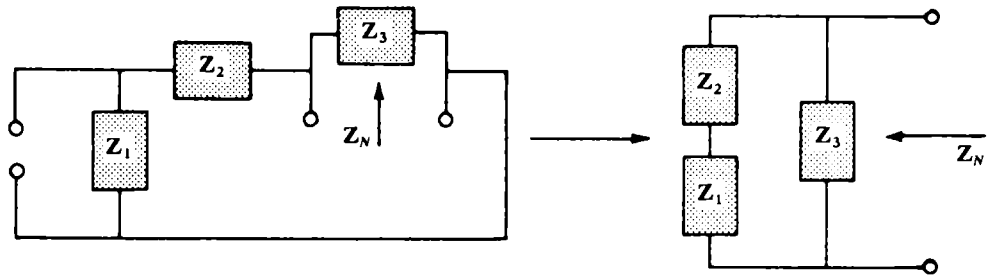


FIG. 18.58

$$Z_N = \frac{Z_3(Z_1 + Z_2)}{Z_3 + (Z_1 + Z_2)}$$

$$Z_1 + Z_2 = 2 - j4 + 1 = 3 - j4 = 5 \angle -53,13^\circ$$

$$Z_N = \frac{(5 \angle 90^\circ)(5 \angle -53,13^\circ)}{j5 + 3 - j4} = \frac{25 \angle 36,87^\circ}{3 + j1}$$

$$= \frac{25 \angle 36,87^\circ}{3,16 \angle +18,43^\circ}$$

$$= 7,91 \angle 18,44^\circ = 7,50 + j2,50$$

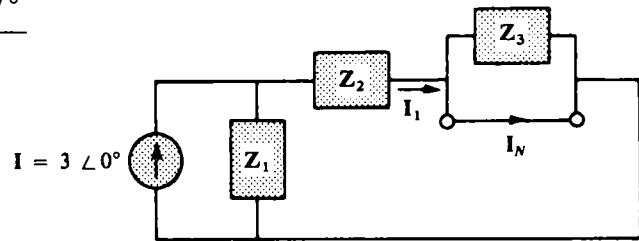


FIG. 18.59

Étape 4: Voir la figure 18.59. On a:

$$I_N = I_1 = \frac{Z_1 I}{Z_1 + Z_2} \quad (\text{règle du diviseur de courant})$$

$$= \frac{(2 - j4)(3)}{3 - j4} = \frac{6 - j12}{5 \angle -53,13^\circ} = \frac{13,4 \angle -63,43^\circ}{5 \angle -53,13^\circ}$$

$$I_N = 2,68 \angle -10,3^\circ$$

Étape 5: La figure 18.60 illustre le générateur de Norton cherché.

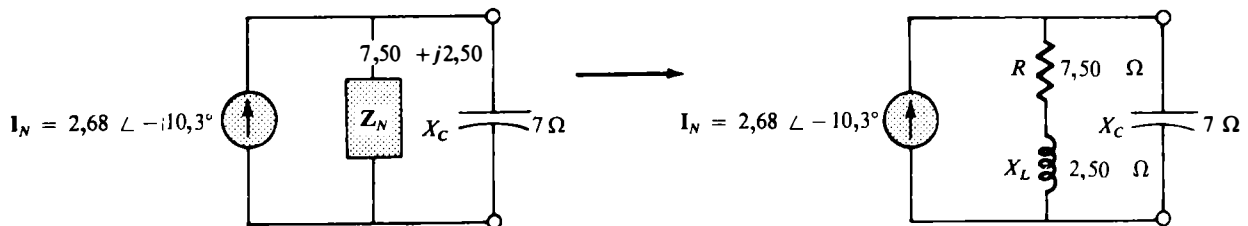


FIG. 18.60



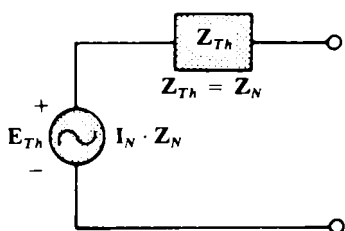


FIG. 18.61

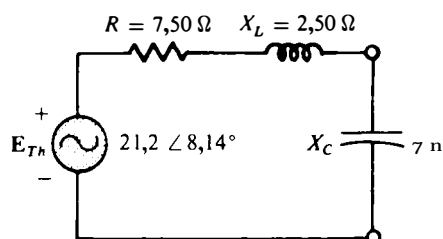


FIG. 18.62

**EXEMPLE 18.14** Déterminer le générateur de Thévenin du réseau extérieur à la réactance capacitive de  $7 \Omega$  illustré à la figure 18.56.

*Solution:* Par transposition entre les sources (figure 18.61) on a :

$$Z_{Th} = Z_N = 7,50 + j2,50$$

$$E_{Th} = I_N Z_N = (2,68 \angle -10,3^\circ)(7,91 \angle 18,44^\circ)$$

$$E_{Th} = 21,2 \angle 8,14^\circ$$

La figure 18.62 illustre le générateur de Thévenin cherché.

### Sources commandées

Tout comme pour le théorème de Thévenin, la méthode à suivre ne change pas si les sources du réseau, dont il faut déterminer le générateur de Norton, sont commandées par des grandeurs non rattachées au réseau en question.

La marche à suivre, si ce n'est pas le cas, est donnée ci-dessous. Comme auparavant, les deux méthodes peuvent être employées si le réseau dont il faut déterminer le générateur de Norton contient à la fois des sources indépendantes et des sources commandées par des grandeurs qui ne lui sont pas rattachées.

La figure 18.63a illustre le générateur de Norton. On a par ailleurs à la figure 18.63b :

$$I_{cc} = I_N \tag{18.9}$$

et à la figure 18.63c :

$$E_{co} = I_N Z_N$$

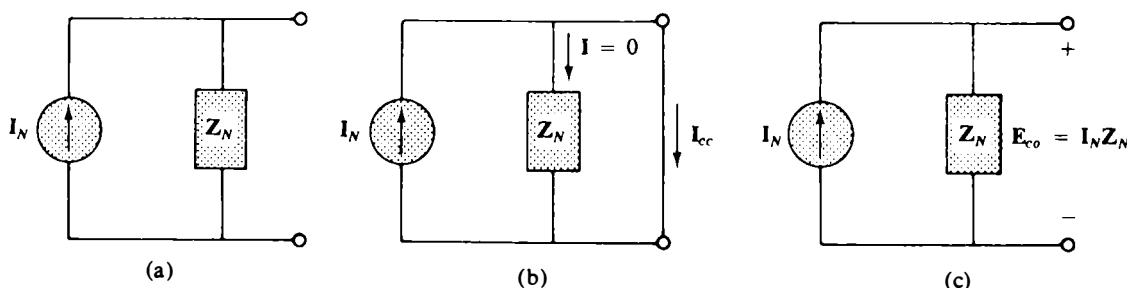


FIG. 18.63

Une manipulation simple donne :

$$Z_N = \frac{E_{co}}{I_N}$$

et :

$$Z_N = \frac{E_{co}}{I_{cc}} \tag{18.10}$$

L'impédance du générateur de Norton se détermine aussi par l'application d'une f.é.m. extérieure  $E_g$  aux bornes du réseau étudié et par la mesure du courant  $I_g$  débité par la source de la f.é.m. (figure 18.64). Pour que cette méthode puisse être utilisée, il faut évidemment annuler la sortie de toutes les sources indépendantes et de toutes les sources commandées du réseau dont la grandeur de commande ne lui est pas rattachée. Dans ces conditions, nous avons:

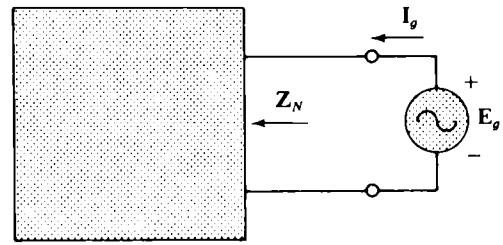


FIG. 18.64

$$Z_N = \frac{E_g}{I_g} \quad (18.11)$$

Quant au courant du générateur de Norton, il est égal au courant de court-circuit.

**EXEMPLE 18.15** À l'aide de chacune des méthodes décrites relatives aux sources commandées, déterminer le générateur de Norton du réseau illustré à la figure 18.65.

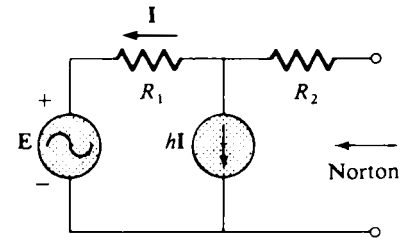


FIG. 18.65

*Solution:*

$I_N$ :

Le courant  $I_N$  se détermine de la même façon dans chacune des méthodes. L'application de la loi des courants au réseau illustré à la figure 18.66 donne:

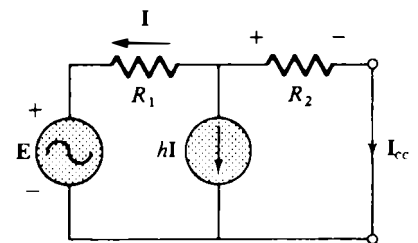


FIG. 18.66

$$0 = I + hI + I_{cc}$$

ou encore:

$$I_{cc} = -(1 + h)I$$

La loi des tensions donne:

$$E + IR_1 - I_{cc}R_2 = 0$$

et:

$$IR_1 = I_{cc}R_2 - E$$

ou:

$$I = \frac{I_{cc}R_2 - E}{R_1}$$

de sorte que:

$$I_{cc} = -(1 + h)I = -(1 + h) \left( \frac{I_{cc}R_2 - E}{R_1} \right)$$

ou encore:

$$R_1 I_{cc} = -(1 + h)I_{cc}R_2 + (1 + h)E$$

$$I_{cc} [R_1 + (1 + h)R_2] = (1 + h)E$$

$$I_{cc} = \frac{(1 + h)E}{R_1 + (1 + h)R_2} = I_N$$

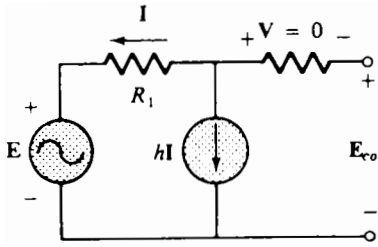


FIG. 18.67

$Z_N$ :

*Méthode 1:* La tension  $E_{co}$  se détermine à partir du réseau illustré à la figure 18.67 à l'aide de la loi des courants. En effet:

$$0 = I + hI \text{ ou } I(h + 1) = 0$$

Puisque  $h$  est une constante positive, la condition ci-dessus est satisfaite si  $I$  est nul. Par conséquent:

$$I = 0 \text{ et } hI = 0$$

de sorte que:

$$E_{co} = E$$

et:

$$Z_N = \frac{E_{co}}{I_{cc}} = \frac{E}{\frac{(1 + h)E}{R_1 + (1 + h)R_2}} = \frac{R_1 + (1 + h)R_2}{(1 + h)}$$

*Méthode 2:* Voir la figure 18.68. La loi des courants donne:

$$I_g = I + hI = (1 + h)I$$

et la loi des tensions:

$$E_g - I_g R_2 - I R_1 = 0$$

ou encore:

$$I = \frac{E_g - I_g R_2}{R_1}$$

Par substitution, on a:

$$I_g = (1 + h)I = (1 + h) \left( \frac{E_g - I_g R_2}{R_1} \right)$$

et:

$$I_g R_1 = (1 + h)E_g - (1 + h)I_g R_2$$

de sorte que:

$$E_g(1 + h) = I_g[R_1 + (1 + h)R_2]$$

ou encore:

$$Z_N = \frac{E_g}{I_g} = \frac{R_1 + (1 + h)R_2}{1 + h}$$

ce qui confirme notre premier résultat.

**EXEMPLE 18.16** Déterminer le générateur de Norton du réseau illustré à la figure 18.46.

*Solution:* On a par transposition entre les sources:

$$I_N = \frac{E_{Th}}{Z_{Th}} = \frac{-k_2 R_2 V_i}{\frac{R_1 - k_1 k_2 R_2}{R_1 R_2}} = \frac{-k_2 R_2 V_i}{R_1 - k_1 k_2 R_2}$$

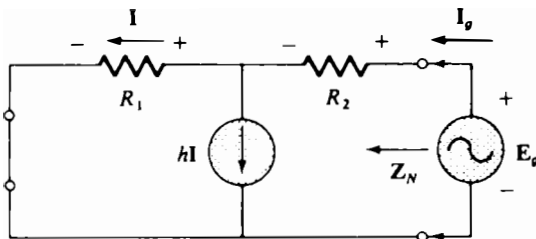


FIG. 18.68

et:

$$\mathbf{I}_N = \frac{-k_2 V_i}{R_1} \quad (18.12)$$

ce qui est le courant  $\mathbf{I}_{cc}$  déterminé dans cet exemple et, par conséquent:

$$\mathbf{Z}_N = \mathbf{Z}_{Th} = \frac{R_2}{1 - \frac{k_1 k_2 R_2}{R_1}} \quad (18.13)$$

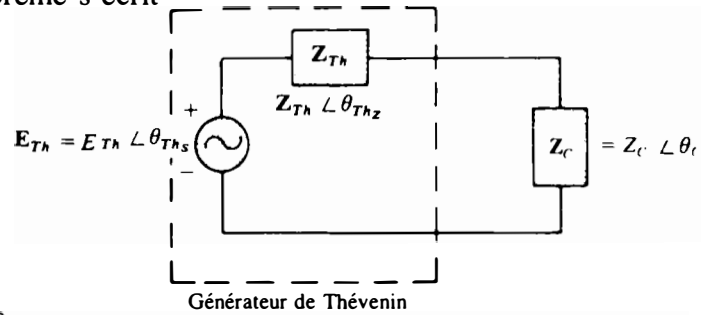
En prenant  $k_1 = 0$ , on a:

$$\mathbf{I}_N = \frac{-k_2 V_i}{R_1} \quad k_1 = 0 \quad (18.14)$$

$$\mathbf{Z}_N = R_2 \quad k_1 = 0 \quad (18.15)$$

### 18.5 THÉORÈME DU TRANSFERT MAXIMAL DE PUISSANCE

En courant alternatif, le théorème du transfert maximal de puissance s'énonce ainsi: *La puissance fournie à une charge est maximale quand l'impédance de la charge est le conjugué de l'impédance du générateur de Thévenin du réseau raccordé à ses bornes.* Traduit mathématiquement, le théorème s'écrit (figure 18.69):

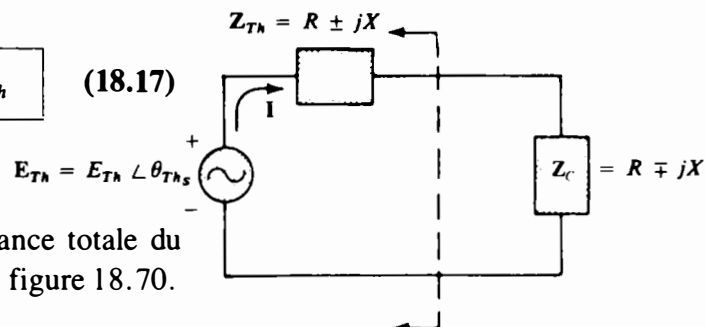


$$\mathbf{Z}_c = \mathbf{Z}_{Th} \quad \text{et} \quad \theta_c = -\theta_{Thz} \quad (18.16)$$

FIG. 18.69

et, dans la forme rectangulaire:

$$R_c = R_{Th} \quad \text{et} \quad \pm jX_c = \mp jX_{Th} \quad (18.17)$$



Les conditions ci-dessus signifient que l'impédance totale du réseau est purement résistive, comme l'indique la figure 18.70. On a donc:

$$\mathbf{Z}_T = (R \pm jX) + (R \mp jX)$$

FIG. 18.70

et:

$$\boxed{Z_T = 2R} \quad (18.18)$$

Le circuit étant purement résistif, le facteur de puissance est égal à l'unité dans les conditions de transfert maximal:

$$\boxed{F_p = 1} \quad (\text{transfert maximal de puissance}) \quad (18.19)$$

La valeur du courant  $I$  dans le réseau illustré à la figure 18.70 est:

$$I = \frac{E_{Th}}{Z_T} = \frac{E_{Th}}{2R}$$

et:

$$P_{\max} = I^2 R = \left(\frac{E_{Th}}{2R}\right)^2 R$$

$$\boxed{P_{\max} = \frac{E_{Th}^2}{4R}} \quad (18.20)$$

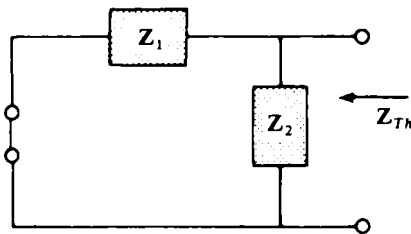
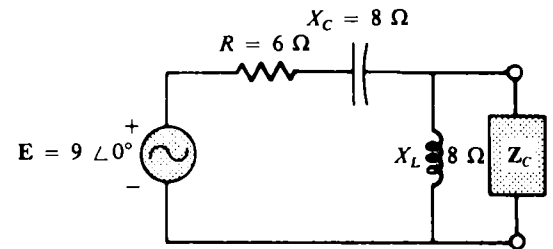


FIG. 18.71

**EXEMPLE 18.17** Calculer l'impédance de la charge illustrée à la figure 18.71, qui donne lieu au transfert maximal de puissance.



*Solution:*

$$Z_1 = 6 - j8 = 10 \angle -53,13^\circ$$

$$Z_2 = j8$$

$$Z_{Th} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{(10 \angle -53,13^\circ)(8 \angle 90^\circ)}{6 - j8 + j8} = \frac{80 \angle 36,87^\circ}{6 \angle 0^\circ}$$

$$Z_{Th} = 13,33 \angle 36,87^\circ = 10,66 + j8$$

et:

$$Z_C = 13,3 \angle -36,87^\circ = \mathbf{10,66 - j8}$$

Pour trouver la puissance maximale, il faut d'abord calculer  $E_{Th}$  (figure 18.72) de la façon suivante:

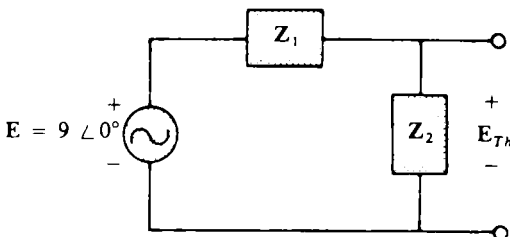


FIG. 18.72

$$E_{Th} = \frac{Z_2(E)}{Z_2 + Z_1} \quad (\text{règle du diviseur de tension})$$

$$E_{Th} = \frac{(8 \angle 90^\circ)(9 \angle 0^\circ)}{j8 + 6 - j8} = \frac{72 \angle 90^\circ}{6 \angle 0^\circ} = \mathbf{12 \angle 90^\circ}$$

$$P_{\max} = \frac{E_{Th}^2}{4R} = \frac{(12)^2}{4(10,66)} = \frac{144}{42,64} = \mathbf{3,38 \text{ W}}$$

**EXEMPLE 18.18** Calculer l'impédance de la charge illustrée à la figure 18.73 donnant lieu au transfert maximal de puissance et calculer la puissance maximale.

*Solution:* Il faut d'abord calculer  $Z_{Th}$  (figure 18.74). On a:

$$Z_1 = j9 \quad Z_2 = 8$$

Par transfiguration  $\Delta$ -Y (figure 18.75), on obtient ensuite:

$$Z'_1 = \frac{Z_1}{3} = j3 \quad Z_2 = 8$$

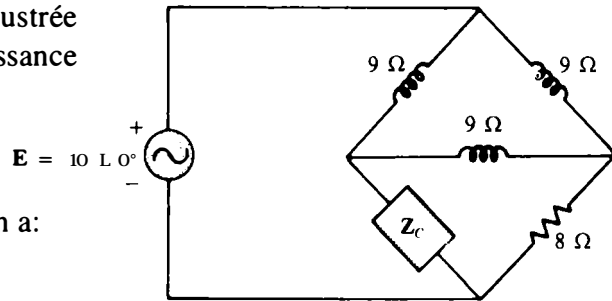


FIG. 18.73

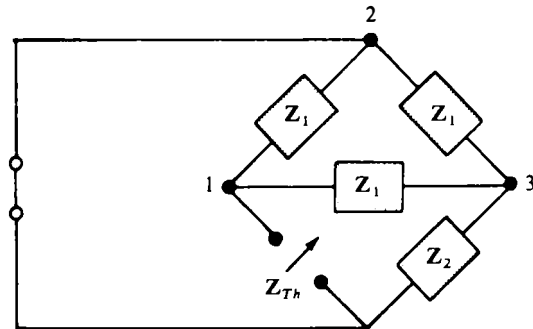


FIG. 18.74

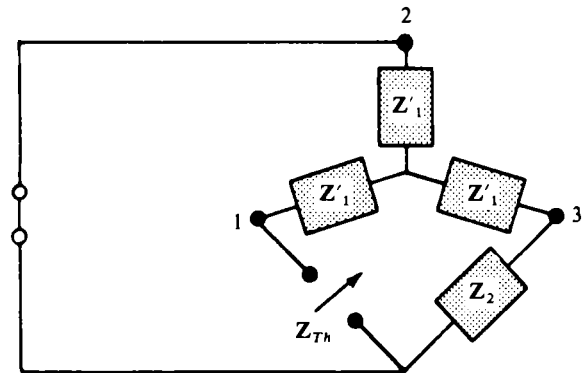


FIG. 18.75

La figure 18.76 représente le réseau transfiguré dans lequel:

$$\begin{aligned} Z_{Th} &= Z'_1 + \frac{Z'_1(Z'_1 + Z_2)}{Z'_1 + (Z'_1 + Z_2)} \\ &= j3 + \frac{3 \angle 90^\circ(j3 + 8)}{j6 + 8} \\ &= j3 + \frac{(3 \angle 90^\circ)(8,54 \angle 20,56^\circ)}{10 \angle 36,87^\circ} \\ &= j3 + \frac{25,62 \angle 110,56^\circ}{10 \angle 36,87^\circ} = j3 + 2,56 \angle 73,69^\circ \\ &= j3 + 0,72 + j2,46 \\ Z_{Th} &= 0,72 + j5,46 \end{aligned}$$

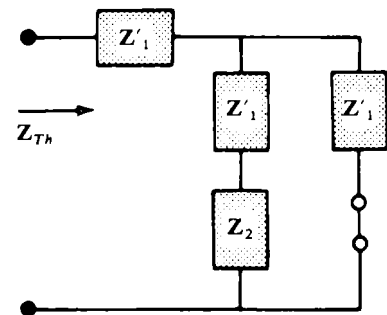


FIG. 18.76

et:

$$Z_c = 0,72 - j5,46$$

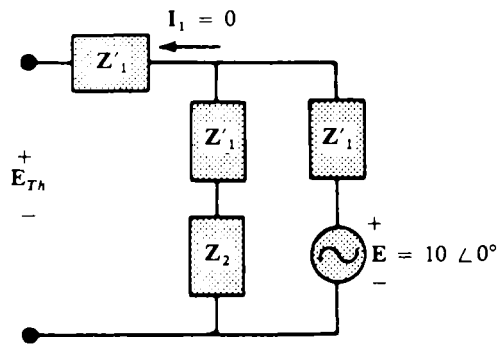


FIG. 18.77

Le calcul de  $E_{Th}$  fait appel au réseau modifié illustré à la figure 18.77 dans lequel réapparaît la source de tension. Puisque  $I_1 = 0$ , la tension  $E_{Th}$  est la tension aux bornes des impédances série  $Z'_1$  et  $Z_2$ . La règle du diviseur de tension permet d'écrire:

$$E_{Th} = \frac{(Z'_1 + Z_2)E}{Z'_1 + Z_2 + Z'_1} = \frac{(j3 + 8)(10 \angle 0^\circ)}{8 + j6} = \frac{(8,54 \angle 20,56^\circ)(10 \angle 0^\circ)}{10 \angle 36,87^\circ}$$

$$E_{Th} = 8,54 \angle -16,31^\circ$$

et:

$$P_{max} = \frac{E_{Th}^2}{4R} = \frac{(8,54)^2}{(4)(0,72)} = \frac{72,93}{2,88}$$

$$P_{max} = 25,32 \text{ W}$$

## 18.6 THÉORÈMES DE SUBSTITUTION, DE RÉCIPROCITÉ ET DE MILLMAN

Ainsi que nous le soulignons dans l'introduction, nous ne reprenons pas ici les explications des théorèmes de substitution, de réciprocité et de Millman. Ces derniers peuvent être appliqués aux réseaux alternatifs avec peu de difficulté (et font d'ailleurs l'objet de certains problèmes de fin de chapitre), après une revue attentive du chapitre 8.

## PROBLÈMES

### Section 18.2

1. À l'aide du théorème de superposition, déterminez le courant qui traverse l'inductance  $L_1$  de chacun des réseaux illustrés à la figure 18.78.

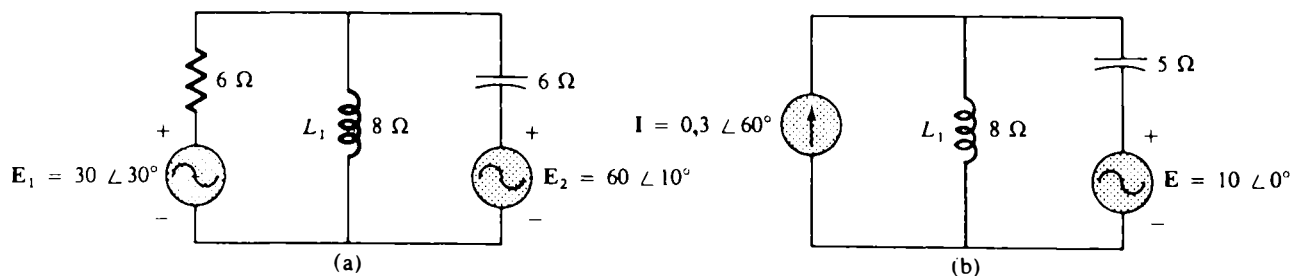


FIG. 18.78

\*2. Refaites le problème 1 pour les réseaux illustrés à la figure 18.79.

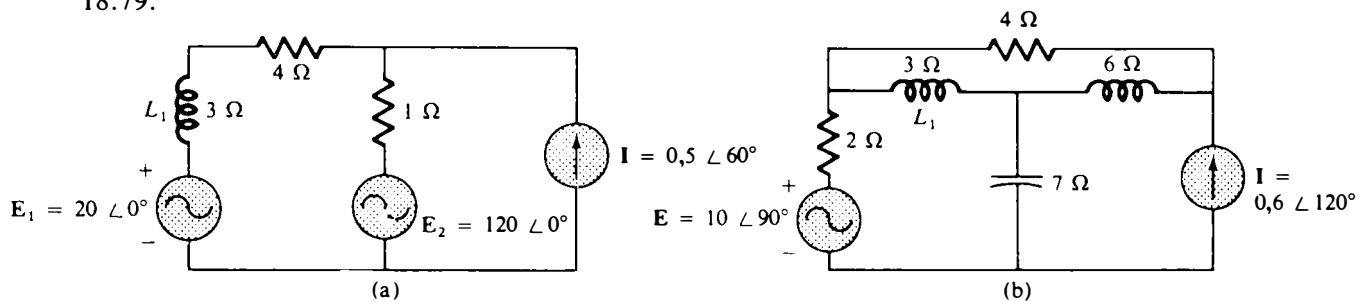


FIG. 18.79

3. À l'aide du théorème de superposition, déterminez le courant  $I_L$  (avec  $h = 100$ ) dans le réseau illustré à la figure 18.80.

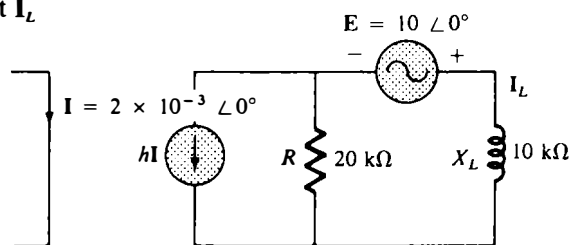


FIG. 18.80

4. À l'aide du théorème de superposition, déterminez la tension  $V_C$  (avec  $\mu = 20$ ) dans le réseau illustré à la figure 18.81.

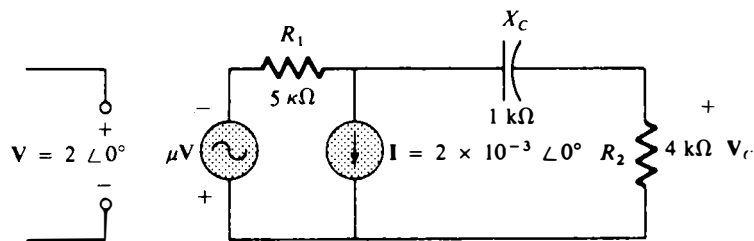


FIG. 18.81

\*5. À l'aide du théorème de superposition, déterminez le courant  $I_L$  (avec  $\mu = 20$  et  $h = 100$ ) dans le réseau illustré à la figure 18.82.

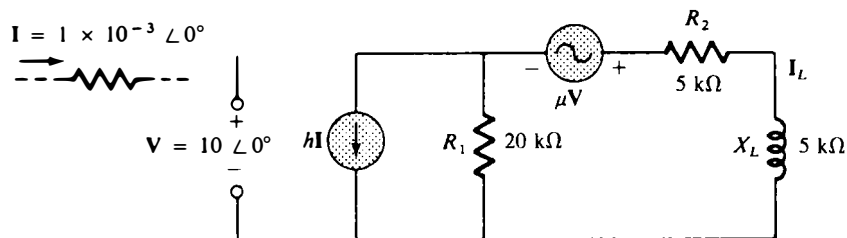


FIG. 18.82

\*6. Déterminez la tension  $V_C$  (avec  $h = 50$ ) dans le réseau illustré à la figure 18.83.

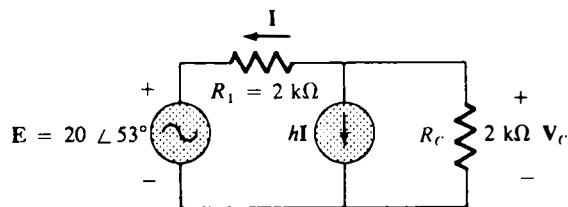


FIG. 18.83





\*7. Calculez le courant  $I$  dans le réseau illustré à la figure 18.84.

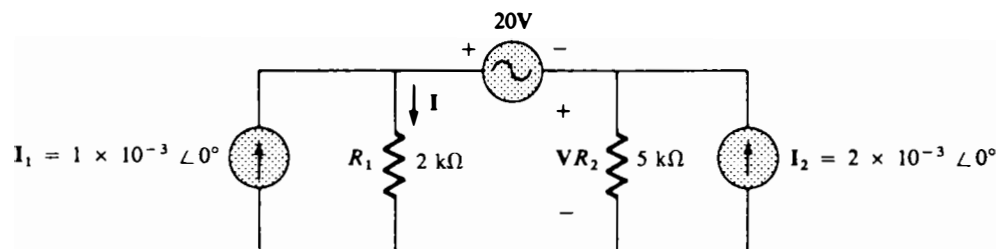


FIG. 18.84

Section 18.3

8. Déterminez le générateur de Thévenin des parties des réseaux illustrés à la figure 18.85 extérieures aux éléments situés entre les points  $a$  et  $b$ .

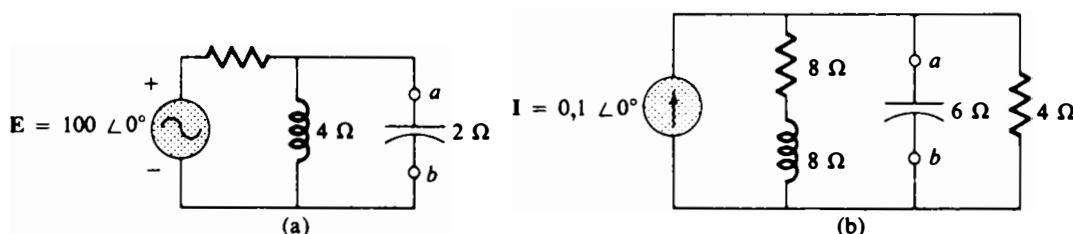


FIG. 18.85

\*9. Refaites le problème 8 pour les réseaux illustrés à la figure 18.86.

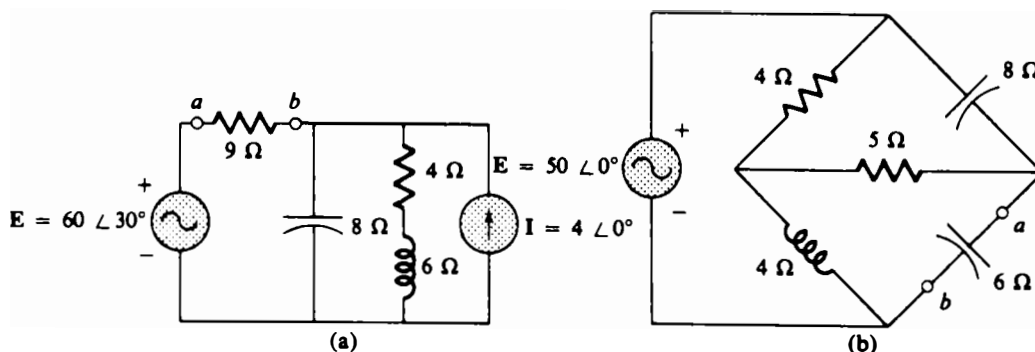


FIG. 18.86

\*10. Refaites le problème 8 pour les réseaux illustrés à la figure 18.87.

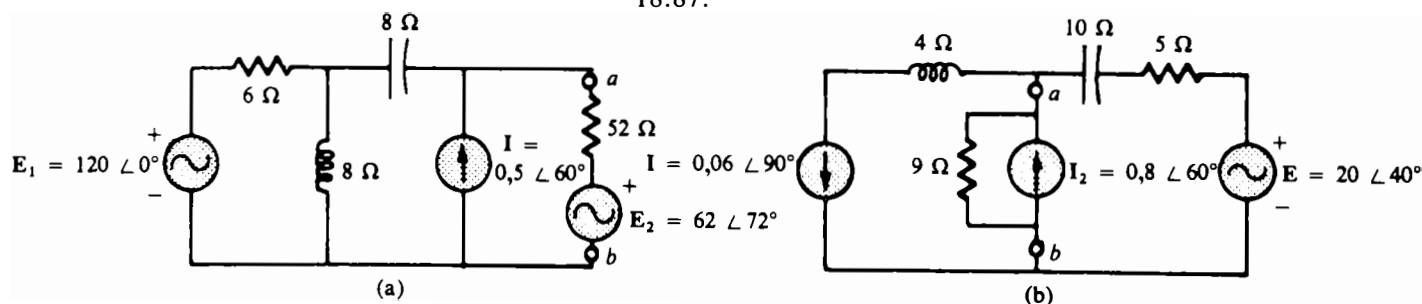


FIG. 18.87



- 11. Déterminez le générateur de Thévenin du réseau extérieur à la réactance inductive de  $5\text{ k}\Omega$  à la figure 18.88 (en fonction de  $V$ ).
- 12. Déterminez le générateur de Thévenin du réseau extérieur à la réactance inductive de  $4\text{ k}\Omega$  à la figure 18.89 (en fonction de  $I$ ).
- 13. Déterminez le générateur de Thévenin du réseau extérieur à la réactance inductive de  $10\text{ k}\Omega$  à la figure 18.80.
- 14. Déterminez le générateur de Thévenin du réseau extérieur à la résistance de  $4\text{ k}\Omega$  à la figure 18.81.
- \*15. Déterminez le générateur de Thévenin du réseau extérieur à la réactance inductive de  $5\text{ k}\Omega$  à la figure 18.82.
- \*16. Déterminez le générateur de Thévenin du réseau extérieur à la résistance de  $2\text{ k}\Omega$  à la figure 18.83.

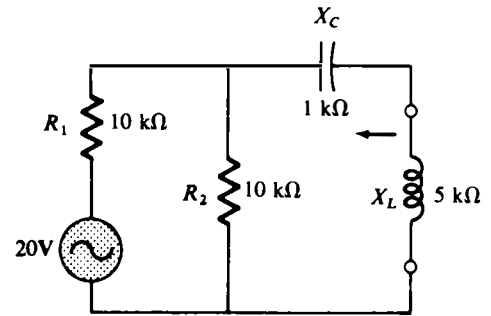


FIG. 18.88

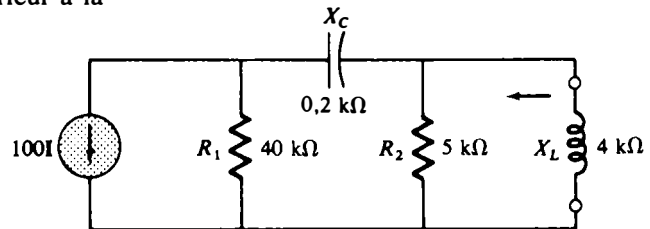


FIG. 18.89

- \*17. Déterminez le générateur de Thévenin du réseau extérieur à la résistance  $R_1$  à la figure 18.84.

Section 18.4

- 18. Déterminez le générateur de Norton des parties des réseaux illustrés à la figure 18.85 extérieures aux éléments situés entre les points  $a$  et  $b$ .
- 19. Refaites le problème 18 pour les réseaux illustrés à la figure 18.86.
- \*20. Refaites le problème 18 pour les réseaux illustrés à la figure 18.87.
- \*21. Refaites le problème 18 pour les réseaux illustrés à la figure 18.90.

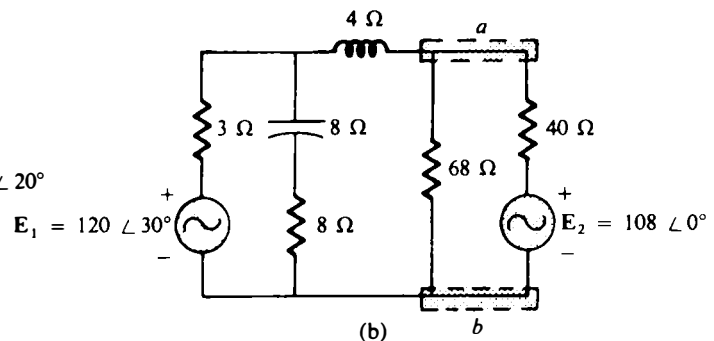
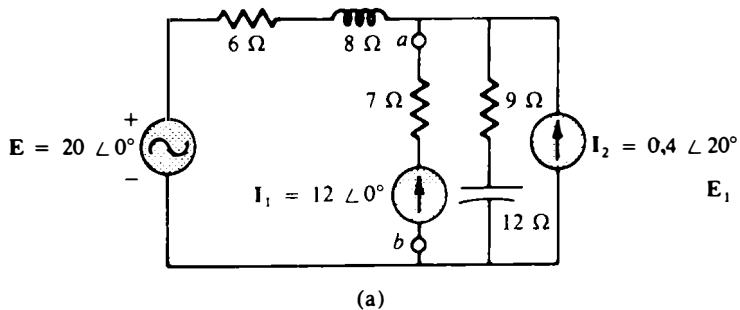


FIG. 18.90

- 22. Déterminez le générateur de Norton du réseau extérieur à la réactance inductive de  $5\text{ k}\Omega$  à la figure 18.88.
- 23. Déterminez le générateur de Norton du réseau extérieur à la réactance inductive de  $4\text{ k}\Omega$  à la figure 18.89.
- 24. Déterminez le générateur de Norton du réseau extérieur à la résistance de  $4\text{ k}\Omega$  à la figure 18.81.



\*25. Déterminez le générateur de Norton du réseau extérieur à la réactance inductive de  $5\text{ k}\Omega$  à la figure 18.82.

\*26. Déterminez le générateur de Norton du réseau extérieur à la résistance de  $2\text{ k}\Omega$  à la figure 18.91.

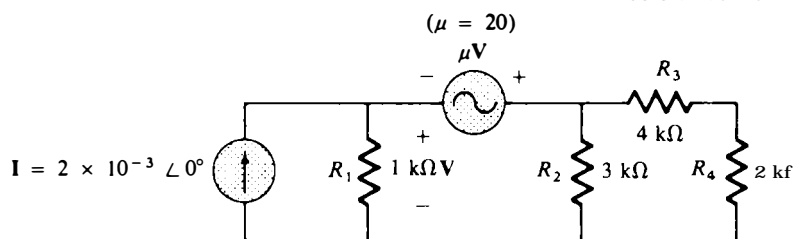


FIG. 18.91

\*27. Déterminez le générateur de Norton du réseau extérieur à la source de courant  $I_1$  à la figure 18.84.

Section 18.5

28. Calculez l'impédance totale  $Z_c$  de la charge des réseaux illustrés à la figure 18.92 dans les conditions de transfert maximal de puissance et déterminer la puissance maximale fournie à la charge.

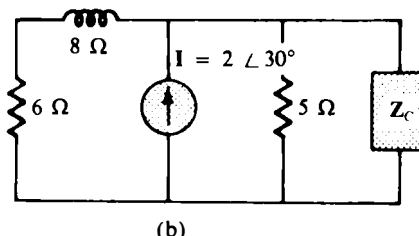
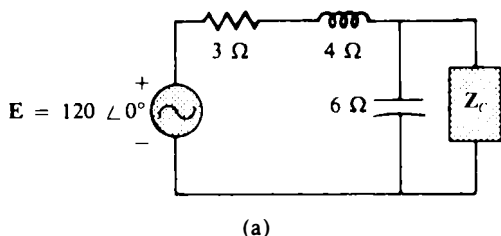


FIG. 18.92

\*29. Refaites le problème 28 pour les réseaux illustrés à la figure 18.93.

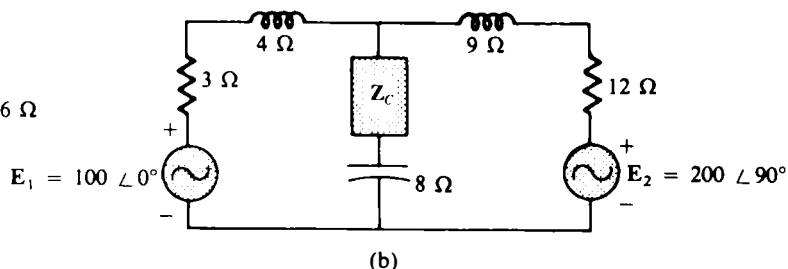
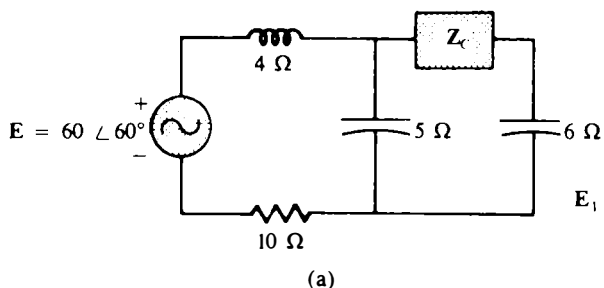


FIG. 18.93

30. Refaites le problème 28 pour le réseau illustré à la figure 18.94.

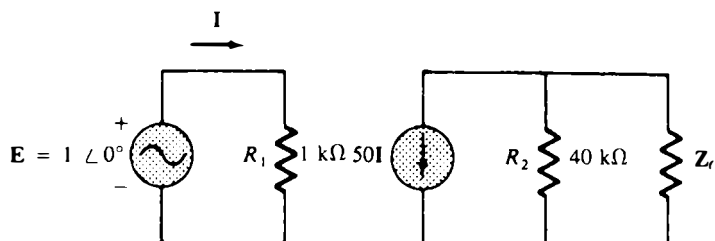


FIG. 18.94

Section 18.6

31. À l'aide du théorème de substitution, déterminez deux branches équivalentes de la branche  $a-b$  du réseau illustré à la figure 18.95.

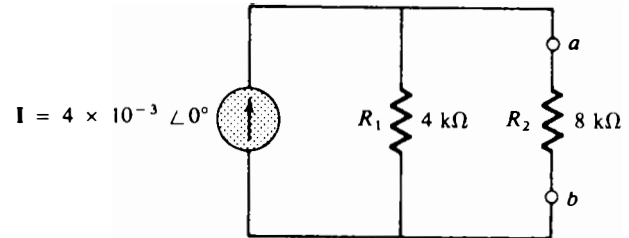


FIG. 18.95

32. a. Calculez le courant  $I$  dans le réseau de la figure 18.96a.  
 b. Refaites la partie (a) pour le réseau illustré à la figure 18.96b.  
 c. Les deux courants ci-dessus sont-ils identiques?

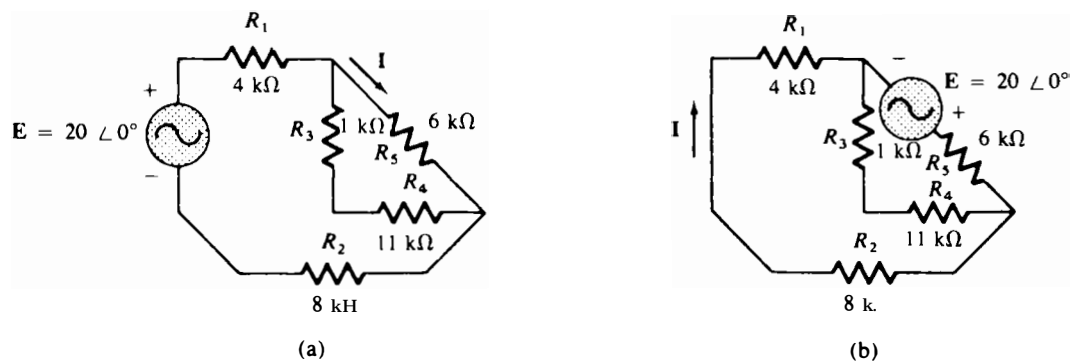


FIG. 18.96

33. À l'aide du théorème de Millman, calculez le courant qui traverse la réactance capacitive de  $4\text{ k}\Omega$  dans le réseau illustré à la figure 18.97.

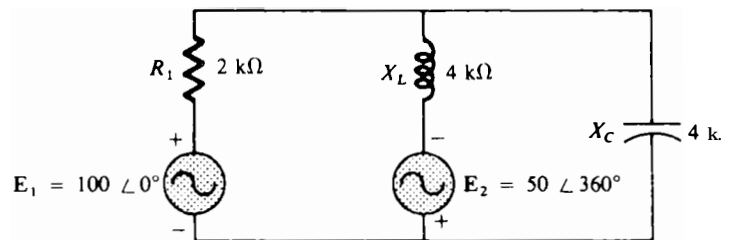


FIG. 18.97

GLOSSAIRE

**Théorème de Millman** Méthode faisant appel à la transposition des sources et permettant de déterminer les grandeurs inconnues d'un réseau à plusieurs boucles.

**Théorème de Norton** Théorème permettant de remplacer tout réseau linéaire bilatéral en courant alternatif par un générateur constitué d'une source de courant et d'une impédance parallèle. Le réseau résultant peut servir à déterminer un courant ou une tension du réseau primitif ou, encore, à étudier les effets d'une partie du réseau sur une grandeur donnée.



**Théorème de réciprocité** Théorème énonçant que dans tout réseau à source unique, l'intensité du courant d'une quelconque branche produit par une seule source de tension appartenant à une autre branche est égale à l'intensité du courant qui passerait dans cette dernière branche, si la source était amenée dans la première branche.

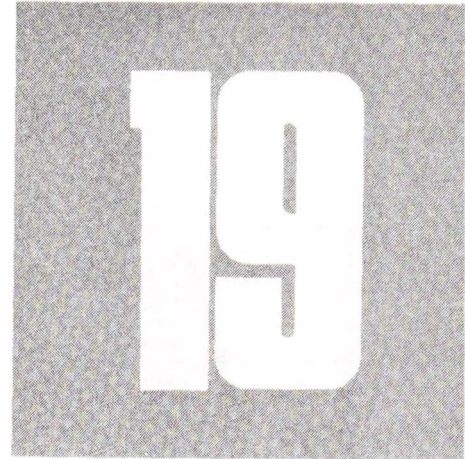
**Théorème de substitution** Théorème énonçant que, si la tension aux bornes d'une branche d'un réseau linéaire bilatéral en courant alternatif et le courant qui parcourt cette branche sont connus, cette branche peut être remplacée par toute combinaison d'éléments qui ne fait varier ni la tension ni le courant.

**Théorème de superposition** Méthode d'analyse des réseaux qui permet de considérer indépendamment les effets de chacune des sources. Le courant qui traverse un élément (ou la tension présente aux bornes de ce dernier) est la somme vectorielle des courants (ou des tensions) créés séparément par chaque source.

**Théorème de Thévenin** Théorème qui énonce que tout réseau alternatif linéaire à deux bornes peut être remplacé par un circuit équivalent constitué d'une source de tension et d'une impédance montées en série. Le réseau résultant peut servir à déterminer un courant ou une tension du réseau primitif ou, encore, à étudier les effets d'une partie du réseau sur une grandeur donnée.

**Théorème du transfert maximal de puissance** Théorème servant à déterminer quelle impédance doit posséder la charge pour recevoir la puissance maximale.

# PUISSANCE (EN COURANT ALTERNATIF)



## 19.1 INTRODUCTION

Au chapitre 13, il n'a été question que de la puissance moyenne fournie à un réseau alternatif. Nous étudierons maintenant la question de la puissance totale dans un réseau d'un point de vue légèrement différent en introduisant deux nouvelles notions, la *puissance apparente* et la *puissance réactive*.

Définissons, pour le réseau illustré à la figure 19.1:

$$v = V_m \sin(\omega t + \theta)$$

et:

$$i = I_m \sin \omega t$$

où  $\theta$  est le déphasage donnant l'avance de la tension  $v$  sur le courant  $i$ ; puisque:

$$Z = \frac{V \angle \theta}{I \angle 0^\circ} = \frac{V}{I} \angle \theta = Z \angle \theta$$

$\theta$  représente également le déphasage associé à l'impédance totale de la charge illustrée à la figure 19.1.

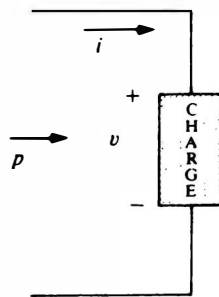
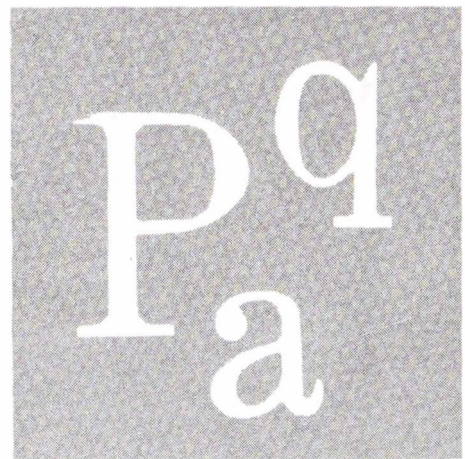


FIG. 19.1



La puissance fournie à cette charge à tout instant est donnée par la relation:

$$p = vi$$

Par substitution dans l'équation ci-dessus, nous avons:

$$p = V_m I_m \sin \omega t \sin(\omega t + \theta)$$

Certaines identités trigonométriques nous permettent maintenant d'écrire l'équation de la puissance totale de la façon suivante:

$$p = VI \cos \theta (1 - \cos 2\omega t) + VI \sin \theta (\sin 2\omega t)$$

(19.1)

dans laquelle  $V$  et  $I$  sont des valeurs efficaces.

Il semble bien, de prime abord, qu'on gagne peu sinon rien à écrire l'équation sous cette forme. Mais l'utilité de la forme de l'équation (19.1) deviendra manifeste dans les sections qui suivent. L'obtention de cette équation à partir de l'équation initiale est donnée comme problème en fin de chapitre.

Développons maintenant l'équation (19.1) et écrivons:

$$p = \underbrace{VI \cos \theta}_{\text{moyenne}} - \underbrace{VI \cos \theta}_{\text{de crête}} \underbrace{\cos 2\omega t}_{2x} + \underbrace{VI \sin \theta}_{\text{de crête}} \underbrace{\sin 2\omega t}_{2x}$$

Deux points évidents sont à souligner. D'abord, la puissance moyenne apparaît toujours comme un terme isolé qui est indépendant du temps. Ensuite, les deux termes qui suivent dans l'équation sont fonction du double de la fréquence de la tension appliquée ou du courant, et leurs valeurs de crête sont de formes très semblables.

Dans les sections qui suivent, nous étudierons l'équation ci-dessus pour les trois éléments fondamentaux ( $R$ ,  $L$  et  $C$ ), dans cet ordre et séparément pour commencer.

## 19.2 CIRCUIT RÉSIDTIF

Dans un circuit purement résistif (comme celui illustré à la figure 19.2), la tension  $v$  et le courant  $i$  sont en phase et  $\theta = 0^\circ$ . Par substitution de  $\theta = 0^\circ$  dans l'équation (19.1), nous obtenons:

$$p_R = VI \cos(0^\circ)(1 - \cos 2\omega t) + VI \sin(0^\circ) \sin 2\omega t$$

$$p_R = VI(1 - \cos 2\omega t) + 0$$

$$p_R = VI - VI \cos 2\omega t$$

(19.2)

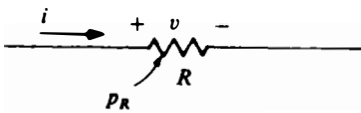


FIG. 19.2

dans laquelle  $VI$  est la puissance moyenne ou la puissance en courant continu et  $-VI \cos 2\omega t$  est une onde cosinusoidale négative dont la fréquence est le double de celle des grandeurs d'entrée ( $v$  et  $i$ ) et dont la valeur de crête est  $VI$ .

Le tracé de la forme d'onde de  $p_R$  (figure 19.3) révèle que:

$T_1$  = la période des grandeurs d'entrée;

$T_2$  = la période de la courbe de puissance  $p_R$ .

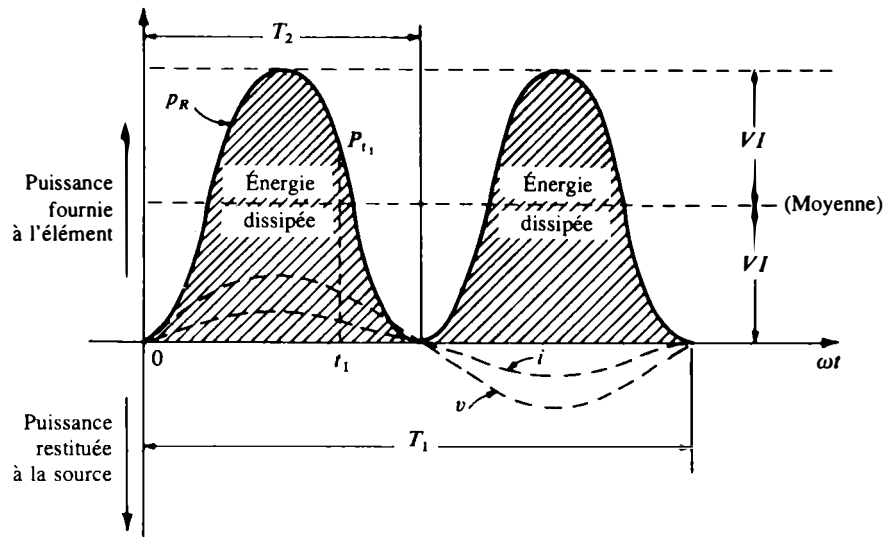


FIG. 19.3

Notons à la figure 19.3 que la courbe de puissance décrit deux cycles autour de sa valeur moyenne  $VI$  chaque fois que la tension  $v$  ou le courant  $i$  décrivent un cycle ( $T_1 = 2T_2$  ou  $f_2 = 2f_1$ ). À noter également le fait que, puisque la valeur de crête et la valeur moyenne de la courbe de puissance sont les mêmes, la courbe est toujours au-dessus de l'axe horizontal. Cette caractéristique indique que toute la puissance fournie à une résistance est utilisée. La puissance restituée à la source est représentée par la partie de la courbe située sous l'axe horizontal; dans le cas présent, elle est nulle. La puissance dissipée à tout instant  $t_1$  par la résistance peut se déterminer par substitution de  $t_1$  dans l'équation (19.2). La puissance moyenne, qu'on calcule de l'équation (19.2) ou qu'on obtient de la figure 19.3, est  $VI$ . Bref, on a:

$$P = VI = \frac{V_m I_m}{2} = I^2 R = \frac{V^2}{R} \quad (W) \quad (19.3)$$

ainsi qu'il a été obtenu au chapitre 13.

L'énergie dissipée ( $W_R$ ) par la résistance sur un cycle complet de la courbe de puissance (figure 19.3) peut se calculer au moyen de l'intégrale:

$$W_R = \int_0^{T_2} p_R dt \quad (\text{joules, J})$$

= l'aire sous la courbe de puissance entre 0 et  $T_2$  (période de  $p_R$ )

(19.4)

L'aire sous la courbe = (valeur moyenne)  $\times$  (longueur de la courbe); elle est donc:

$$W_R = (VI) \times (T_2)$$



ou:

$$W_R = VIT_2 \quad (\text{J}) \quad (19.5)$$

ou, puisque  $T_2 = 1/f_2$  ( $f_2$  étant la fréquence de la courbe  $p_R$ ):

$$W_R = \frac{VI}{f_2} \quad (\text{J}) \quad (19.6)$$

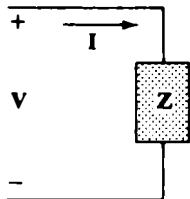


FIG. 19.4

### 19.3 PUISSANCE APPARENTE

De notre analyse des réseaux continus (et du circuit résistif ci-dessus), il semble *apparent* que la puissance fournie à la charge illustrée à la figure 19.4 est tout simplement égale au produit de la tension appliquée et du courant passant dans la charge, peu importe la nature de cette charge. Mathématiquement, cela s'énonce  $P = VI$ . Toutefois, nous avons trouvé au chapitre 13 que le facteur de puissance ( $\cos \theta$ ) de la charge a un effet marqué sur la puissance utilisée, et nous avons constaté en particulier que cet effet est moins marqué dans le cas de charges réactives. Bien qu'il ne soit pas toujours égal à la puissance fournie, le produit de la tension et du courant est une caractéristique nominale de puissance d'une importance particulière dans la description et l'analyse des réseaux sinusoïdaux et sert à indiquer la puissance nominale maximale d'un certain nombre de composants et de systèmes électriques. Ce produit est appelé *puissance apparente* et il est représenté par le symbole  $S$ . Son unité de mesure est le voltampère (VA). On a donc:

$$S = VI \quad (\text{VA}) \quad (19.7)$$

ou, puisque:

$$V = IZ \quad \text{et} \quad I = \frac{V}{Z}$$

de sorte que:

$$S = I^2 Z \quad (\text{VA}) \quad (19.8)$$

et:

$$S = \frac{V^2}{Z} \quad (\text{VA}) \quad (19.9)$$

La puissance moyenne fournie à un système est définie par l'équation:

$$P = VI \cos \theta$$

mais, comme:

$$S = VI$$

on a:

$$P = S \cos \theta \quad (\text{W}) \quad (19.10)$$

Le facteur de puissance  $F_p$  d'un système est donc:

$$F_p = \cos \theta = \frac{P}{S} \tag{19.11}$$

Traduite en clair, cette équation indique que le facteur de puissance d'un circuit est le rapport de la puissance moyenne à la puissance apparente. Dans un circuit purement résistif, on a:

$$P = VI = S \quad \text{et} \quad F_p = \cos \theta = \frac{P}{S} = 1$$

En règle générale, la puissance nominale du matériel électrique est donnée en voltampères (VA) ou en kilovoltampères (kVA) et non en watts. Connaissant la puissance nominale en voltampères et la tension nominale d'un dispositif, nous pouvons déterminer la caractéristique de courant *maximal*. Ainsi, un dispositif dont les caractéristiques nominales sont 10 kVA sous 200 V a une caractéristique de courant maximal  $I = 10\,000/200 = 50$  A lorsqu'il fonctionne dans les conditions nominales. La puissance nominale en voltampères d'un matériel est égale à la puissance nominale en watts si et seulement si  $F_p$  est égal à l'unité. Elle est donc une indication de la puissance maximale que peut dissiper le dispositif. Soulignons que le facteur de puissance est égal à l'unité lorsque l'impédance totale  $Z \angle \theta$  d'un système est telle que  $\theta = 0^\circ$ .

Nous pouvons par ailleurs déterminer avec exactitude l'appel de courant d'un dispositif utilisé dans des conditions nominales, à condition d'en connaître la puissance nominale en watts et le facteur de puissance, plutôt que la puissance nominale en voltampères. Mais le facteur de puissance n'est parfois pas donné, ou il peut varier avec la charge.

L'examen du montage illustré à la figure 19.5 rend évidente la raison de l'emploi d'une puissance nominale en kVA plutôt qu'en kW. Dans ce montage, la charge a une puissance apparente nominale de 10 kVA et une caractéristique de courant maximal de 50 A sous la tension appliquée de 200 V. Comme nous pouvons l'observer à la figure, l'appel de courant est supérieur au courant maximal caractéristique et peut donc endommager la charge, bien que l'indication du wattmètre soit très petite puisque la charge est très réactive. En d'autres termes, l'indication du wattmètre n'est pas représentative de l'appel de courant mais simplement de la puissance en watts utilisée par la charge. En principe, si la charge était purement réactive, l'indication du wattmètre serait nulle bien que le dispositif serait en train de griller en raison de l'appel de courant élevé.

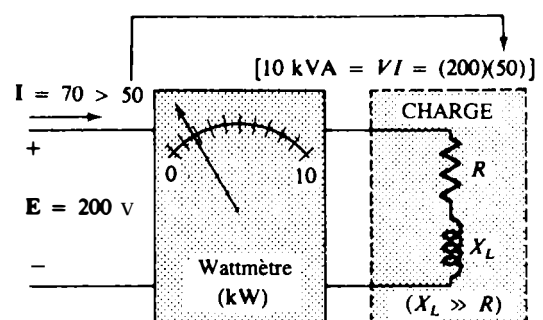


FIG. 19.5

## 19.4 CIRCUIT INDUCTIF ET PUISSANCE RÉACTIVE

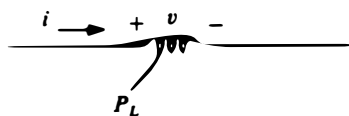


FIG. 19.6

Dans un circuit purement inductif (comme celui qu'illustre la figure 19.6), la tension  $v$  est en avance de  $90^\circ$  sur le courant  $i$ , c'est-à-dire que  $\theta = 90^\circ$ . La substitution de cette valeur dans l'équation (19.1) donne:

$$p_L = VI \cos(90^\circ)(1 - \cos 2\omega t) + VI \sin(90^\circ)(\sin 2\omega t) \\ = 0 + VI \sin 2\omega t$$

ou:

$$p_L = VI \sin 2\omega t \quad (19.12)$$

dans laquelle  $VI \sin 2\omega t$  est une onde sinusoïdale dont la fréquence est le double de celle des grandeurs d'entrée ( $v$  et  $i$ ) et dont la valeur de crête est  $VI$ . Notons l'absence d'un terme indépendant du temps (puissance moyenne) dans l'équation ci-dessus.

La figure 19.7 illustre le tracé de la forme d'onde de  $p_L$ . Sur ce tracé:

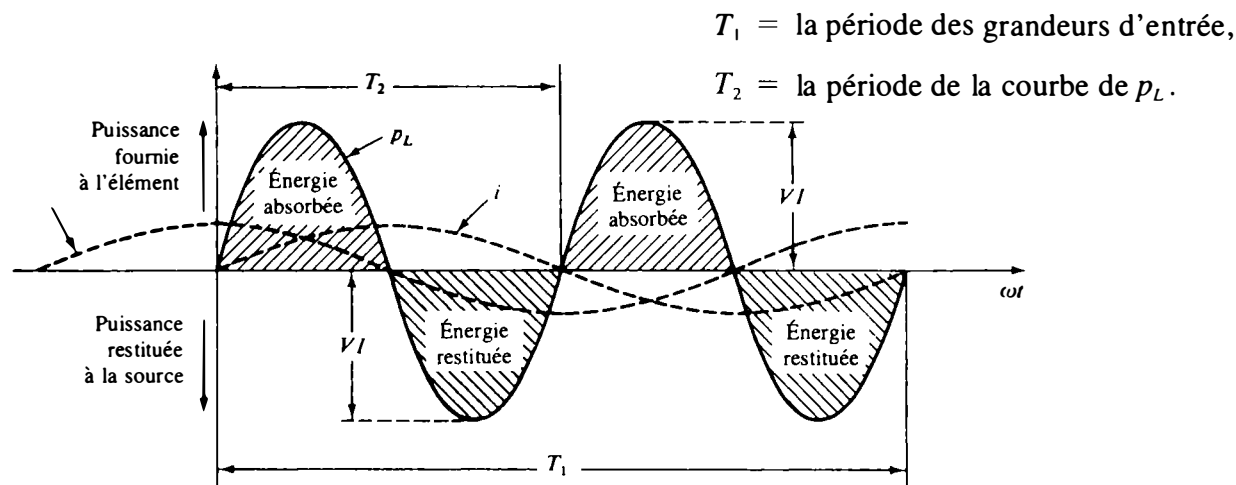


FIG. 19.7

À noter que sur un cycle complet de  $p_L$ , l'aire sous la courbe au-dessus de l'axe horizontal est exactement égale à l'aire sous la courbe au-dessous de l'axe horizontal. Cette caractéristique indique que sur un cycle complet de  $p_L$  la puissance fournie par la source à la bobine est exactement égale à celle que lui restitue cette dernière. La puissance nette fournie à la bobine pure est par conséquent nulle sur un cycle complet, et aucune perte d'énergie n'a lieu. La puissance absorbée ou restituée par la bobine à l'instant  $t_1$  se détermine simplement par la substitution de  $t_1$  dans l'équation (19.12). La valeur de crête de la courbe  $VI$  est définie comme étant la *puissance réactive* associée à une bobine pure.

En règle générale, la puissance réactive associée à tout circuit est définie comme étant  $VI \sin \theta$ , expression qui apparaît dans le deuxième terme de l'équation (19.1). Notons que c'est la valeur de crête de ce terme qui fait qu'il n'y a pas de transfert

net d'énergie. Le symbole de la puissance réactive est  $Q$  et son unité de mesure est le var (voltampère réactif). Ce symbole a trait à la relation de quadrature ( $90^\circ$ ) entre les diverses puissances que nous étudierons en détail dans une section ultérieure.

Par conséquent:

$$Q = VI \sin \theta \quad (\text{vars}) \quad (19.13)$$

où  $\theta$  est le déphasage entre  $V$  et  $I$ .

Dans le cas de la bobine:

$$Q_L = VI \quad (\text{vars}) \quad (19.14)$$

où, puisque  $V = IX_L$  ou  $I = V/X_L$ :

$$Q_L = I^2 X_L \quad (\text{vars}) \quad (19.15)$$

ou encore:

$$Q_L = \frac{V^2}{X_L} \quad (\text{vars}) \quad (19.16)$$

La puissance apparente associée à une bobine est donc  $S = VI$  et la puissance moyenne est  $P = 0$ , comme l'illustre la figure 19.7. Le facteur de puissance est donc:

$$F_p = \cos \theta = \frac{P}{S} = \frac{0}{VI} = 0$$

Si la puissance moyenne est nulle et si l'énergie fournie au circuit est restituée à la source en un cycle, pourquoi alors la puissance réactive prend-elle une telle importance? La raison n'en est pas évidente mais un examen de la courbe de la figure 19.7 permet de la découvrir. En effet, lorsque la courbe de puissance est au-dessus de l'horizontale (c'est-à-dire positive), de l'énergie doit être fournie à la bobine, bien qu'elle sera restituée à la source pendant les alternances négatives de la courbe. Cette consommation de puissance pendant les alternances positives suppose que de l'énergie est fournie par la source. Par conséquent, l'effet d'éléments réactifs, comme une bobine, peut contribuer à augmenter la quantité de puissance fournie par la source, même si la puissance réactive n'est pas utilisée mais simplement « empruntée ». La demande accrue de puissance pendant les alternances positives se traduit par un coût que doit absorber le consommateur industriel. De fait, la plupart des grands consommateurs d'électricité paient pour la puissance apparente qui leur est fournie plutôt que la puissance utilisée en watts puisque les voltampères sont une mesure de puissance réactive (voir la section 19.6). En d'autres termes, plus le facteur de puissance d'un matériel industriel s'approche de 1, plus efficace est son fonctionnement puisqu'il « emprunte » une moins grande quantité de puissance.

L'énergie emmagasinée dans la bobine pendant l'alternance positive du cycle (figure 19.7) est égale à l'énergie restituée à la source pendant l'alternance négative; cette énergie peut se déterminer à l'aide de l'intégrale:

$$W_L = \int_{T_2/2}^{T_2} p_L dt \quad (\text{J})$$

= l'aire sous la courbe de puissance entre  $T_2/2$  et  $T_2$

Nous avons appris au chapitre 13 que la valeur moyenne de l'alternance positive d'une sinusoïde est  $2 \times$  (valeur de crête/ $\pi$ ), et que l'aire délimitée par une courbe quelconque est (valeur moyenne)  $\times$  (longueur de la courbe). On a donc:

$$W_L = \left( \frac{2VI}{\pi} \right) \times \left( \frac{T_2}{2} \right)$$

ou:

$$W_L = \frac{VIT_2}{\pi} \quad (\text{J}) \quad (19.17)$$

ou, puisque  $T_2 = 1/f_2$ ,  $f_2$  étant la fréquence de la courbe  $p_L$ :

$$W_L = \frac{VI}{\pi f_2} \quad (\text{J}) \quad (19.18)$$

Puisque la fréquence  $f_2$  de la courbe de puissance est le double de celle de la grandeur d'entrée, on peut faire apparaître la fréquence  $f_1$  de la tension d'entrée ou du courant d'entrée dans l'équation ci-dessus, qui devient:

$$W_L = \frac{VI}{\pi(2f_1)}$$

ou:

$$W_L = \frac{VI}{\omega_1} \quad (\text{J}) \quad (19.19)$$

Mais:

$$V = IX_L = I\omega_1 L$$

de sorte que:

$$W_L = \frac{(I\omega_1 L)I}{\omega_1}$$

ou encore:

$$W_L = LI^2 \quad (\text{J}) \quad (19.20)$$

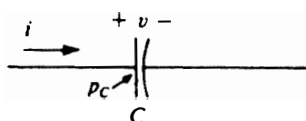


FIG. 19.8

## 19.5 CIRCUIT CAPACITIF

Dans un circuit purement capacitif, comme celui illustré à la figure 19.8, le courant  $i$  est en avance de  $90^\circ$  sur la tension  $v$ . En portant  $\theta = -90^\circ$  dans l'équation (19.1), nous obtenons:

$$p_C = VI \cos(-90^\circ)(1 - \cos 2\omega t) + VI \sin(-90^\circ)(\sin 2\omega t)$$

$$p_C = 0 - VI \sin 2\omega t$$

ou encore:

$$p_C = -VI \sin 2\omega t \quad (19.21)$$

dans laquelle  $-VI \sin 2\omega t$  est une onde sinusoïdale négative dont la fréquence est le double de celle des grandeurs d'entrée ( $v$  et  $i$ ) et dont la valeur de crête est  $VI$ . Notons aussi dans cette équation l'absence d'un terme indépendant du temps et représentant une puissance moyenne.

La figure 19.9 représente le tracé de la forme d'onde de  $p_C$ ; sur ce tracé:

$T_1$  = la période de l'une ou l'autre des grandeurs d'entrée;

$T_2$  = la période de la courbe de  $p_C$ .

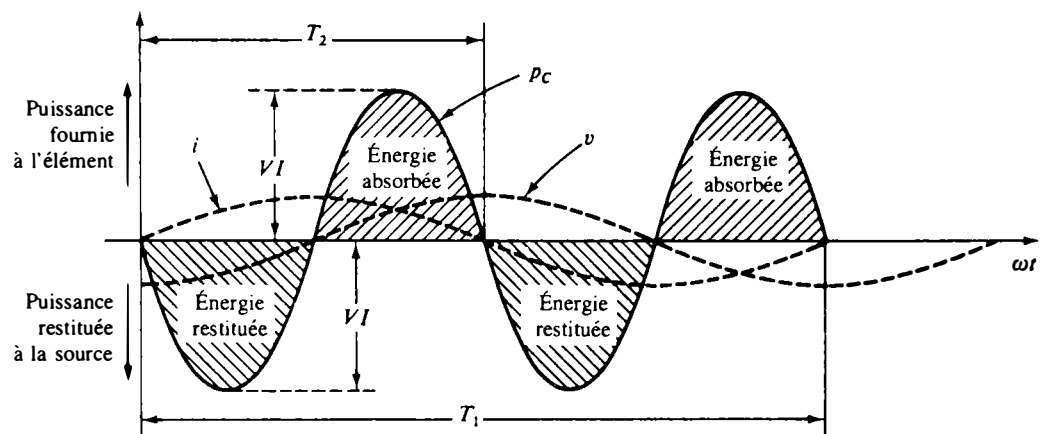


FIG. 19.9

On constatera d'autre part qu'il se produit la même chose pour la courbe de  $p_C$  que pour la courbe  $p_L$ . La puissance fournie par la source au condensateur est exactement égale à la puissance restituée à la source par le condensateur, sur un cycle entier. La quantité nette de puissance fournie à un condensateur pur est donc nulle sur un cycle entier, et il ne se produit aucune perte d'énergie. La puissance absorbée ou restituée par le condensateur à un instant  $t_1$  se détermine par la substitution de  $t_1$  dans l'équation (19.21).

La puissance réactive associée au condensateur est égale à la valeur de crête de la courbe de  $p_C$ ; on a donc:

$$Q_C = VI \quad (\text{vars}) \quad (19.22)$$

mais puisque  $V = IX_C$  et que  $I = V/X_C$ , la puissance réactive fournie au condensateur peut aussi s'écrire ainsi:

$$Q_C = I^2 X_C \quad (\text{vars}) \quad (19.23)$$

et:

$$Q_C = \frac{V^2}{X_C} \quad (\text{vars}) \quad (19.24)$$

La puissance apparente associée au condensateur est donc:

$$S = VI \quad (\text{VA}) \quad (19.25)$$

et la puissance moyenne est  $P = 0$ , comme le laisse deviner l'équation (19.21) ou la figure 19.9. Le facteur de puissance est par conséquent:

$$F_p = \cos \theta = \frac{P}{S} = \frac{0}{VI} = 0$$

L'énergie emmagasinée dans le condensateur durant l'alternance positive du cycle (figure 19.9) est égale à l'énergie restituée pendant l'alternance négative; elle peut se déterminer au moyen de l'intégrale:

$$W_C = \int_0^{T_2/2} p_C dt \quad (\text{J})$$

= l'aire sous la courbe de puissance entre 0 et  $T_2/2$

En procédant comme pour la bobine, nous pouvons démontrer que:

$$W_C = \frac{VI}{\pi} T_2 \quad (\text{J}) \quad (19.26)$$

ou puisque  $T_2 = 1/f_2$ ,  $f_2$  étant la fréquence de la courbe de  $p_C$ :

$$W_C = \frac{VI}{\pi f_2} \quad (\text{J}) \quad (19.27)$$

En termes de la fréquence  $f_1$  des grandeurs d'entrée  $v$  et  $i$ , l'équation ci-dessus devient:

$$W_C = \frac{VI}{\omega_1} \quad (\text{J}) \quad (19.28)$$

et:

$$W_C = CV^2 \quad (\text{J}) \quad (19.29)$$

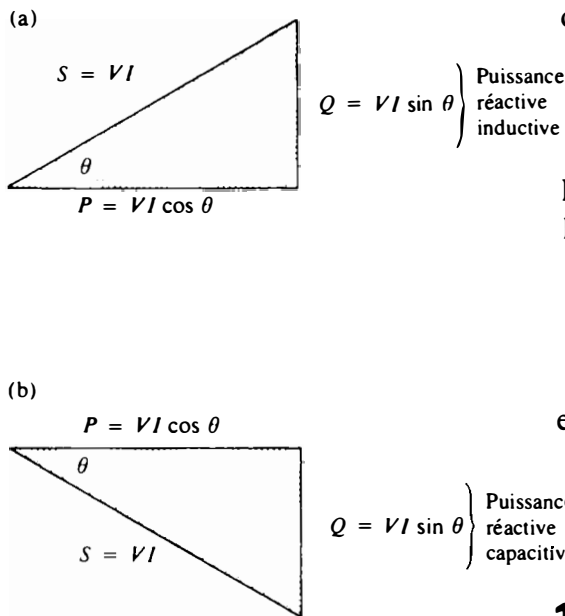


FIG. 19.10

### 19.6 LE TRIANGLE DES PUISSANCES

Les trois grandeurs (puissance moyenne, puissance apparente et puissance réactive) peuvent être représentées graphiquement sur un triangle des puissances, comme l'illustre la figure 19.10a pour un circuit  $R-L$ . Le triangle des puissances pour un circuit  $R-C$  est illustré à la figure 19.10b.

Dans un réseau contenant des éléments capacitifs et inductifs, la composante réactive du triangle des puissances est

déterminée par la *différence* entre les puissances réactives fournies à chacun des éléments. Si  $Q_L > Q_C$ , le triangle des puissances résultant sera semblable à celui illustré à la figure 19.10a. Si par contre  $Q_C > Q_L$ , le triangle résultant est semblable à celui illustré à la figure 19.10b.

Il est possible de montrer à partir des équations (19.12) et (19.21) que la puissance réactive totale est bien la différence entre la puissance réactive fournie aux éléments inductifs et la puissance réactive fournie aux éléments capacitifs. Nous avons tracé à la figure 19.11, à partir de ces équations, la courbe

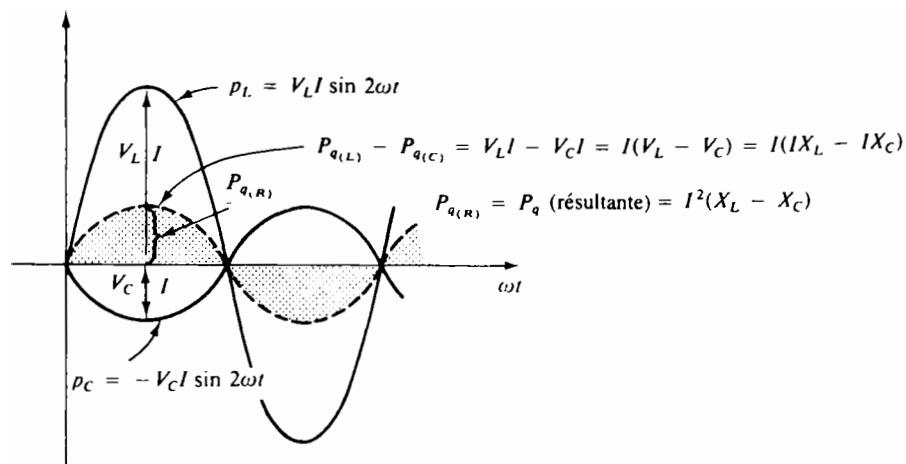


FIG. 19.11

de la puissance réactive fournie à chacun des éléments réactifs d'un circuit  $L$ - $C$  série. Ces éléments réactifs ont été choisis de telle sorte que  $X_L > X_C$ . À noter que les courbes des puissances sont déphasées exactement de  $180^\circ$ . La courbe de la puissance réactive résultante est par conséquent la résultante algébrique des deux courbes, à tout instant. Puisque la puissance réactive est définie comme étant la valeur de crête, la composante réactive du triangle des puissances est identifiée par  $I^2(X_L - X_C)$  à la figure.

Une vérification supplémentaire peut se faire à partir du diagramme d'impédance d'un circuit  $R$ - $L$ - $C$  série (figure 19.12). Par la multiplication de chacun des vecteurs par le carré du courant ( $I^2$ ), nous obtenons les résultats illustrés à la figure 19.13, qui représente le triangle des puissances d'un circuit surtout inductif.

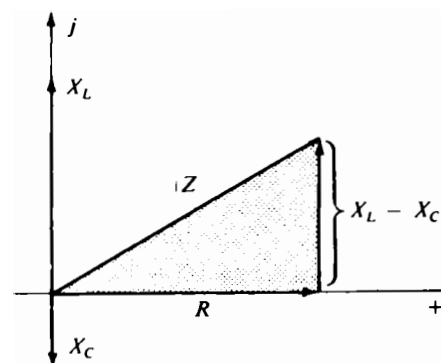


FIG. 19.12

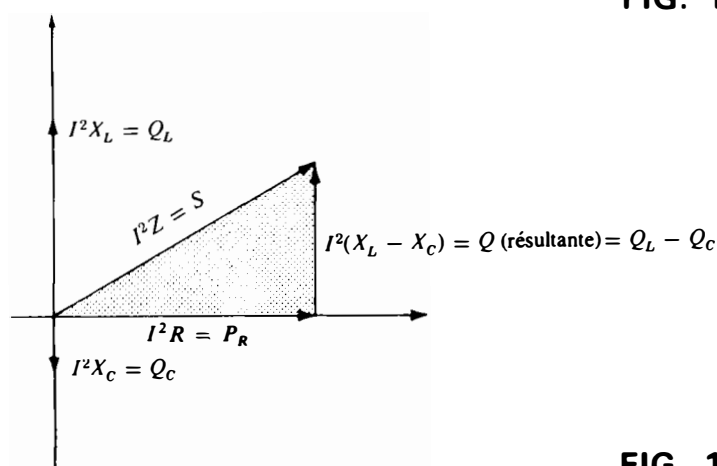


FIG. 19.13



La puissance réactive et la puissance moyenne étant toujours à angle droit l'une par rapport à l'autre, les trois puissances sont liées par le théorème de Pythagore, c'est-à-dire:

$$S^2 = P^2 + Q^2 \quad (19.30)$$

Il est donc possible de calculer une puissance inconnue si les deux autres sont connues.

## 19.7 LA PUISSANCE TOTALE P, Q ET S

Le nombre total de watts, de vars et de voltampères ainsi que le facteur de puissance d'un réseau quelconque peuvent se calculer à l'aide de la marche à suivre suivante:

1. Calculer le nombre total de watts et de vars pour chacune des branches du réseau.
2. Le nombre total de watts du réseau est égal à la somme de la puissance moyenne fournie à chacune des branches.
3. La puissance réactive totale est égale à la différence entre la puissance réactive fournie aux charges inductives et la puissance réactive fournie aux charges capacitives.
4. La puissance apparente totale est  $\sqrt{P_T^2 + Q_T^2}$ .
5. Le facteur de puissance du réseau est  $P_T/S_T$ .

Deux points importants sont à souligner dans la marche à suivre ci-dessus. D'abord, la puissance apparente totale doit être déterminée à partir de la puissance moyenne totale et de la puissance réactive totale; elle ne peut pas être déterminée à partir des puissances apparentes de chacune des branches. Ensuite, ce qui est le plus important, *il n'est pas nécessaire* de tenir compte de la disposition en série et en parallèle des branches. En d'autres termes, la puissance réelle totale, la puissance réactive et la puissance apparente sont indépendantes du fait que les charges soient en série, en parallèle ou en série-parallèle. Les exemples qui suivent feront ressortir la facilité relative avec laquelle il est possible de calculer les grandeurs d'intérêt.

**EXEMPLE 19.1** Calculer le nombre total de watts, de vars et de voltampères ainsi que le facteur de puissance  $F_p$  du réseau illustré à la figure 19.14. Tracer le triangle des puissances et déterminer le courant par vecteurs de phase.

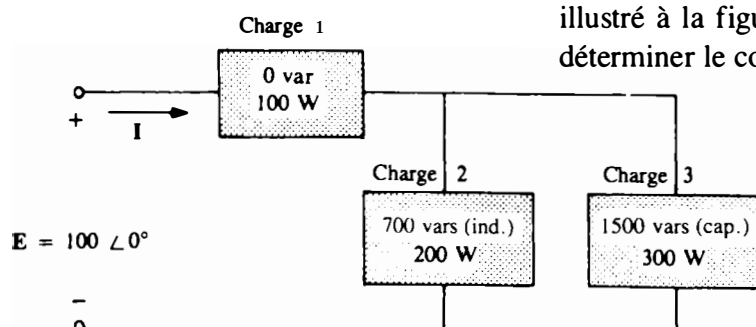


FIG. 19.14

Solution: Aidons-nous d'un tableau pour résoudre le problème.

Charge	W	vars	VA
1	100	0	100
2	200	700 (ind.)	$\sqrt{200^2 + 700^2} = 728,0$
3	300	1500 (cap.)	$\sqrt{300^2 + 1500^2} = 1529,71$
	$P_T = 600$ Nombre total de watts utilisés	$Q_T = 800$ (cap.) Nombre résultant de vars du circuit	$P_{a(T)} = \sqrt{600^2 + 800^2} = 1000$ À noter que $S_T \neq$ la somme de chacune des branches: $1000 \neq 100 + 728 + 1529,71$

$$F_p = \frac{P_T}{S_T} = \frac{600}{1000} = 0,6 \text{ (capacitif)}$$

Le triangle des puissances est illustré à la figure 19.15.

Puisque  $S_T = VI = 1000$ ,  $I = 1000/100 = 10$  A, et puisque l'angle  $\theta$  de l'expression  $\cos \theta = F_p$  est l'angle entre la tension d'entrée et le courant, on a:

$$I = 10 \angle +53,13^\circ$$

Le signe plus est associé à l'angle de phase puisque ce circuit est surtout capacitif.

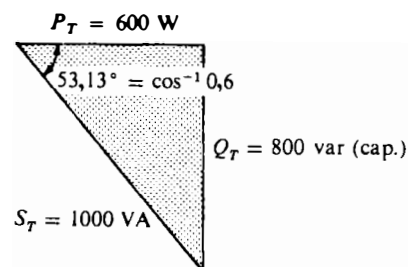


FIG. 19.15

EXEMPLE 19.2

- Calculer le nombre total de watts, de vars et de voltampères ainsi que le facteur de puissance  $F_p$  du réseau illustré à la figure 19.16.
- Tracer le triangle des puissances.
- Calculer l'énergie dissipée par la résistance sur un cycle entier de la tension d'entrée, si la fréquence des grandeurs d'entrée est de 60 Hz.
- Calculer l'énergie emmagasinée dans le condensateur ou la bobine et restituée par ceux-ci sur la moitié du cycle de puissance de chacun, si la fréquence des grandeurs d'entrée est de 60 Hz.

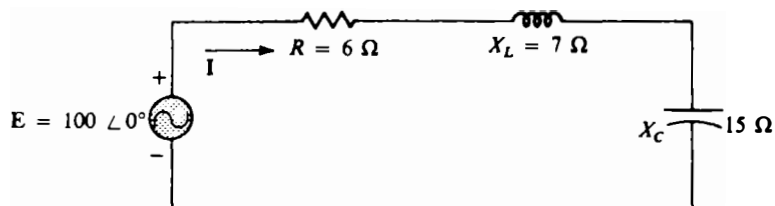


FIG. 19.16

Solution:

$$a. I = \frac{E}{Z_T} = \frac{100 \angle 0^\circ}{6 + j7 - j15} = \frac{100 \angle 0^\circ}{10 \angle -53,13^\circ} = 10 \angle 53,13^\circ$$

$$V_R = IR = (10 \angle 53,13^\circ)(6 \angle 0^\circ) = 60 \angle 53,13^\circ$$

$$V_L = IX_L = (10 \angle 53,13^\circ)(7 \angle 90^\circ) = 70 \angle 143,13^\circ$$

$$V_C = IX_C = (10 \angle 53,13^\circ)(15 \angle -90^\circ) = 150 \angle -36,87^\circ$$

$$\begin{aligned} P_T &= EI \cos \theta = (100)(10) \cos 53,13^\circ = \mathbf{600 \text{ W}} \\ &= I^2 R = (10^2)(6) = \mathbf{600 \text{ W}} \\ &= \frac{V_R^2}{R} = \frac{60^2}{6} = \mathbf{600 \text{ W}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_T &= EI = (100)(10) = \mathbf{1000 \text{ VA}} \\ &= I^2 Z_T = (10^2)(10) = \mathbf{1000 \text{ VA}} \\ &= \frac{E^2}{Z_T} = \frac{100^2}{10} = \mathbf{1000 \text{ VA}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_T &= EI \sin \theta = (100)(10) \sin 53,13^\circ = \mathbf{800 \text{ vars}} \\ &= Q_C - Q_L \\ &= I^2(X_C - X_L) = (100)(15 - 7) = \mathbf{800 \text{ vars}} \\ &= \frac{V_C^2}{X_C} - \frac{V_L^2}{X_L} = \frac{150^2}{15} - \frac{70^2}{7} = 1500 - 700 \\ &= \mathbf{800 \text{ vars}} \end{aligned}$$

$$F_p = \frac{P_T}{S_T} = \frac{600}{1000} = \mathbf{0,6 \text{ (capacitif)}}$$

b. Le triangle des puissances est illustré à la figure 19.17.

$$c. W_R = 2 \left( \frac{V_R I}{f_2} \right) = 2 \left( \frac{V_R I}{2f_1} \right) = \frac{V_R I}{f_1} = \frac{(60)(10)}{60} = \mathbf{10 \text{ J}}$$

$$d. W_L = \frac{V_L I}{2\pi f_1} = \frac{(70)(10)}{(6,28)(60)} = \frac{700}{377} = \mathbf{1,86 \text{ J}}$$

$$W_C = \frac{V_C I}{2\pi f_1} = \frac{(150)(10)}{377} = \frac{1500}{377} = \mathbf{3,98 \text{ J}}$$

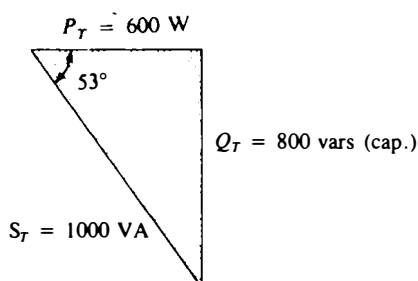


FIG. 19.17

**EXEMPLE 19.3** Voir le réseau illustré à la figure 19.18.

- Calculer la puissance moyenne, la puissance apparente, la puissance réactive et le facteur de puissance  $F_p$  de chacune des branches.
- Calculer le nombre total de watts, de vars et de voltampères ainsi que le facteur de puissance  $F_p$  du circuit. Tracer le triangle des puissances.
- Calculer le courant  $I$ .

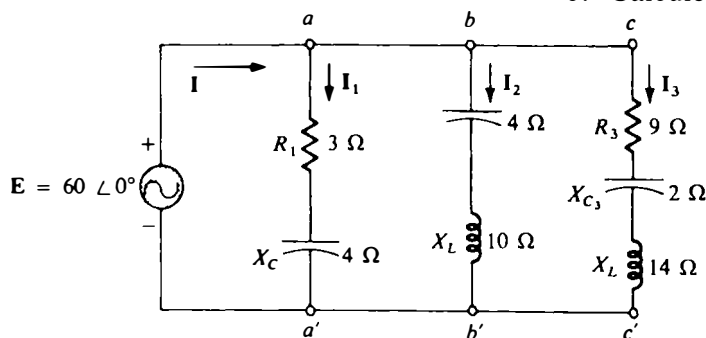


FIG. 19.18

Solution:

a. Dans la branche a-a', on a:

$$I_1 = \frac{E}{Z_{a-a'}} = \frac{60 \angle 0^\circ}{3 - j4} = \frac{60 \angle 0^\circ}{5 \angle -53,13^\circ} = 12 \angle +53,13^\circ$$

$$P = I_1^2 R = (12^2)(3) = (144)(3) = 432 \text{ W}$$

$$S = EI_1 = (60)(12) = 720 \text{ VA}$$

$$Q = I_1^2 X_C = (12^2)(4) = 576 \text{ vars}$$

$$F_p = \frac{P}{P_a} = \frac{432}{720} = 0,6 \text{ (capacitif)}$$

Dans la branche b-b', on a:

$$I_2 = \frac{E}{Z_{b-b'}} = \frac{60 \angle 0^\circ}{j10 - j4} = \frac{60 \angle 0^\circ}{6 \angle 90^\circ} = 10 \angle -90^\circ$$

$$P = I_2^2 R = I_2^2(0) = 0 \text{ W}$$

$$S = EI_2 = (60)(10) = 600 \text{ VA}$$

$$Q_T = I_2^2(X_L - X_C) = (10^2)(6) = 600 \text{ vars}$$

$$F_p = \frac{P}{S} = \frac{0}{600} = 0$$

Dans la branche c-c', on a:

$$I_3 = \frac{E}{Z_{c-c'}} = \frac{60 \angle 0^\circ}{9 - j2 + j14} = \frac{60 \angle 0^\circ}{9 + j12} = \frac{60 \angle 0^\circ}{15 \angle 53,13^\circ} = 4 \angle -53,13^\circ$$

$$P = I_3^2 R = (4^2)(9) = 144 \text{ W}$$

$$S = EI_3 = (60)(4) = 240 \text{ VA}$$

$$Q = I_3^2(X_L - X_C) = (4^2)(12) = 192 \text{ vars}$$

$$F_p = \cos \theta = \frac{P}{P_a} = \frac{144}{240} = 0,6 \text{ (inductif)}$$

b. Le réseau en entier peut maintenant être représenté comme à la figure 19.19. À l'aide d'un tableau, on obtient:

$$S_T = \sqrt{(576)^2 + (216)^2}$$

$$S_T = 615 \text{ VA}$$

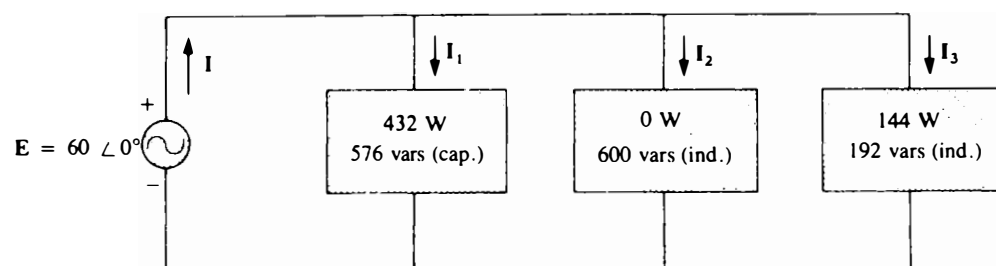


FIG. 19.19

Branche	W	vars
a-a'	432	576 (cap.)
b-b'	0	600 (ind.)
c-c'	144	192 (ind.)
	$P_T = 576 \text{ W}$	$Q_T = 216 \text{ (ind.)}$

$$F_{p(T)} = \cos \theta = \frac{P_T}{P_{a(T)}} = \frac{576}{615,17} = 0,9363 \text{ (inductif)}$$

$$\theta = \cos^{-1} 0,9363 = 20,56^\circ$$

Le triangle des puissances est illustré à la figure 19.20.

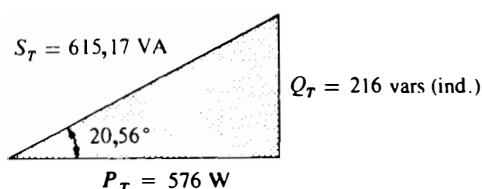


FIG. 19.20

c.  $S_T = EI = 615,17 \text{ VA}$

Par conséquent:

$$I = \frac{615}{60} = 10,25 \text{ A}$$

Le circuit est donc inductif et le courant **I** est en retard de  $20^\circ$  sur la tension **E**. Par suite:

$$\mathbf{I} = 10,25 \angle -20,56^\circ$$

**EXEMPLE 19.4** Les caractéristiques nominales d'un dispositif électrique dont le facteur de puissance inductif est de 0,6 sont de 5 kVA sous 100 V. Quelle est l'impédance du dispositif en coordonnées rectangulaires?

*Solution:*

$$S_T = EI = 5000 \text{ VA}$$

Par conséquent:

$$I = \frac{5000}{100} = 50 \text{ A}$$

Pour  $F_p = 0,6$ , on a:

$$\theta = \cos^{-1} 0,6 = 53,13^\circ$$

Puisque le facteur de puissance est inductif, le circuit est surtout inductif et le courant **I** est en retard sur la tension **E**. Comme la tension  $\mathbf{E} = 100 \angle 0^\circ$ , on a:

$$\mathbf{I} = 50 \angle -53,13^\circ$$

de sorte que:

$$\mathbf{Z}_T = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}} = \frac{100 \angle 0^\circ}{50 \angle -53,13^\circ} = 2 \angle 53,13^\circ = 1,2 + j1,6$$

ce qui est l'impédance totale du circuit illustré à la figure 19.21.

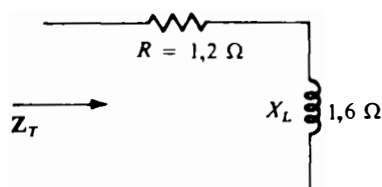


FIG. 19.21

## 19.8 RÉSISTANCE EFFICACE

La résistance d'un conducteur déterminée par la relation  $R = \rho(l/A)$  est souvent appelée *résistance en courant continu* ou, encore, *résistance ohmique*. Il s'agit d'une grandeur constante qui ne dépend que de la nature du conducteur et de ses dimensions. Dans les circuits alimentés en courant alternatif, la résistance réelle du conducteur (appelée *résistance efficace*) diffère de la résistance ohmique en raison de la variation des courants et des tensions qui introduit des effets ne se produisant pas dans les circuits alimentés en courant continu.

Au nombre de ces effets, on compte les pertes par rayonnement, l'effet de Kelvin, les courants de Foucault et les pertes par hystérésis. Les deux premiers effets sont propres à tous les circuits; les deux derniers sont dus aux pertes supplémentaires causées par la présence de matériaux ferromagnétiques dans un champ magnétique variable.

La résistance efficace d'un circuit alternatif ne peut pas être déterminée par la relation  $V/I$ , puisque ce circuit est caractérisé par une impédance qui est à la fois résistive et réactive. Elle se détermine plutôt au moyen de la relation  $P = I^2 R$ , dans laquelle:

$$R_{\text{eff}} = \frac{P}{I^2} \quad (19.31)$$

Il faut donc un wattmètre et un ampèremètre pour mesurer la résistance efficace d'un circuit alternatif.

Examinons maintenant en détail ces diverses pertes. Les pertes par rayonnement correspondent à l'énergie perdue sous la forme d'ondes électromagnétiques pendant le transfert d'énergie entre les divers éléments du circuit. Cette perte d'énergie exige que la puissance d'entrée soit supérieure pour établir le même courant  $I$ ; cela se traduit par une augmentation de  $R$ , comme l'indique l'équation (19.31). À la fréquence de 60 Hz, les pertes par rayonnement sont négligeables. Par contre, aux hautes fréquences, ces pertes sont importantes et peuvent même être le principal facteur à considérer lors de la conception des dispositifs électromagnétiques tels que les antennes.

L'explication de l'effet de Kelvin nécessite le recours à des notions fondamentales déjà introduites. On se souvient (voir le chapitre 10) que tout conducteur porteur de courant est entouré d'un champ magnétique, comme l'illustre la figure 19.22. Puisque la quantité de charges passant dans un circuit alternatif varie dans le temps, le champ magnétique entourant ces charges en mouvement varie aussi. On se souvient aussi qu'une f.é.m. est induite aux extrémités de tout conducteur placé dans un champ magnétique variable. La grandeur de cette f.é.m. est déterminée par la loi de Faraday  $e = N(d\phi/dt)$ . Plus grande est la fréquence de la variation, plus grande est la f.é.m. induite.

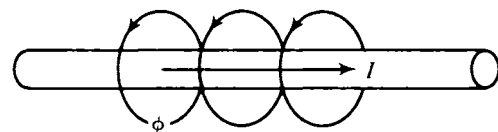


FIG. 19.22

Le conducteur porteur d'un courant alternatif est traversé par les lignes de force du champ magnétique variable auquel il donne naissance, ce qui induit dans le conducteur une f.é.m. qui s'oppose au passage du courant primitif. Cet effet d'opposition est plus marqué au centre du conducteur qu'à sa surface, puisque le centre est traversé par les lignes de force du champ interne, outre les lignes de force du champ externe. À mesure qu'augmente la fréquence du courant parcourant le conducteur, le flux embrassant ce dernier fluctue à vitesse de plus en plus grande. Toute augmentation de la fréquence a donc pour résultat d'accroître la f.c.é.m. qui, à un point donné, peut forcer le courant à passer uniquement à la surface du conducteur. À la fréquence de 60 Hz, l'effet de Kelvin est tout juste observable. Aux hautes fréquences, il est tellement important que les fabricants utilisent de gros conducteurs dont le centre est vide. L'effet de Kelvin réduit donc l'aire efficace de transmission du courant et se traduit aussi par une augmentation de la résistance du conducteur, en vertu de l'équation  $R \uparrow = \rho(l/A \downarrow)$ .

Comme nous l'avons déjà souligné, les pertes par hystérésis et par courants de Foucault se produisent dans les matériaux ferromagnétiques placés dans un champ magnétique variable. La description détaillée des pertes par courants de Foucault exige une étude des effets du passage d'un courant alternatif dans une bobine à noyau ferromagnétique. Le passage du courant alternatif dans la bobine crée un flux magnétique variable qui embrasse à la fois la bobine et son noyau et qui, conformément à la loi de Faraday, induit une f.é.m. dans ce dernier. La f.é.m. induite et la résistance ohmique  $R_N = \rho(l/A)$  du noyau donnent naissance dans ce dernier à des courants  $i_{\text{noyau}} = (e_{\text{ind}}/R_N)$  appelés *courants de Foucault*. Ces courants sont circulaires, comme l'illustre la figure 19.23, et ils changent de sens avec le potentiel alternatif appliqué.

Les pertes par courants de Foucault sont déterminées par la relation:

$$P_{\text{Foucault}} = i_{\text{Foucault}}^2 R_N$$

La grandeur de ces pertes dépend essentiellement du type de noyau utilisé. Si le noyau est non ferromagnétique et qu'il offre une grande résistivité, comme le bois et l'air, les pertes par courants de Foucault sont négligeables. Par ailleurs, ces pertes sont proportionnelles au carré de la fréquence du courant d'alimentation et au carré de l'intensité du champ magnétique:

$$P_{\text{Foucault}} \propto f^2 B^2$$

Il est possible de réduire les pertes par courants de Foucault si le noyau est constitué de minces feuilles d'un matériau ferromagnétique, isolées les unes des autres et alignées parallèlement avec le flux magnétique. Un tel arrangement a pour effet d'accroître la résistance le long du trajet des courants de Foucault.

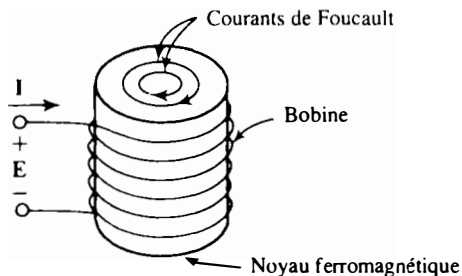


FIG. 19.23

Le phénomène des pertes par hystérésis a été expliqué à la section 10.8. Celles-ci sont proportionnelles à la fréquence du courant d'alimentation et à la  $n^e$  puissance de l'intensité du champ magnétique:

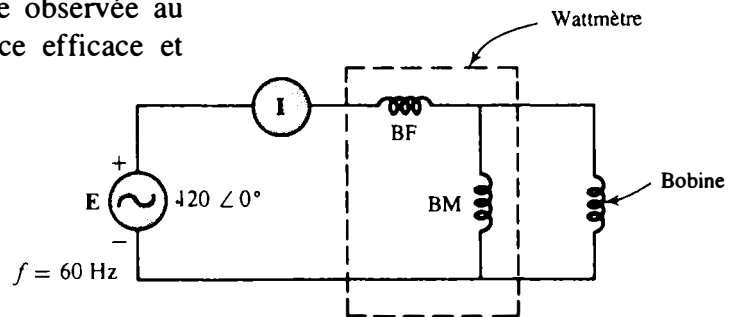
$$P_{\text{hys}} \propto f^1 B^n$$

La valeur de  $n$  se situe entre 1,4 et 2,6, selon la nature du matériau utilisé.

Il est possible de réduire efficacement les pertes par hystérésis. Il suffit d'injecter de petites quantités de silicium (de 2% à 3% de la composition totale) dans le noyau magnétique. La technique est toutefois délicate, car l'injection d'une trop grande quantité de silicium peut fragiliser le noyau et rendre son usinage difficile.

**EXEMPLE 19.5**

- a. Une bobine à noyau d'air est alimentée par une source de 120 V et 60 Hz, comme l'illustre la figure 19.24. Le courant mesuré est de 5 A et la puissance observée au wattmètre, de 75 W. Calculer la résistance efficace et l'inductance de la bobine.



**FIG. 19.24**

- b. On insère un noyau de laiton dans la bobine. Le courant et la puissance mesurés sont respectivement de 4 A et de 80 W. Calculer la résistance efficace du noyau. À quoi peut-on attribuer son augmentation?
- c. On insère un noyau de fer plein dans la bobine. Le courant et la puissance mesurés sont respectivement de 2 A et de 52 W. Calculer la résistance et l'inductance de la bobine. Comparer ces valeurs aux valeurs obtenues en (a) et expliquer les changements observés.

*Solution:*

a.  $R = \frac{P}{I^2} = \frac{75}{5^2} = 3 \Omega$

$$Z_T = \frac{E}{I} = \frac{120}{5} = 24 \Omega$$

$$X_L = \sqrt{Z_T^2 - R^2} = \sqrt{24^2 - 3^2} = 23,81 \Omega$$

et:  $X_L = 2\pi fL$

ou:  $L = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{23,81}{377} = 63,16 \text{ mH}$

b.  $R = \frac{P}{I^2} = \frac{80}{4^2} = \frac{80}{16} = 5 \Omega$



La réductance du noyau de laiton est moindre que celle du noyau d'air. L'induction  $B$  du champ interne est donc plus grande. Puisque  $P_{\text{Foucault}} \propto f^2 B^2$  et  $P_{\text{hys}} \propto f^1 B^n$ , il y a un accroissement des pertes dans le noyau et, par conséquent, de la résistance efficace.

$$c. R = \frac{P}{I^2} = \frac{52}{2^2} = \frac{52}{4} = 13 \Omega$$

$$Z_T = \frac{E}{I} = \frac{120}{2} = 60 \Omega$$

$$X_L = \sqrt{Z_T^2 - R^2} = \sqrt{60^2 - 13^2} = 58,57 \Omega$$

$$L = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{58,57}{377} = 155,36 \text{ mH}$$

La réductance du noyau de fer est moindre que celle du noyau de laiton et que celle du noyau d'air. Le raisonnement précédent tient compte de l'augmentation des pertes dans le noyau ainsi que de la résistance efficace.

Comme l'inductance est liée à la variation du flux par la relation  $L = N(d\phi/di)$ , elle est la plus grande dans le noyau de fer, puisque le flux variable embrassant celui-ci est plus grand.

## PROBLÈMES

### Section 19.7

1. Voir le réseau illustré à la figure 19.25.
  - a. Calculez la puissance moyenne fournie à chacun des éléments.
  - b. Calculez la puissance réactive pour chacun des éléments.
  - c. Calculez la puissance apparente pour chacun des éléments.
  - d. Calculez la puissance moyenne, la puissance apparente, la puissance réactive et le facteur de puissance  $F_p$  du réseau.
  - e. Tracez le triangle des puissances.
  - f. Calculez l'énergie dissipée par la résistance sur un cycle entier de la tension d'alimentation.
  - g. Calculez l'énergie emmagasinée ou restituée par le condensateur et par la bobine sur un demi-cycle de la courbe de puissance de chacun.

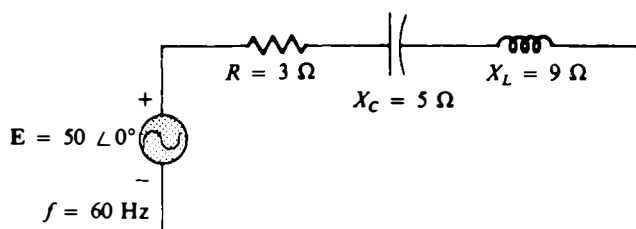


FIG. 19.25

2. Voir le réseau illustré à la figure 19.26.
  - a. Calculez la puissance moyenne, la puissance apparente, la puissance réactive et le facteur de puissance  $F_p$  du réseau.
  - b. Tracez le triangle des puissances.
  - c. Calculez le courant  $I_T$ .

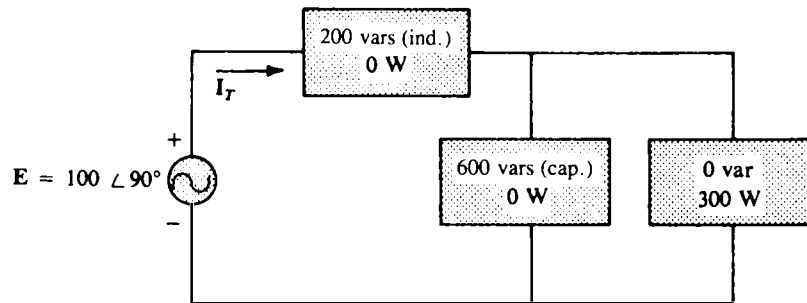


FIG. 19.26

3. Refaites le problème 2 dans le cas du réseau illustré à la figure 19.27.

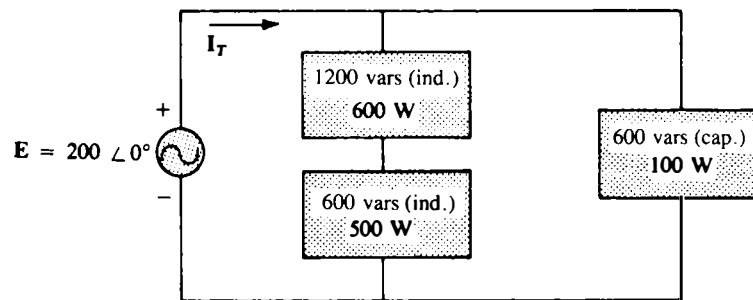


FIG. 19.27

4. Refaites le problème 2 dans le cas du réseau illustré à la figure 19.28.

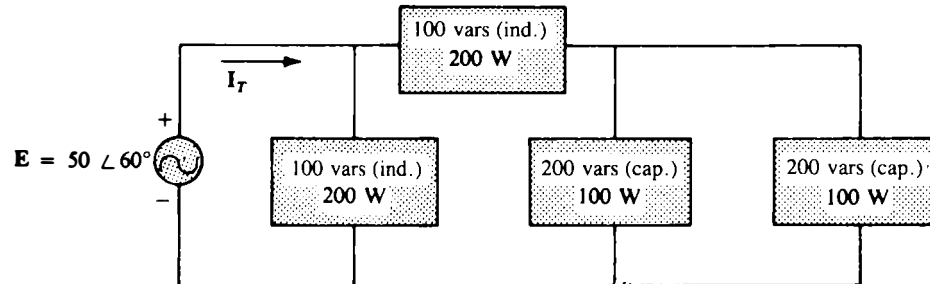


FIG. 19.28

5. Voir le circuit illustré à la figure 19.29.
  - a. Calculez la puissance moyenne, la puissance apparente et la puissance réactive pour la résistance de  $5 \Omega$ .
  - b. Refaites la partie (a) pour la réactance inductive de  $10 \Omega$ .
  - c. Calculez la puissance moyenne, la puissance apparente, la puissance réactive et le facteur de puissance  $F_p$  du circuit.
  - d. Calculez le courant  $I_T$ .

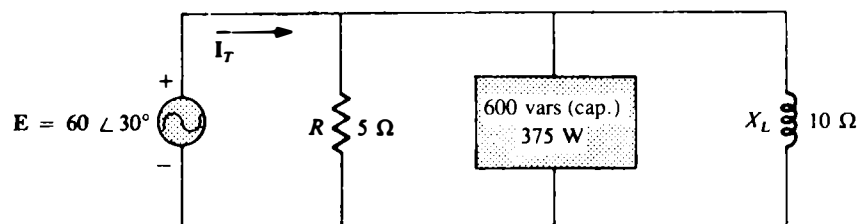


FIG. 19.29

6. Refaites le problème 1 dans le cas du circuit illustré à la figure 19.30.

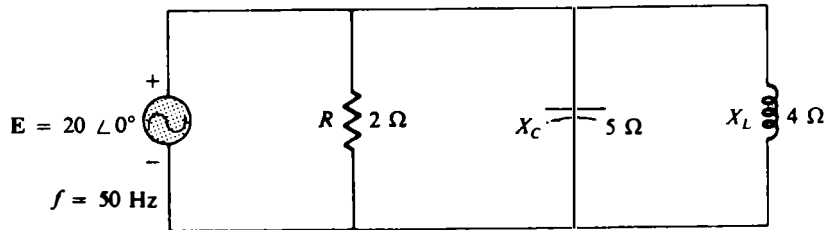


FIG. 19.30

7. Refaites le problème 1 dans le cas du circuit illustré à la figure 19.31.

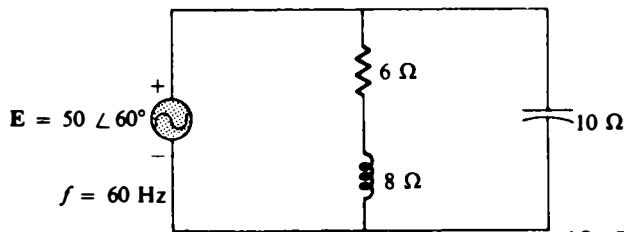


FIG. 19.31

\*8. Refaites le problème 1 dans le cas du circuit illustré à la figure 19.32.

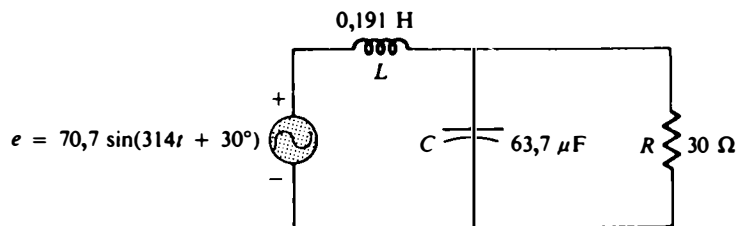


FIG. 19.32

9. Les caractéristiques nominales d'un système électrique, dont le facteur de puissance est de 0,5 (capacitif), sont de 10 kVa et de 200 V.

- Écrivez l'impédance du système sous forme algébrique.
- Calculez la puissance moyenne fournie au système.

10. Refaites le problème 9 pour un système dont le facteur de puissance est de 0,8 (inductif) et dont les caractéristiques nominales sont de 5 kVA et de 120 V.

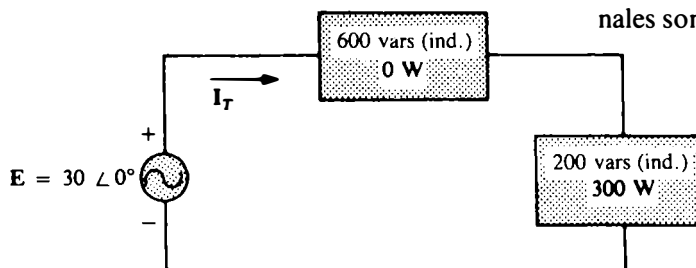


FIG. 19.33

\*11. Voir le réseau illustré à la figure 19.33.

- Calculez la puissance moyenne, la puissance apparente, la puissance réactive et le facteur de puissance  $F_p$  du réseau.
- Calculez le courant  $I_T$ .
- Tracez le triangle des puissances.
- Déterminez les éléments constituant chaque boîte noire ainsi que leur impédance en ohms (supposer qu'ils soient raccordés en série).
- Vérifiez si le courant calculé en (b) est correct en calculant à nouveau  $I_T$  mais seulement au moyen de la tension  $E$  de l'alimentation et des résultats obtenus à la partie (d). Comparez la valeur de  $I_T$  avec la valeur calculée en (a).

12. Voir le réseau illustré à la figure 19.34.
- Calculez la puissance moyenne, la puissance apparente, la puissance réactive et le facteur de puissance  $F_p$  du réseau.
  - Calculez le courant  $I$ .
  - Déterminez les éléments constituant chaque boîte noire ainsi que leur impédance en ohms (supposez qu'ils soient raccordés en série).

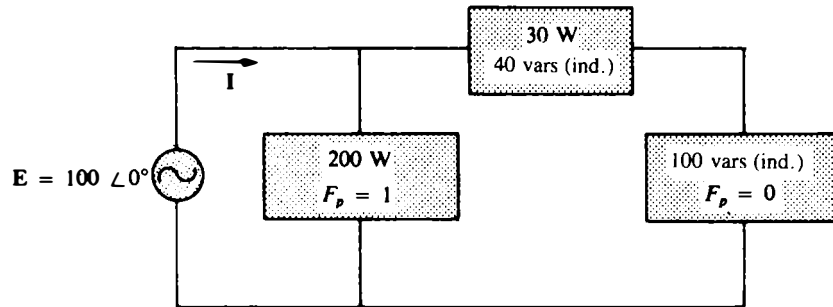


FIG. 19.34

13. Voir le circuit illustré à la figure 19.35.
- Calculez la puissance moyenne, la puissance apparente, la puissance réactive et le facteur de puissance  $F_p$  du circuit.
  - Calculez la tension  $E$ .
  - Déterminez les éléments constituant chaque boîte noire ainsi que leur impédance en ohms (supposez qu'ils soient raccordés en série).

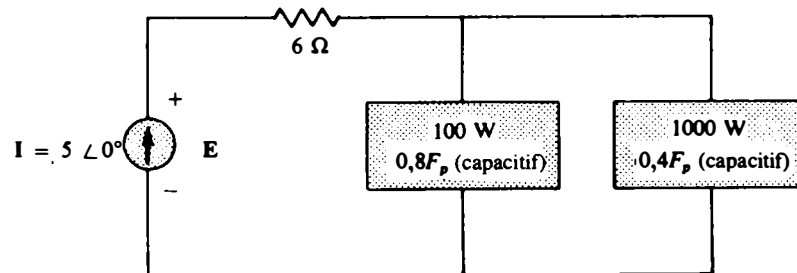


FIG. 19.35

- \*14. Refaites le problème 11 dans le cas du réseau illustré à la figure 19.36.

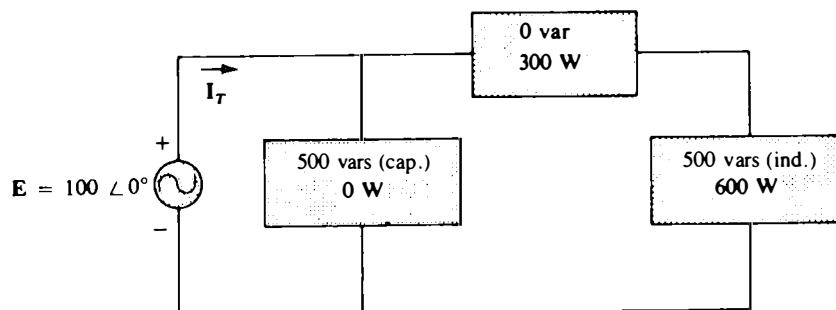


FIG. 19.36

15. a. Le cadre fixe d'un wattmètre est monté en série dans un circuit comme l'illustre la figure 19.37; le cadre mobile est raccordé aux points *f* et *g*. Quelle est la lecture de l'appareil?  
 b. Refaites la partie (a) en raccordant successivement le cadre mobile aux points *a* et *b*, *b* et *c*, *a* et *c*, *a* et *d*, *c* et *d*, *d* et *e* ainsi que *f* et *e*.

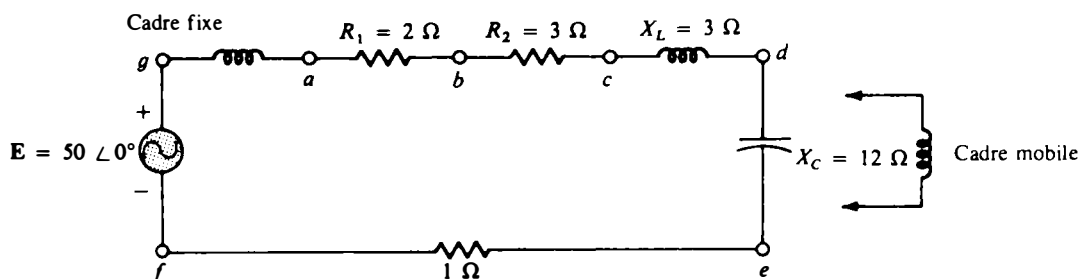


FIG. 19.37

## Section 19.8

16. a. Une bobine à noyau d'air est alimentée par une source de 200 V et 60 Hz. Le courant mesuré est de 4 A et la puissance observée au wattmètre, de 80 W. Calculez la résistance efficace et l'inductance de la bobine.  
 a. On insère un noyau de laiton dans la bobine. Le courant et la puissance mesurés sont respectivement de 3 A et de 90 W. Calculez la résistance efficace du noyau. À quoi peut-on attribuer l'augmentation?  
 c. On insère un noyau de fer plein dans la bobine. Le courant et la puissance mesurés sont respectivement de 2 A et de 60 W. Calculez la résistance et l'inductance de la bobine. Comparez ces valeurs aux valeurs obtenues en (a) et expliquez les changements.
17. a. L'inductance d'une bobine à noyau d'air est de 0,08 H et sa résistance efficace, de 4 Ω lorsqu'elle est alimentée par une source de 60 V et 50 Hz. Calculez le courant passant dans la bobine et déterminez la lecture d'un wattmètre raccordé aux bornes de la bobine.  
 b. On insère un noyau de laiton dans la bobine. Sa résistance efficace est alors de 7 Ω et l'indication du wattmètre, de 30 W. Calculez le courant passant dans la bobine ainsi que l'inductance de la bobine.  
 c. On insère un noyau de fer plein dans la bobine. Sa résistance efficace passe à 10 Ω et le courant qui la traverse chute à 1,7 A. Déterminez la lecture du wattmètre et calculez l'inductance de la bobine.

## GLOSSAIRE

**Courants de Foucault** Petits courants circulaires passant dans un noyau paramagnétique qui sont la cause d'une augmentation des pertes de puissance et de la résistance efficace du matériau.

**Effet de Kelvin** Aux hautes fréquences, une f.c.é.m. est induite dans le centre du conducteur et entraîne une augmentation de l'intensité du courant passant à la surface du conducteur et une diminution du courant passant dans le centre. Cela a pour conséquence d'accroître la résistance du conducteur, étant donné la réduction de son aire efficace de transmission.

**Pertes par hystérésis** Pertes dans un matériau magnétique produites par les changements de sens du flux magnétique.

**Pertes par rayonnement** Pertes d'énergie sous la forme d'ondes électromagnétiques pendant le transfert d'énergie entre les éléments du circuit.

**Puissance apparente** Puissance fournie à la charge définie sans tenir compte des effets du facteur de puissance de celle-ci. Elle est égale au produit de la tension appliquée et du courant passant dans la charge.

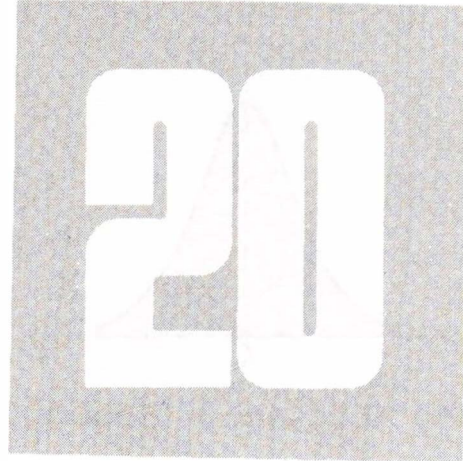
**Puissance moyenne (réelle)** Puissance dissipée dans un dispositif ou dans un réseau sous la forme de chaleur.

**Puissance réactive** Puissance associée aux éléments réactifs qui est une mesure de l'énergie dépensée dans l'établissement des champs magnétiques (éléments inductifs) et des champs électriques (éléments capacitifs).

**Résistance efficace** Résistance tenant compte des effets des pertes par rayonnement, de l'effet de Kelvin, des courants de Foucault et des pertes par hystérésis.



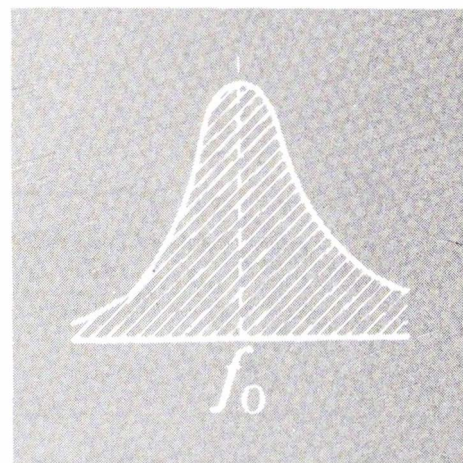
# RÉSONANCE



## 20.1 INTRODUCTION

Le présent chapitre se veut une introduction au très important circuit résonant (ou accordé), qui est à la base du fonctionnement d'une grande variété de systèmes électriques et électroniques usuels. Le circuit résonant est un assemblage d'éléments  $R$ ,  $L$  et  $C$  dont la courbe de réponse fréquentielle est semblable à celle qu'illustre la figure 20.1. Comme on l'observe à la figure, la réponse est maximale à la fréquence  $f_r$ , et décroît de part et d'autre de cette fréquence. En d'autres termes, le circuit résonant sélectionne une gamme de fréquences pour lesquelles la réponse des éléments est maximale ou presque maximale. Les fréquences situées à l'extrême gauche ou à l'extrême droite de la gamme n'ont, à toutes fins pratiques, aucune influence sur la réponse du circuit. Les récepteurs de radio et de télévision présentent une courbe de réponse semblable à celle de la figure 20.1 pour chacune des stations émettrices. Lorsqu'un récepteur est accordé à la fréquence d'une station donnée, la réponse de son circuit de réception est maximale à la fréquence  $f_r$  (figure 20.1) et aux alentours de cette fréquence. Les fréquences situées bien à droite ou bien à gauche de cette fréquence sont filtrées par le circuit et elles ne viennent donc pas brouiller l'émission écoutée. Le circuit ainsi *accordé* est dit en *résonance*, à la *fréquence propre*  $f_r$ .

La notion de résonance n'est pas exclusive aux systèmes électriques ou électroniques. Les systèmes mécaniques possèdent aussi leur fréquence propre. L'application d'impulsions mécaniques à un système mécanique à sa fréquence propre le fait entrer en résonance. Il se produit alors dans le système





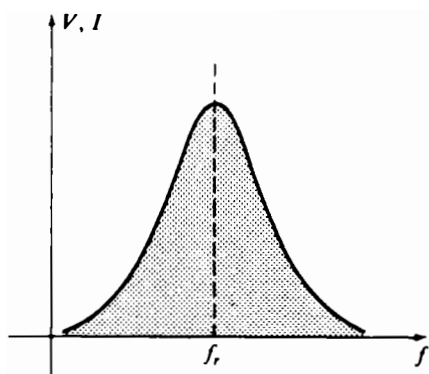


FIG. 20.1 Courbe de résonance.

des vibrations entretenues de très grande amplitude. Un exemple bien connu de ce phénomène est l'effondrement du premier pont qui franchissait le Puget Sound à Tacoma Narrows. Construit en 1940, ce pont avait un tablier suspendu de 855 m. Quatre mois après son inauguration, un vent soufflant par rafales à 67 km/h faisait vibrer le pont à sa fréquence propre. L'amplitude des oscillations a augmenté au point que le tablier central s'est brisé et effondré dans les flots du bras de mer. Le pont actuel de Tacoma Narrows a été construit en 1950.

Tout circuit électrique résonant *doit* nécessairement être inductif et capacitif. En outre, il sera toujours résistif puisqu'il n'existe pas d'éléments idéaux purement inductifs ou capacitifs et, aussi, parce que la présence d'une résistance permet de modeler l'allure de la courbe de résonance. Lorsque la fréquence de la source alimentant le circuit est égale à la fréquence propre ( $f_r$ ) du circuit et qu'il y a résonance, l'énergie absorbée à tout instant par un élément réactif est exactement égale à l'énergie cédée par un autre élément réactif du circuit. Autrement dit, l'énergie oscille d'un élément réactif à un autre. Par conséquent, une fois le circuit en résonance, ces oscillations sont entretenues sans apport extérieur de puissance réactive. La puissance apparente totale est alors simplement égale à la puissance moyenne dissipée par les éléments résistifs. *La puissance moyenne absorbée par le circuit est également maximale à la résonance*, tout comme l'énergie cédée par le vent au pont de Tacoma Narrows était maximale à la fréquence propre du pont.

Il existe deux types de circuits résonants: le circuit résonant série et le circuit résonant parallèle. Nous étudions chacun en détail dans le présent chapitre.

## RÉSONANCE SÉRIE

### 20.2 CIRCUIT RÉSONANT SÉRIE

La figure 20.2 illustre le circuit résonant série de base. La résistance  $R_l$  est la résistance interne de la bobine. La résistance  $R_s$  est la résistance de la source et elle comprend toute autre résistance ajoutée en série au circuit pour modeler l'allure de la courbe de résonance.

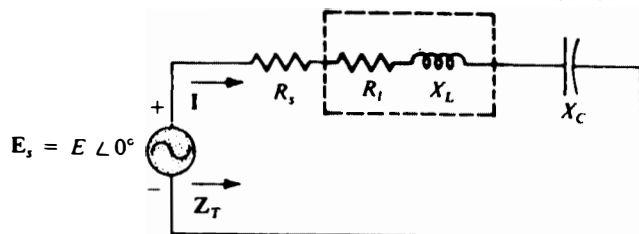


FIG. 20.2 Circuit résonant série.



En prenant  $R = R_s + R_l$ , on peut écrire l'expression de l'impédance totale du circuit de la façon suivante:

$$\mathbf{Z}_T = R + jX_L - jX_C = R + j(X_L - X_C)$$

La résonance série se produit lorsque:

$$\boxed{X_L = X_C} \quad (20.1)$$

L'impédance totale à la résonance est alors simplement:

$$\boxed{\mathbf{Z}_{T_s} = R} \quad (20.2)$$

puisque les composants réactifs s'annulent dans l'expression de  $\mathbf{Z}_T$  ci-dessus. L'indice inférieur  $s$  employé dans la dernière équation indique qu'il s'agit de résonance série.

La fréquence propre se détermine en fonction de l'inductance et de la capacité du circuit à partir de la condition de résonance [équation (20.1)]:

$$X_L = X_C$$

Par conséquent:

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \quad \text{et} \quad \omega^2 = \frac{1}{LC}$$

ou encore:

$$\boxed{\omega_s = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \quad (20.3)$$

$$\boxed{f_s = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}} \quad \left( \begin{array}{l} f \text{ en Hz} \\ L \text{ en H} \\ C \text{ en F} \end{array} \right) \quad (20.4)$$

À la résonance, le courant passant dans le circuit est:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{E} \angle 0^\circ}{R \angle 0^\circ} = \frac{\mathbf{E}}{R} \angle 0^\circ$$

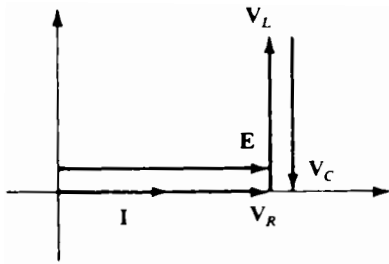
Il est donc le courant maximal pouvant passer dans le circuit illustré à la figure 20.2 sous la tension appliquée  $\mathbf{E}$ . On aura sans doute par ailleurs remarqué que *la tension d'entrée et le courant sont en phase à la résonance*.

Puisque le courant est le même dans le condensateur et dans la bobine, les tensions aux bornes de ces éléments sont égales en grandeur mais déphasées de  $180^\circ$  à la résonance:

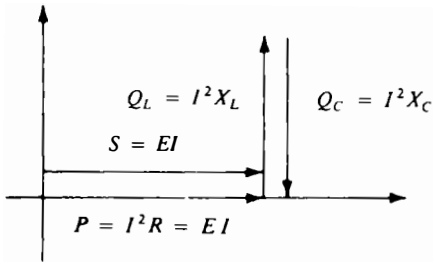
$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{V}_L = \mathbf{I}\mathbf{X}_L = (I \angle 0^\circ)(X_L \angle 90^\circ) = IX_L \angle 90^\circ \\ \mathbf{V}_C = \mathbf{I}\mathbf{X}_C = (I \angle 0^\circ)(X_C \angle -90^\circ) = IX_C \angle -90^\circ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{dépha-} \\ \text{sées de} \\ 180^\circ \end{array}$$

et, puisque  $X_L = X_C$ :

$$\boxed{V_{L_s} = V_{C_s}} \quad (20.5)$$



**FIG. 20.3** Diagramme de phase des grandeurs du circuit résonant série à la résonance.



**FIG. 20.4** Triangle des puissances du circuit résonant série à la résonance.

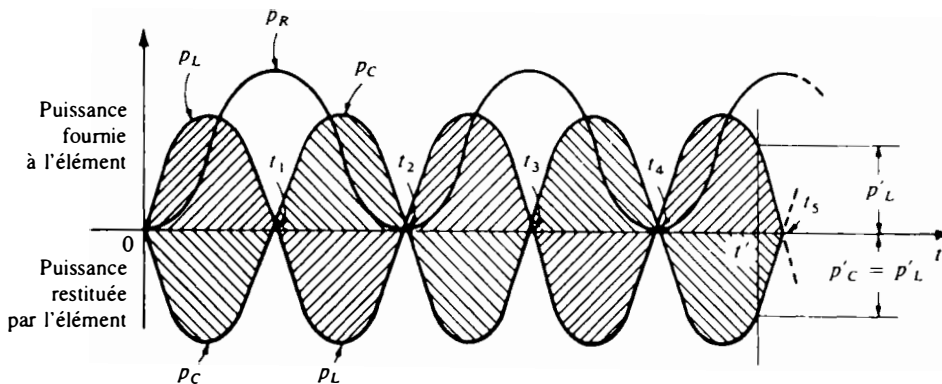
Le diagramme de phase des tensions et du courant est illustré à la figure 20.3. On y voit nettement que la tension aux bornes de la résistance à la résonance est égale à la tension d'entrée.

La puissance moyenne fournie à la résistance est égale à  $I^2 R$  à la résonance, et les puissances réactives fournies au condensateur et à la bobine sont respectivement  $I^2 X_C$  et  $I^2 X_L$ .

Le triangle des puissances (figure 20.4) à la résonance indique que la puissance apparente totale est égale à la puissance moyenne dissipée par la résistance, puisque  $Q_L = Q_C$ . Le facteur de puissance du circuit à la résonance est:

$$F_p = \cos \theta = \frac{P}{S} = 1$$

Le tracé des courbes de puissance pour chacun des éléments sur un graphique commun (figure 20.5) révèle que, même si la puissance réactive totale à tout instant est égale à zéro ( $t = t'$ ), le condensateur et la bobine s'échangent quand même de l'énergie à la résonance.



**FIG. 20.5** Courbes des puissances du circuit résonant série à la résonance.

Un examen plus attentif montre aussi que l'énergie absorbée par la bobine entre l'instant 0 et l'instant  $t_1$ , est égale à l'énergie restituée par le condensateur au cours du même intervalle. Entre l'instant  $t_1$  et l'instant  $t_2$ , l'inverse se produit, et ainsi de suite. Par conséquent, la puissance apparente totale continue d'être égale à la puissance moyenne, même si la bobine et le condensateur absorbent et restituent de l'énergie. Cette situation ne se produit cependant qu'à la résonance. La moindre variation de la fréquence de la source fait apparaître une composante réactive dans le triangle des puissances, ce qui entraîne une augmentation de la puissance apparente par rapport à la puissance moyenne dissipée: le circuit n'est alors plus en résonance.



### 20.3 LE FACTEUR DE QUALITÉ ( $Q$ )

Par définition, le *facteur de qualité*  $Q$  d'un circuit résonant série est le rapport de la puissance réactive de la bobine ou du condensateur à la puissance moyenne de la résistance en résonance; sous forme mathématique, cette définition s'écrit:

$$Q_s = \frac{\text{Puissance réactive}}{\text{Puissance moyenne}} \quad (20.6)$$

Le facteur de qualité est aussi une indication de la quantité d'énergie emmagasinée (et transférée d'un élément réactif à l'autre) en regard de l'énergie dissipée. Moindre est la dissipation, plus grand est le facteur de qualité  $Q_s$  et plus marquée est la région de résonance.

La substitution de l'expression de la réactance inductive à la résonance dans l'équation (20.6) donne:

$$Q_s = \frac{I^2 X_L}{I^2 R}$$

et:

$$Q_s = \frac{X_L}{R} = \frac{\omega_s L}{R} \quad (20.7)$$

ou, pour la réactance capacitive:

$$Q_s = \frac{I^2 X_C}{I^2 R}$$

et:

$$Q_s = \frac{X_C}{R} = \frac{1}{\omega_s CR} \quad (20.8)$$

Si la composante résistive du circuit provient uniquement de la bobine ( $R_l$ ), il est d'usage de parler du  $Q$  de la bobine où:

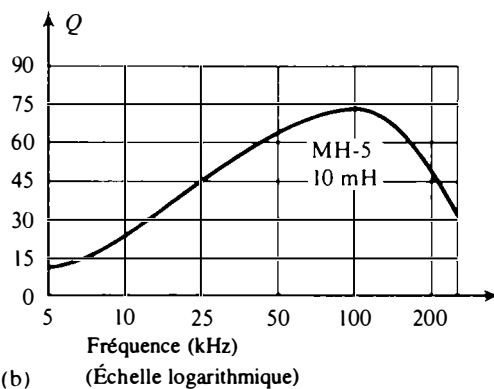
$$Q_{\text{bobine}} = Q = \frac{X_L}{R_l} \quad (R = R_l) \quad (20.9)$$

Comme la caractéristique habituellement fournie par les fabricants d'éléments inductifs est le facteur de qualité de la bobine, il est d'usage d'écrire le symbole  $Q$  sans indice inférieur. L'équation (20.9) semble indiquer que le facteur  $Q$  augmente linéairement avec la fréquence; par exemple, celui-ci doublerait si la fréquence doublait. Cela est relativement vrai aux basses et moyennes fréquences, comme c'est le cas pour la bobine illustrée à la figure 20.6. Malheureusement, la résistance efficace de la bobine augmente avec la fréquence et le



(a)

Courtoisie de United Transformer Corp.



**FIG. 20.6** Facteur  $Q$  en fonction de la fréquence pour la bobine TRW/UTC de 10 mH.

facteur  $Q$  résultant diminue. En outre, les effets capacitifs entre les enroulements s'accroissent aussi et réduisent l'inductance nette de la bobine, ce qui fait chuter davantage le facteur  $Q$  de la bobine. Pour cette raison, le facteur  $Q$  d'une bobine est toujours précisé pour une fréquence donnée (habituellement au maximum). Lorsque la bobine doit fonctionner à plusieurs fréquences, le fabricant fournit souvent un graphique de  $Q$  en fonction de la fréquence. Le facteur  $Q$  maximal de la plupart des bobines commerciales approche la valeur de 100.

Par substitution dans l'équation (20.7) des relations:

$$\omega_s = 2\pi f_s \quad \text{et} \quad f_s = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

on obtient:

$$Q_s = \frac{\omega_s L}{R} = \frac{2\pi f_s L}{R} = \frac{2\pi}{R} \left( \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \right) L$$

$$Q_s = \frac{L}{R} \left( \frac{1}{\sqrt{LC}} \right) = \left( \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{L}} \right) \frac{L}{R\sqrt{LC}}$$

de sorte que:

$$Q_s = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (20.10)$$

Le facteur de qualité  $Q_s$  des circuits résonants série utilisés dans les réseaux de télécommunications est habituellement supérieur à 1. L'application de la règle du diviseur de tension au circuit illustré à la figure 20.2 donne:

$$V_L = \frac{X_L E}{Z_T} = \frac{X_L E}{R} \quad (\text{à la résonance})$$

et:

$$V_{L_s} = QE \quad (20.11)$$

ou encore:

$$V_C = \frac{X_C E}{Z_T} = \frac{X_C E}{R}$$

de sorte que:

$$V_{C_s} = QE \quad (20.12)$$

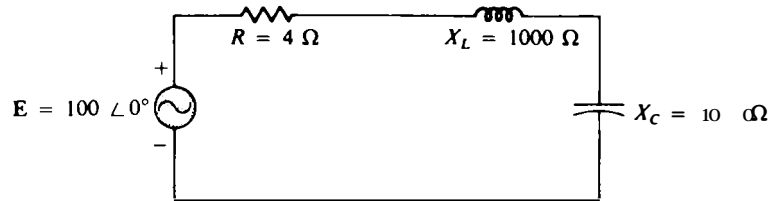
Puisque  $Q_s$  est habituellement supérieur à 1, la tension aux bornes du condensateur ou de la bobine d'un circuit résonant série est habituellement supérieure à la tension d'entrée. De fait, dans de nombreux cas, le  $Q_s$  est tellement grand qu'il faut faire preuve de beaucoup de circonspection et de prudence dans la



conception de ces circuits (notamment prévoir un isolement suffisant), en raison des tensions élevées présentes aux bornes du condensateur et de la bobine.

Ainsi, dans le circuit résonant illustré à la figure 20.7, on a:

$$Q_s = \frac{X_L}{R} = \frac{1000}{4} = 250$$



et:

$$V_L = V_C = Q_s E = (250)(100) = 25\,000 \text{ V}$$

ce qui est certes une tension dangereuse.

**FIG. 20.7** Circuit résonant série à facteur Q élevé.

## 20.4 Z<sub>T</sub> EN FONCTION DE LA FRÉQUENCE

L'impédance totale du circuit R-L-C série illustré à la figure 20.2 est déterminée à toute fréquence par la relation:

$$Z_T = R + jX_L - jX_C \text{ ou } Z_T = R + j(X_L - X_C)$$

son module étant:

$$Z_T = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

La courbe de l'impédance totale en fonction de la fréquence du circuit résonant série illustré à la figure 20.2 peut se déterminer à partir de la courbe de l'impédance en fonction de la fréquence pour chacun des éléments de l'équation obtenue ci-dessus, ce qui se traduit mathématiquement par la relation:

$$Z_T(f) = \sqrt{[R(f)]^2 + [X_L(f) - X_C(f)]^2} \quad (20.13)$$

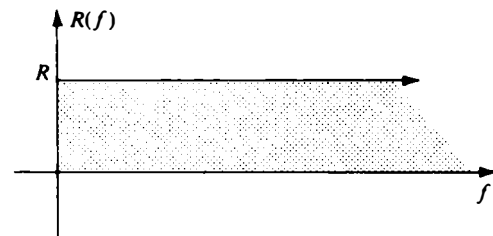
dans laquelle Z<sub>T</sub>(f) représente l'impédance totale en fonction de la fréquence. Idéalement, la résistance R ne varie pas avec la fréquence, de sorte que la courbe de cet élément est une droite horizontale croisant l'ordonnée au point R (figure 20.8). La courbe de l'inductance, obtenue à partir de l'équation de la réactance, est une droite passant par l'origine dont la pente est égale à l'inductance de la bobine. Rappelons que l'expression mathématique d'une droite dans un plan est:

$$y = mx + b$$

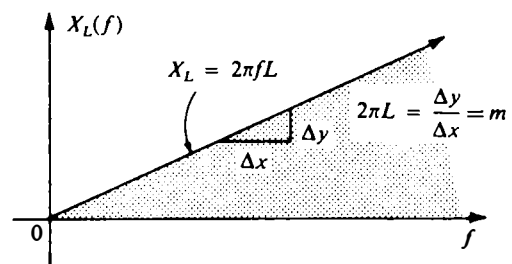
de sorte que pour la bobine on a:

$$\begin{array}{ccccccc} X_L = 2\pi fL + 0 = (2\pi L)(f) + 0 & & & & & & \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ y = & & m & x & + & b & \end{array}$$

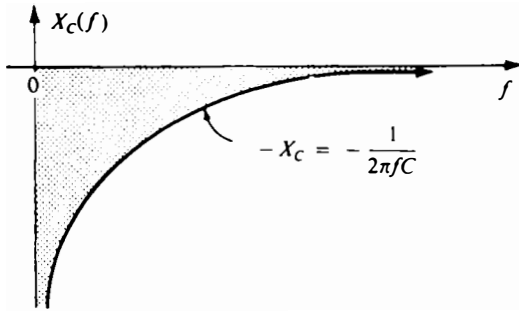
dans laquelle 2πL est la pente. Le graphique de la droite est illustré à la figure 20.9:



**FIG. 20.8** Résistance en fonction de la fréquence.



**FIG. 20.9** Réactance inductive en fonction de la fréquence.



**FIG. 20.10** Réactance capacitive en fonction de la fréquence.

Pour le condensateur, on a.

$$X_c = \frac{1}{2\pi f C} \quad \text{ou} \quad X_c f = \frac{1}{2\pi C}$$

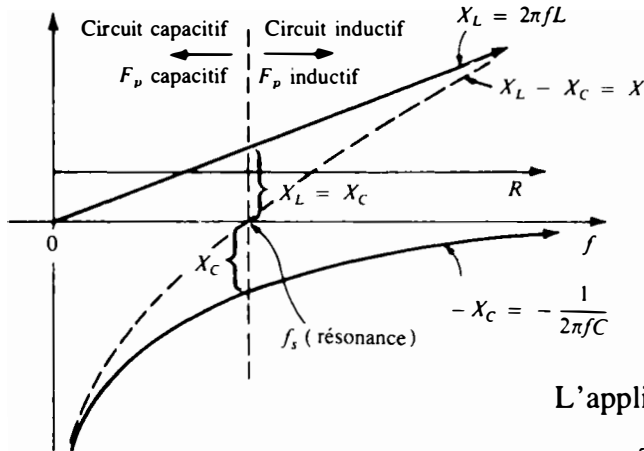
Cette relation est de forme  $yx = k$ , équation d'une hyperbole:

$$y \text{ (variable)} = X_c$$

$$x \text{ (variable)} = f$$

$$k \text{ (constante)} = 1/2\pi C$$

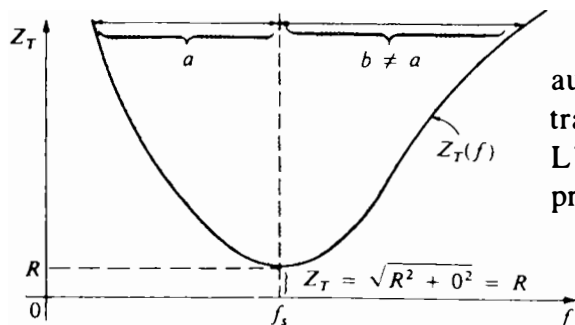
Le dernier terme dont dépend l'impédance totale  $Z_T$  est  $-X_c(f)$ , dont la courbe est tracée à la figure 20.10. Les courbes des trois éléments sont tracées sur un graphique commun à la figure 20.11. On constate que la résonance se produit à la fréquence  $f$  pour laquelle  $X_L = X_C$ . Puisque la réactance capacitive du circuit est plus grande que la réactance inductive aux fréquences inférieures à  $f$ , le circuit est surtout *capacitif* aux fréquences inférieures à la fréquence propre. Aux fréquences supérieures à la fréquence propre, l'inverse est vrai et le circuit est surtout *inductif*. Le facteur de puissance du circuit est donc *capacitif* aux fréquences inférieures à la fréquence propre  $f_s$  et *inductif*, aux fréquences supérieures (voir la figure 20.13).



**FIG. 20.11**

L'application de la relation:

$$Z_T(f) = \sqrt{[R(f)]^2 + [X_L(f) - X_C(f)]^2} \\ = \sqrt{[R(f)]^2 + [X(f)]^2}$$



**FIG. 20.12**  $Z_T$  en fonction de la fréquence dans le circuit résonant série.

aux points des courbes à la figure 20.11, où la courbe  $X(f)$  est tracée en tirets, donne la courbe illustrée à la figure 20.12. L'impédance totale du circuit est donc minimale à la fréquence propre; elle est alors égale à la résistance  $R$ . Soulignons que

cette courbe n'est pas symétrique de chaque côté de la fréquence propre (notamment aux valeurs élevées de  $Z_T$ ).



Aux très basses fréquences, le circuit est presque purement capacitif, et le courant est en avance de  $90^\circ$  sur la tension appliquée. Aux très hautes fréquences, le circuit est presque purement inductif, et la tension est en avance de  $90^\circ$  sur le courant. La tension appliquée et le courant résultant sont en phase uniquement à la résonance, comme l'illustre la courbe de phase à la figure 20.13.

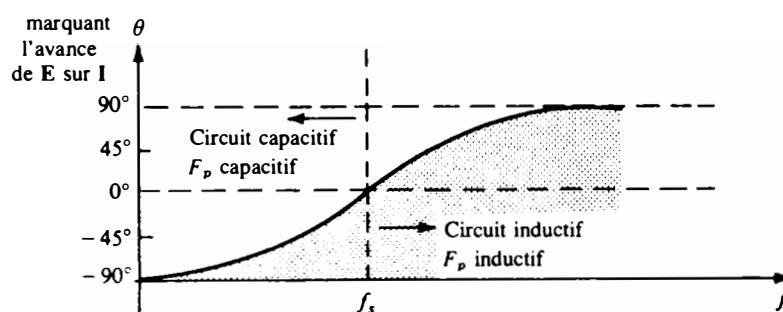


FIG. 20.13 Courbe de phase pour le circuit résonant série.

## 20.5 SÉLECTIVITÉ

Traçons maintenant le graphique de l'intensité du courant  $I = E/Z_T$  en fonction de la fréquence pour une tension appliquée  $E$  fixe. La courbe résultante est illustrée à la figure 20.14; elle passe de zéro à sa valeur maximale  $E/R$  (quand  $Z_T$  est minimale), puis chute vers zéro (à mesure que  $Z_T$  augmente) mais moins abruptement que pendant sa montée. La courbe est en réalité l'inverse de la courbe de l'impédance en fonction de la fréquence. Puisque la courbe de  $Z_T$  n'est pas absolument symétrique de chaque côté de la fréquence propre, la courbe du courant en fonction de la fréquence est aussi asymétrique.

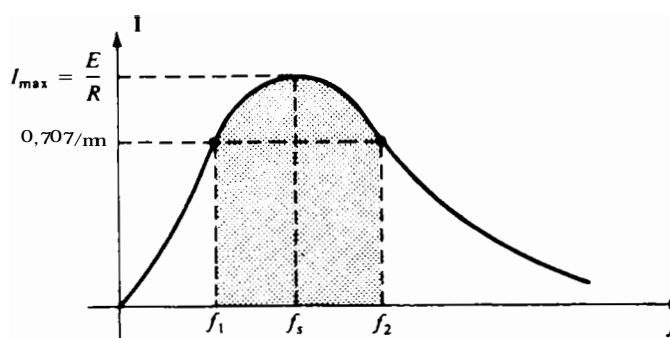


FIG. 20.14  $I$  en fonction de  $f$  dans le circuit résonant série.

Il existe une gamme bien précise de fréquences dans laquelle le courant prend des valeurs voisines de sa valeur maximale et l'impédance des valeurs voisines de sa valeur minimale. Les fréquences qui délimitent cette gamme correspondent à un courant égal à 0,707 fois le courant maximal. Elles sont appe-





lées *fréquences limites* de la bande, *fréquences de coupure* ou, encore, *fréquences à demi-puissance*. À la figure 20.14, celles-ci sont désignées par  $f_1$  et  $f_2$ . La gamme des fréquences comprises entre ces deux fréquences est la *bande passante* ou *largeur de bande* (LB) du circuit résonant.

Les fréquences à demi-puissance sont les fréquences pour lesquelles la puissance fournie au circuit est égale à la moitié de la puissance que reçoit le circuit à la résonance; on a donc:

$$P_{DP} = \frac{1}{2} P_{max} \tag{20.14}$$

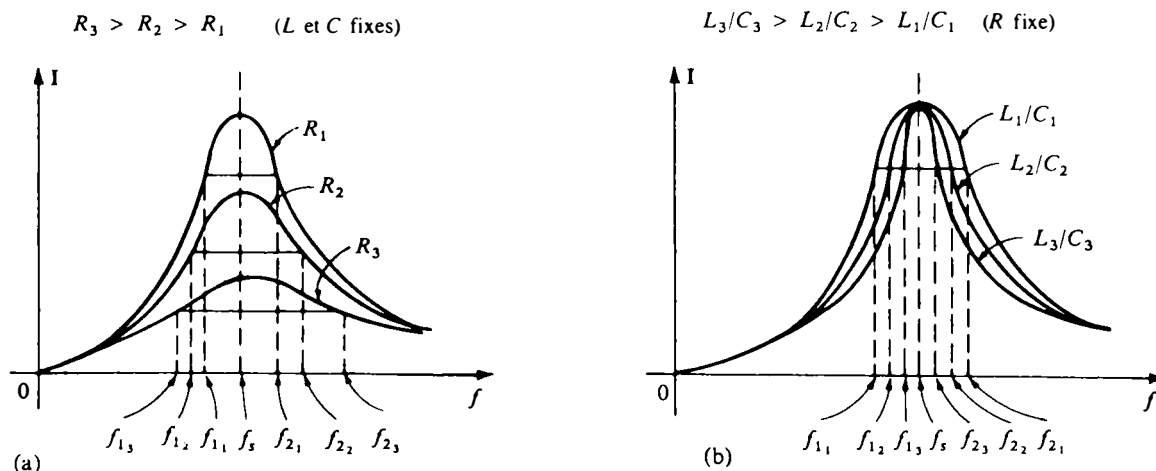
La relation ci-dessus découle du fait que:

$$P_{max} = I_{max}^2 R$$

et de l'équation:

$$\begin{aligned} P_{DP} &= I^2 R = (0,707 I_{max})^2 R \\ &= 0,5 I_{max}^2 R = \frac{1}{2} P_{max} \end{aligned}$$

Puisque, à toutes fins pratiques, le circuit est réalisé pour ne laisser passer qu'une gamme déterminée de fréquences, la courbe à la figure 20.14 est appelée *courbe de sélectivité*. Plus la bande passante est petite, plus grande est la sélectivité. L'allure de la courbe dépend des valeurs des éléments du circuit  $R$ - $L$ - $C$  série, comme l'illustre la figure 20.15. Si la valeur ohmique de la résistance diminue et que les valeurs de la bobine et du condensateur demeurent fixes, la bande passante diminue et la sélectivité augmente. De façon semblable, la bande passante diminue et la sélectivité augmente si le rapport  $L/C$  augmente et que la résistance demeure fixe.



**FIG. 20.15** Effet de  $R$ ,  $L$  et  $C$  sur la courbe de sélectivité du circuit résonant série.



Par ailleurs, le facteur de qualité  $Q_s$  diminue quand  $R$  augmente et que  $X_L$  demeure fixe, comme l'indique la relation  $Q_s = \omega_s L/R$ . Un facteur de qualité  $Q_s$  petit est par conséquent associé à une courbe de résonance présentant une bande passante large et une faible sélectivité, et un facteur de qualité  $Q_s$  grand est associé à une courbe présentant les caractéristiques opposées.

Dans les circuits pour lesquels  $Q_s \geq 10$ , on fait généralement l'approximation que la fréquence propre est située au milieu de la bande passante et que la courbe de résonance est symétrique autour de cette fréquence propre. La figure 20.16 illustre le résultat de cette approximation; on y voit que les fréquences de coupure sont situées à égale distance de la fréquence propre.

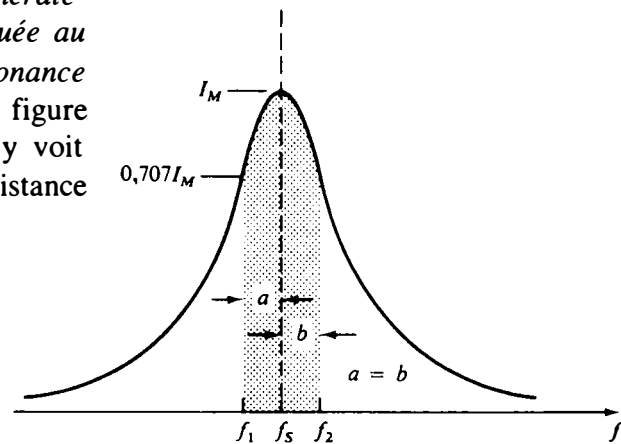


FIG. 20.16 Courbe de résonance série approximative quand  $Q_s \geq 10$ .

Évidemment, cette approximation n'est pas valable pour n'importe quelle valeur de  $Q_s$ . Dans le cas général, on peut cependant calculer les fréquences de coupure  $f_1$  et  $f_2$  en partant du fait que, quand le courant passe à 0,707 fois sa valeur maximale, l'impédance passe à  $1/0,707 = \sqrt{2}$  fois sa valeur minimale (qui est égale à  $R$ ).

En substituant maintenant la valeur  $\sqrt{2}R$  dans la relation donnant la grandeur de  $Z_T$ , on obtient:

$$Z_T = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

qui devient:

$$\sqrt{2}R = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

La mise au carré des deux membres de cette équation donne:

$$2R^2 = R^2 + (X_L - X_C)^2$$

et:

$$R^2 = (X_L - X_C)^2$$

L'extraction de la racine carrée des deux membres donne enfin:

$$R = X_L - X_C$$

Considérons d'abord le cas où  $X_L > X_C$ . Substituons  $\omega_2 L$  à  $X_L$  et  $1/\omega_2 C$  à  $X_C$  et transférons le membre droit de l'équation précédente à la gauche du signe d'égalité. Nous obtenons ainsi:

$$R - \omega_2 L + \frac{1}{\omega_2 C} = 0 \quad \text{ou} \quad R\omega_2 - \omega_2^2 L + \frac{1}{C} = 0$$



ce qui peut se réécrire ainsi;

$$\omega_2^2 - \frac{R}{L} \omega_2 - \frac{1}{LC} = 0$$

Les racines de cette équation quadratique sont:

$$\omega_2 = \frac{-(-R/L) \pm \sqrt{[-(R/L)]^2 - [-(4/LC)]}}{2}$$

$$\omega_2 = +\frac{R}{2L} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R^2}{L^2} + \frac{4}{LC}}$$

de sorte que:

$$\boxed{\omega_2 = \frac{R}{2L} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \frac{4}{LC}} \quad (\text{rad/s}) \quad (20.15)}$$

Le signe moins n'apparaît plus devant le deuxième terme du membre droit de l'équation ci-dessus car  $(1/2)\sqrt{R^2/L^2 + 4/LC}$  est toujours supérieur à  $R/(2L)$ . Si cette dernière condition n'était pas toujours vérifiée, il pourrait donc exister une racine négative pour la pulsation  $\omega$ . Étant donné que  $\omega_2 = 2\pi f_2$ , on a:

$$\boxed{f_2 = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{R}{2L} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \frac{4}{LC}} \right] \quad (\text{Hz}) \quad (20.16)}$$

Répetons les calculs dans le cas où  $X_C > X_L$ . Nous obtenons la relation  $Z_T = \sqrt{R^2 + (X_C - X_L)^2}$ , dont la racine positive  $\omega_1$  est:

$$\boxed{\omega_1 = -\frac{R}{2L} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \frac{4}{LC}} \quad (\text{rad/s}) \quad (20.17)}$$

ce qui peut se réécrire ainsi, puisque  $\omega_1 = 2\pi f_1$ :

$$\boxed{f_1 = \frac{1}{2\pi} \left[ -\frac{R}{2L} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \frac{4}{LC}} \right] \quad (\text{Hz}) \quad (20.18)}$$

La largeur de bande est:

$$\begin{aligned} \text{LB} &= f_2 - f_1 \\ &= \left[ \frac{R}{4\pi L} + \frac{1}{4\pi} \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \frac{4}{LC}} \right] \\ &\quad - \left[ -\frac{R}{4\pi L} + \frac{1}{4\pi} \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \frac{4}{LC}} \right] \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{LB} = f_2 - f_1 = \frac{R}{2\pi L} \quad (20.19)}$$



Par substitution de  $R/L = \omega_s/Q_s$  obtenue de la relation  $Q_s = \omega_s L/R$  et de  $1/2\pi = f_s/\omega_s$  obtenue de la relation  $\omega_s = 2\pi f_s$ , on obtient:

$$LB = \frac{R}{2\pi L} = \left(\frac{f_s}{\omega_s}\right) \left(\frac{\omega_s}{Q_s}\right)$$

ou encore:

$$\boxed{LB = \frac{f_s}{Q_s}} \tag{20.20}$$

Cette relation se présente sous une forme extrêmement commode puisqu'elle relie la largeur de bande au facteur de qualité  $Q_s$  du circuit. Elle vérifie également le fait que plus grand est le facteur de qualité  $Q_s$  plus petite est la bande passante, et vice versa, comme nous l'avions affirmé antérieurement.

L'équation (20.20) peut se réécrire d'une façon légèrement différente:

$$\boxed{\frac{f_2 - f_1}{f_s} = \frac{1}{Q_s}} \tag{20.21}$$

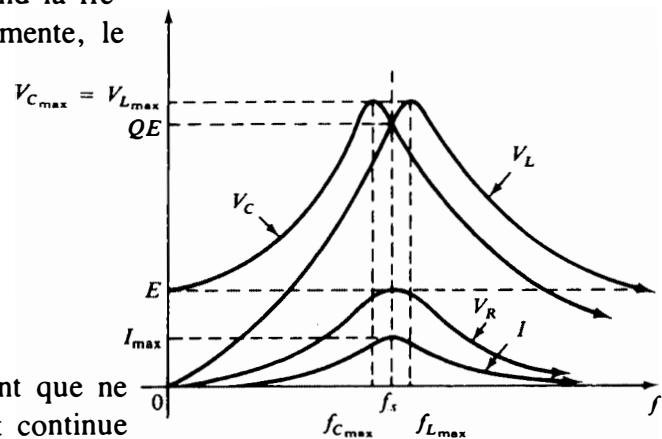
Le rapport  $(f_2 - f_1)/f_s$  est parfois appelé *largeur de bande fractionnaire*.

## 20.6 $V_R, V_L$ ET $V_C$

Traçons maintenant sur le même graphique les valeurs efficaces des tensions  $V_R, V_L$  et  $V_C$  ainsi que du courant  $I$  en fonction de la fréquence dans le cas d'un circuit résonant série. Les courbes résultantes sont illustrées à la figure 20.17. Notons que la courbe de  $V_R$  a la même allure que celle de la courbe de  $I$  et que sa valeur de crête est égale à la grandeur de la tension d'entrée  $E$ . La courbe de  $V_C$  monte d'abord lentement à partir d'une valeur égale à la tension d'entrée, étant donné que la réactance du condensateur est infinie (circuit ouvert) et que la réactance de la bobine est nulle (court-circuit) quand la fréquence est nulle. À mesure que la fréquence augmente, le facteur  $1/(\omega C)$  de l'équation:

$$V_C = IX_C = I \frac{1}{\omega C}$$

devient plus petit mais  $I$  augmente plus rapidement que ne chute ce dernier. Par conséquent,  $V_C$  augmente et continue d'augmenter, en raison de l'accroissement rapide du courant, jusqu'à ce que la fréquence s'approche de la fréquence propre. À mesure que la fréquence approche de la valeur de résonance,



**FIG. 20.17**  $V_R, V_L, V_C$  et  $I$  en fonction de la fréquence dans le circuit résonant série.



la vitesse à laquelle  $I$  augmente décroît. Lorsque cela se produit, le facteur  $1/(\omega C)$ , qui diminue lorsque la fréquence augmente, chutera plus rapidement que  $I$  n'augmente et  $V_C$  commencera par conséquent à chuter. La valeur de crête est atteinte à une fréquence à peine inférieure à la fréquence propre. Aux fréquences supérieures à la fréquence propre,  $V_C$  et  $I$  chutent et  $V_C$  tend vers zéro.

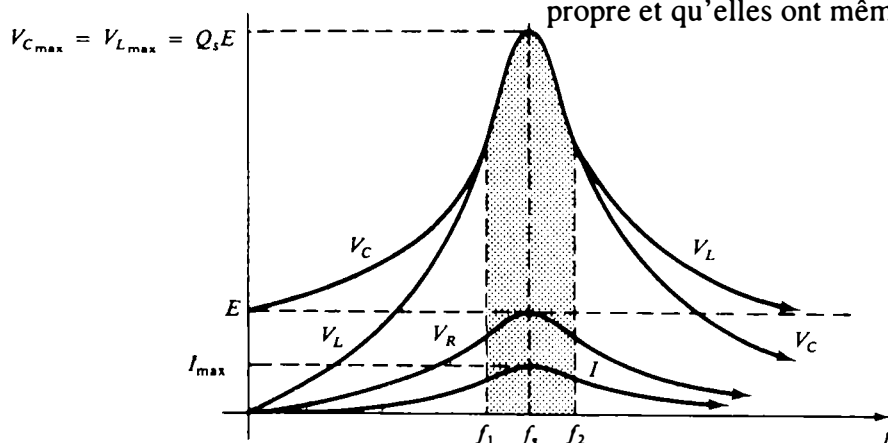
Plus grand est le  $Q_s$  du circuit, plus  $f_{C_{\max}}$  s'approche de  $f_s$  et plus  $V_{C_{\max}}$  s'approche de  $Q_s E$ . Dans les circuits pour lequel  $Q_s \geq 10$ ,  $f_{C_{\max}} \cong f_s$  et  $V_{C_{\max}} \cong Q_s E$ .

La courbe de  $V_L$  augmente de façon régulière entre zéro et la fréquence propre, puisque les deux grandeurs,  $\omega L$  et  $I$ , augmentent dans cette gamme de fréquences. À la résonance,  $I$  a atteint sa valeur maximale mais  $\omega L$  augmente encore. Par conséquent,  $V_L$  atteint sa valeur maximale à une fréquence supérieure à la fréquence propre. Une fois parvenue à sa valeur de crête, la tension  $V_L$  chute vers la valeur  $E$ , puisque l'augmentation de  $\omega L$  ne suffit plus à compenser la chute du courant  $I$ . La valeur limite est  $E$  parce que  $X_L$  tend vers l'infini et que  $X_C$  tend vers zéro.

À mesure que le  $Q_s$  du circuit augmente, la fréquence  $f_{L_{\max}}$  chute vers  $f_s$  et la tension  $V_{L_{\max}}$  tend vers  $Q_s E$ . Dans les circuits dont  $Q_s \geq 10$ ,  $f_{L_{\max}} \cong f_s$  et  $V_{L_{\max}} \cong Q_s E$ .

Les valeurs de la courbe  $V_L$  sont plus grandes que celles de la courbe  $V_C$  à toute fréquence supérieure à la fréquence propre, et l'inverse est vrai pour toute fréquence inférieure à la fréquence propre, c'est-à-dire que les valeurs de la courbe  $V_C$  sont supérieures à celles de la courbe  $V_L$ . Cette caractéristique confirme le fait que le circuit  $R-L-C$  série est surtout capacitif quand la fréquence de l'alimentation est inférieure à la fréquence propre et surtout inductif quand la fréquence de l'alimentation est supérieure à la fréquence propre.

Si  $Q_s \geq 10$ , les courbes à la figure 20.17 deviennent semblables à celles illustrées à la figure 20.18. Notons que chacune atteint approximativement sa valeur de crête à la fréquence propre et qu'elles ont même allure.



**FIG. 20.18** Courbes approximatives de  $V_R$ ,  $V_L$ ,  $V_C$  et de  $I$  dans un circuit résonant série quand  $Q_s \geq 10$ .

**20.7 EXEMPLES (RÉSONANCE SÉRIE)**

**EXEMPLE 20.1** Voir le circuit résonant à la figure 20.19. Calculer  $i$ ,  $v_R$ ,  $v_L$  et  $v_C$  en vecteurs de phase. Quel est le  $Q_s$  du circuit? Si la fréquence propre est de 5000 Hz, calculer la largeur de bande. Quelle est la puissance fournie au circuit aux fréquences à demi-puissance?

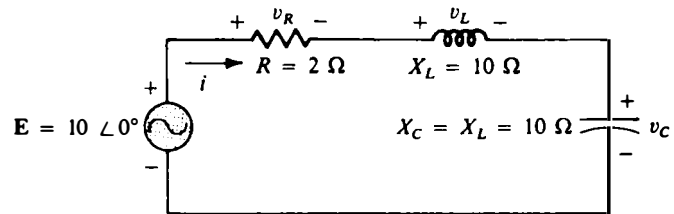


FIG. 20.19

*Solution:*

$$Z_{T_s} = R = 2 \Omega$$

$$I = \frac{E}{Z_{T_s}} = \frac{10 \angle 0^\circ}{2 \angle 0^\circ} = 5 \angle 0^\circ$$

$$V_R = E = 10 \angle 0^\circ$$

$$V_L = IX_L = (5 \angle 0^\circ)(10 \angle 90^\circ) = 50 \angle 90^\circ$$

$$V_C = IX_C = (5 \angle 0^\circ)(10 \angle -90^\circ) = 50 \angle -90^\circ$$

$$Q_s = \frac{X_L}{R} = \frac{10}{2} = 5$$

$$LB = f_2 - f_1 = \frac{f_s}{Q_s} = \frac{5000}{5} = 1000 \text{ Hz}$$

$$P_{DP} = \frac{1}{2} P_{\max} = \frac{1}{2} I_{\max}^2 R = \left(\frac{1}{2}\right) (5)^2 (2) = 25,0 \text{ W}$$

**EXEMPLE 20.2** La largeur de bande d'un circuit résonant série est de 400 Hz. Si la fréquence propre du circuit est de 4000 Hz, calculer le facteur de qualité  $Q_s$ . Si  $R = 10 \Omega$ , calculer la valeur de  $X_L$  à la résonance. Calculer enfin l'inductance  $L$  de la bobine et la capacité  $C$  du condensateur du circuit.

*Solution:*

$$LB = \frac{f_s}{Q_s} \quad \text{ou} \quad Q_s = \frac{f_s}{LB} = \frac{4000}{400} = 10$$

$$Q_s = \frac{X_L}{R} \quad \text{ou} \quad X_L = Q_s R = (10)(10) = 100 \Omega$$

$$X_L = 2\pi f_s L \quad \text{ou} \quad L = \frac{X_L}{2\pi f_s} = \frac{100}{(6,28)(4000)} = 3,98 \text{ mH}$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi f_s C}$$

ce qui peut aussi s'écrire ainsi:

$$C = \frac{1}{2\pi f_s X_C} = \frac{1}{(6,28)(4000)(100)} = 0,398 \mu\text{H}$$



**EXEMPLE 20.3** La fréquence propre d'un circuit  $R$ - $L$ - $C$  série est de 12 000 Hz. Si  $R = 5 \Omega$  et que  $X_L$  à la résonance soit de  $300 \Omega$ , calculer la largeur de bande. Quelles sont les fréquences de coupure?

*Solution:*

$$Q_s = \frac{X_L}{R} = \frac{300}{5} = 60$$

$$\text{LB} = \frac{f_s}{Q_s} = \frac{12,000}{60} = 200 \text{ Hz}$$

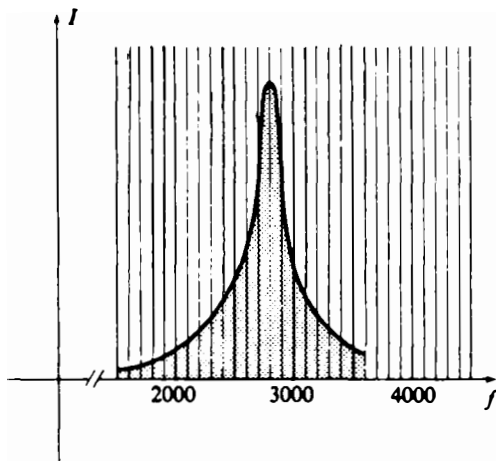
Puisque  $Q_s \geq 10$ , la fréquence propre  $f_s$  est située au centre de la bande passante. On a par conséquent:

$$f_2 = f_s + \frac{\text{LB}}{2} = 12\,000 + 100 = 12\,100 \text{ Hz}$$

$$f_1 = 12\,000 - 100 = 11\,900 \text{ Hz}$$

**EXEMPLE 20.4**

- Calculer le facteur de qualité  $Q_s$  et la largeur de bande du circuit dont la courbe de sélectivité est illustrée à la figure 20.20.
- Si  $C = 0,1 \mu\text{F}$ , calculer  $L$  et  $R$  de ce circuit résonant série.



**FIG. 20.20**

*Solution:*

- La fréquence propre est de 2800 Hz. La largeur de bande calculée entre les points où le courant est égal à 0,707 fois sa valeur de crête est de 200 Hz:

$$Q_s = \frac{f_s}{\text{LB}} = \frac{2800}{200} = 14$$

$$\text{b. } f_s = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Alors:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{4\pi^2 f_s^2 C} \\ &= \frac{1}{4(\pi)^2 (2,8 \times 10^3)^2 (0,1 \times 10^{-6})} \\ &= \frac{1}{30,951} = 32,31 \text{ mH} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_s = \frac{X_L}{R} \quad \text{ou} \quad R &= \frac{X_L}{Q_s} = \frac{(17,58 \times 10^3)(32,31 \times 10^{-3})}{14} \\ &= 40,572 \Omega \end{aligned}$$

## 20.8 ABAQUE DE RÉACTANCE

L'abaque de réactance illustré à la figure 20.21 est extrêmement utile pour l'analyse et la conception de circuits résonants série ou parallèles. La réactance (exprimée en ohms) de la bobine ou du condensateur est représentée par l'axe vertical



gauche, alors que les valeurs des deux éléments sont indiquées sur les autres axes. La fréquence de la source ou la fréquence à déterminer apparaît sur l'échelle horizontale inférieure. Quelques exemples permettront de mieux comprendre comment utiliser cet abaque.

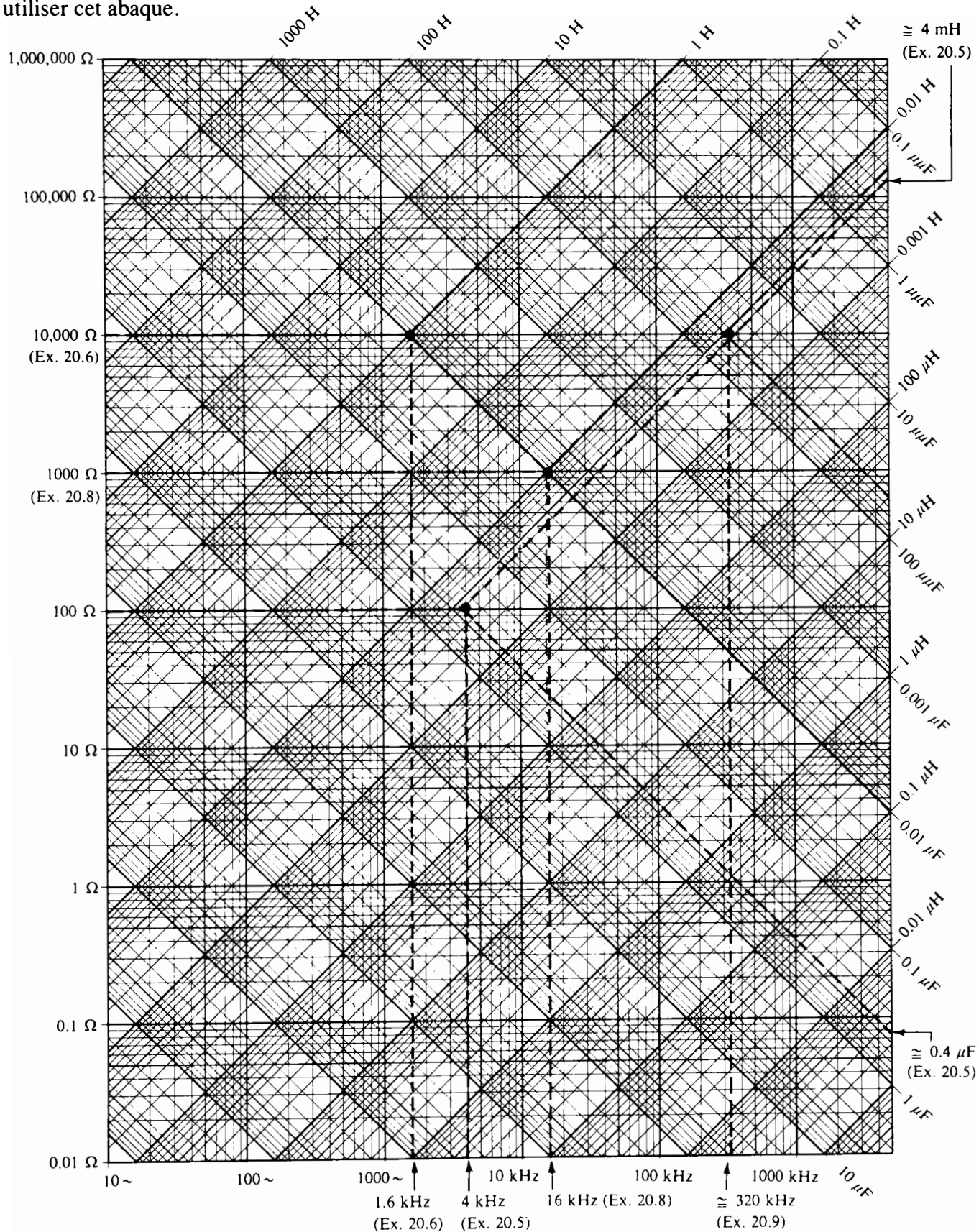


FIG. 20.21





**EXEMPLE 20.5** Résoudre le problème posé à l'exemple 20.2 à l'aide de l'abaque de réactance.

*Solution:* Nous avons comme auparavant  $Q_s = 10$  et  $X_L = 100 \Omega$ . Trouvons le point dont les coordonnées sont de  $100 \Omega$  (échelle verticale gauche) et de  $4000 \text{ Hz}$  (échelle horizontale inférieure), puis suivons la diagonale qui passe par ce point et qui se rend au coin supérieur droit. L'intersection de cette diagonale avec l'échelle verticale droite donne l'inductance, qui est bel et bien de  $4 \text{ mH}$ , comme nous l'avons calculé auparavant. Les chemins imaginaires à suivre sont illustrés à la figure 20.21. Pour déterminer la capacité, il nous faut suivre la diagonale qui passe par le point ci-dessus et qui se dirige vers le coin inférieur droit; la valeur ainsi obtenue est de  $0,4 \mu\text{F}$ .

**EXEMPLE 20.6** Si  $L = 1 \text{ H}$  et que  $C = 0,01 \mu\text{F}$ , trouver la fréquence propre d'un circuit série ainsi que ses réactances inductive et capacitive.

*Solution:* La valeur de  $1 \text{ H}$  apparaît sur l'échelle horizontale supérieure et la valeur de  $0,01 \mu\text{F}$ , au bas de l'échelle verticale droite. Le point possédant ces coordonnées est illustré à la figure 20.21. Abaissons une verticale sur l'axe des fréquences à partir de ce point; la fréquence propre ainsi déterminée est environ de  $1600 \text{ Hz}$ . Comme on l'observe l'imprécision de cette dernière échelle constitue certainement un facteur limitatif quant à l'emploi de l'abaque. La réactance de chacun des éléments se détermine par le tracé d'une ligne horizontale jusqu'à l'échelle verticale gauche. La valeur ainsi obtenue est  $X_L = 10\,000 \Omega$ .

## RÉSONANCE PARALLÈLE

### 20.9 CIRCUIT RÉSONANT PARALLÈLE

La figure 20.22 représente le circuit résonnant parallèle de base. Ce circuit est souvent appelé *circuit bouchon*, car il bloque une gamme de fréquences. Un transfert d'énergie semblable à celui se produisant dans le circuit résonnant parallèle. Dans le cas idéal (aucune perte par rayonnement), le condensateur absorbe autant d'énergie pendant un demi-cycle des courbes de puissance que n'en restitue au circuit la bobine. Au cours de l'autre demi-cycle des courbes de puissance, c'est la bobine qui absorbe autant d'énergie que le condensateur n'en restitue. La puissance réactive totale à la résonance est donc nulle et le facteur de puissance total est égal à un.

Les circuits bouchons étant fréquemment utilisés avec des dispositifs tels que le transistor, qui est essentiellement un

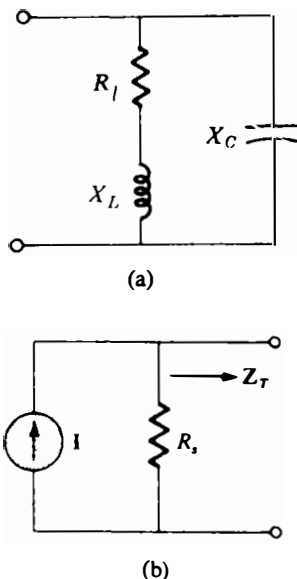


FIG. 20.22



dispositif à source de courant fixe, nous utiliserons, comme l'illustre la figure 20.22, une source de courant pour alimenter les circuits résonants parallèles dans l'analyse qui suit.

Nous avons établi à la section 15.8 que toute combinaison série d'une résistance et d'un élément réactif possède un circuit parallèle équivalent. Nous reconstituons ci-dessous le circuit parallèle équivalent (figure 20.23) de la branche  $R$ - $L$  à la figure 20.22 en suivant la méthode exposée à la section 15.8.

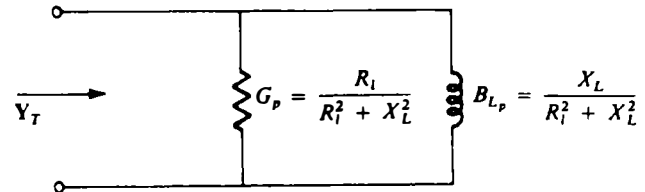


FIG. 20.23

$$Z_{R-L} = R_l + jX_L \quad Y_{R-L} = \frac{1}{Z_{R-L}} = \frac{1}{R_l + jX_L}$$

$$Y_{R-L} = \frac{R_l}{R_l^2 + X_L^2} - j \frac{X_L}{R_l^2 + X_L^2}$$

En remplaçant la branche  $R$ - $L$  série à la figure 20.22 par le montage parallèle ci-dessus, nous obtenons le circuit illustré à la figure 20.23.

À la résonance, on a:

$$X_{Lp} = X_C$$

Par substitution dans cette dernière équation des relations ci-dessus, on obtient:

$$\frac{R_l^2 + X_L^2}{X_L} = X_C$$

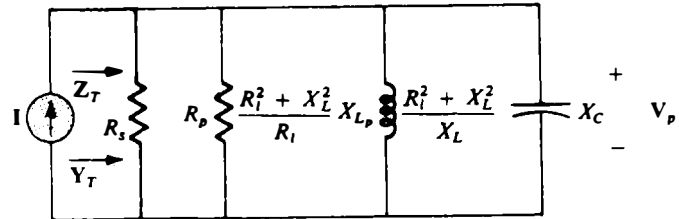


FIG. 20.24

de sorte que:

$$X_C X_L = R_l^2 + X_L^2 \quad \text{ou} \quad X_L^2 = X_C X_L - R_l^2$$

Et puisque:

$$X_C X_L = \frac{1}{\omega C} \omega L = \frac{L}{C}$$

on a:

$$X_L^2 = \frac{L}{C} - R_l^2 \quad \text{ou} \quad X_L = \sqrt{\frac{L}{C} - R_l^2}$$

de sorte que:

$$\begin{aligned} f_p &= \frac{1}{2\pi L} \sqrt{\frac{L}{C} - R_l^2} = \frac{1}{2\pi L} \sqrt{\frac{1 - R_l^2(C/L)}{C/L}} \\ &= \frac{1}{2\pi L \sqrt{C/L}} \sqrt{1 - \frac{R_l^2 C}{L}} \end{aligned}$$

et:

$$\boxed{f_p = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R_l^2 C}{L}}} \quad (20.22)$$



ou:

$$f_p = f_s \sqrt{1 - R_l^2 \frac{C}{L}} \quad (20.23)$$

dans laquelle  $f_p$  est la fréquence propre du circuit résonant parallèle et  $f_s$ , la fréquence propre d'un circuit résonant série constitué des mêmes éléments réactifs. Notons que contrairement au cas du circuit résonant série la fréquence propre d'un circuit résonant parallèle dépend de la résistance  $R_l$ . Notons, toutefois, l'absence de tout terme  $R_s$  dans les équations (20.22) et (20.23).

## 20.10 COURBE DE SÉLECTIVITÉ DU CIRCUIT RÉSONANT PARALLÈLE

La courbe de la grandeur de l'impédance  $Z_T$  en fonction de la fréquence illustrée à la figure 20.24 est semblable à l'inverse de la courbe que nous avons obtenue pour le circuit résonant série (figure 20.25). L'impédance  $Z_T$  est l'impédance totale du circuit résonant parallèle, comme l'illustre la figure 20.24.

La valeur de  $Z_{T_p}$  (impédance totale à la résonance) peut se déterminer par la somme des admittances des branches parallèles et par l'application de la condition de résonance  $X_{L_p} = X_C$ . Dans le cas du condensateur, l'admittance totale est:

$$Y_C = B_C = \frac{1}{X_C} \angle 90^\circ = 0 + j \frac{1}{X_C}$$

et dans la branche inductive, elle est:

$$Y_{L_p} = B_{L_p} = \frac{1}{X_{L_p}} \angle -90^\circ = 0 - j \frac{1}{X_{L_p}}$$

L'admittance totale est donc:

$$Y_T = G_s + G_p + B_{L_p} + B_C$$

$$Y_T = \frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_p} - j \frac{1}{X_{L_p}} + j \frac{1}{X_C}$$

À la résonance,  $X_{L_p} = X_C$  et:

$$Y_{T_p} = \frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_p}$$

de sorte que:

$$Z_{T_p} = \frac{1}{Y_{T_p}} = \boxed{R_s \parallel R_p} \quad (20.24)$$

comme l'indique la figure 20.24, lorsque les éléments réactifs sont supprimés.

L'impédance à la résonance est par conséquent résistive et maximale. Nous pouvons la déterminer en termes des éléments réactifs si nous exploitons le fait qu'à la résonance:

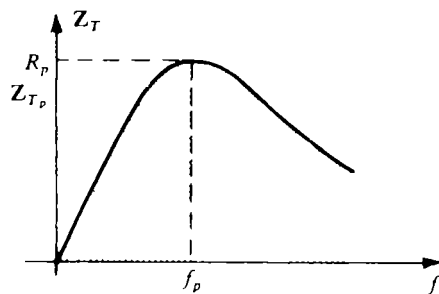


FIG. 20.25  $Z_T$  en fonction de  $f$  dans le circuit résonant parallèle.



$$\frac{X_L}{R_l^2 + X_L^2} = \frac{1}{X_C}$$

ou:

$$R_l^2 + X_L^2 = X_L X_C$$

Par substitution dans la relation:

$$R_p = \frac{R_l^2 + X_L^2}{R_l}$$

nous avons:

$$R_p = \frac{X_L X_C}{R_l}$$

ou encore:

$$R_p = \frac{(\omega L) \left( \frac{1}{\omega C} \right)}{R_l}$$

$$R_p = \frac{L}{R_l C}$$

de sorte que:

$$Z_{T_p} = R_s \parallel R_p = \boxed{R_s \parallel \frac{L}{R_l C}} \quad (20.25)$$

Le courant  $I$  étant constant (il est débité par une source de courant) pour toute valeur de  $Z_T$ , la tension aux bornes du circuit parallèle a la même allure que celle de l'impédance totale  $Z_T$ , ainsi que l'illustre la figure 20.26.

On suppose habituellement que la courbe de sélectivité d'un tel circuit parallèle soit celle de la tension  $V_C$  présente aux bornes du condensateur, pour des raisons que nous l'élaborerons pas dans le présent manuel (c'est que souvent le condensateur sert d'entrée à un autre étage d'un réseau).

Puisque c'est la même tension qui est présente aux bornes des éléments en parallèle, on peut écrire:

$$\boxed{V_C = V_p = I Z_T} \quad (20.26)$$

La valeur de  $V_C$  à la résonance est par conséquent déterminée par la valeur de  $Z_{T_p}$  et par l'intensité du courant  $I$  débité par la source.

Pour le circuit résonant série, nous avons défini  $Q = Q_{\text{bobine}} = X_L/R_l$ . Le  $Q$  d'une bobine peut avoir un effet marqué sur les équations d'un circuit résonant parallèle. Gardons donc le symbole  $Q$  pour représenter le rapport ci-dessus et voyons à nouveau ce que sont la résistance  $R_p$  et l'inductance  $X_{L_p}$  équivalentes dans un circuit parallèle.

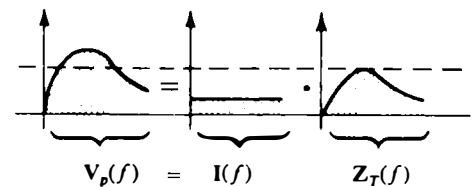


FIG. 20.26


 $R_p:$ 

$$R_p = \frac{R_l^2 + X_L^2}{R_l} = R_l + \frac{X_L^2}{R_l} \frac{(R_l)}{(R_l)}$$

$$\boxed{R_p = R_l + Q^2 R_l} \quad (20.27)$$

 $X_{L_p}:$ 

$$X_{L_p} = \frac{R_l^2 + X_L^2}{X_L} = \frac{R_l^2(X_L)}{X_L(X_L)} + X_L$$

$$\boxed{X_{L_p} = \frac{X_L}{Q^2} + X_L} \quad (20.28)$$

Si  $Q \geq 10$ :

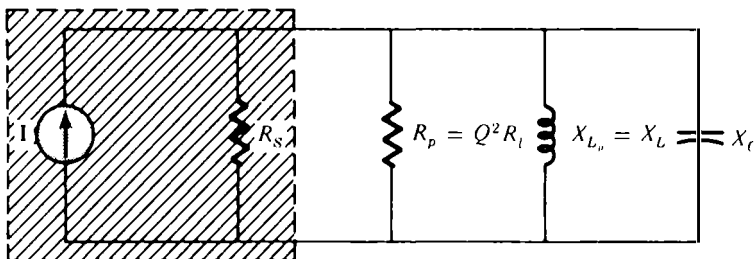
$$Q^2 R \gg R \quad \text{et} \quad X_L \gg \frac{X_L}{Q^2}$$

de sorte que:

$$\boxed{R_p \cong Q^2 R_l} \quad (20.29)$$

$$\boxed{X_{L_p} \cong X_L} \quad (20.30)$$

Ces relations permettent d'obtenir le circuit approximatif nettement plus transparent et plus utile illustré à la figure 20.27.



**FIG. 20.27** Circuit équivalent approximatif quand  $Q \geq 10$ .

Il est maintenant manifeste que si  $Q \geq 10$  la condition de résonance est:

$$\boxed{X_L = X_C} \quad (Q \geq 10) \quad (20.31)$$

ce qui nous permet d'écrire, par analogie avec le circuit résonant série:

$$\boxed{f_p = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}} \quad (Q \geq 10) \quad (20.32)$$

Le facteur de qualité du circuit résonant parallèle est déterminé par le rapport de la puissance réactive à la puissance réelle, c'est-à-dire:

$$Q_p = \frac{V_p^2 / X_{L_p}}{V_p^2 / R}$$



où  $R = R_s \parallel R_p$  et où  $V_p$  est la tension aux bornes des branches parallèles. Il vient donc comme résultat:

$$Q_p = \frac{R}{X_{L_p}} \quad (20.33)$$

ou encore:

$$Q_p = \frac{R}{X_C} \quad (20.34)$$

puisque  $X_{L_p} = X_C$  à la résonance. Si  $Q \geq 10$ :

$$Q_p = \frac{R}{X_L} = \frac{R}{\omega_p L} \quad (20.35)$$

et:

$$Q_p = \frac{R}{X_C} = \omega_p C R \quad (20.36)$$

On peut par ailleurs ne pas tenir compte de  $R_s$  si elle est suffisamment grande:

$$R = R_s \parallel R_p = R_p$$

et par suite:

$$Q_p = \frac{R_p}{X_{L_p}} = \frac{(R_i^2 + X_L^2)/R_i}{(R_i^2 + X_L^2)/X_L}$$

de sorte que:

$$Q_p = \frac{X_L}{R_i} = Q \quad R_s = \infty \Omega \quad (20.37)$$

La largeur de bande du circuit résonant parallèle est liée à la fréquence propre du circuit et au facteur de qualité  $Q_p$  par une relation semblable à celle que nous avons obtenue pour le circuit résonant série, c'est-à-dire:

$$LB = f_2 - f_1 = \frac{f_p}{Q_p} \quad (20.38)$$

Les effets de  $R_i$ ,  $L$  et  $C$  sur l'allure de la courbe de  $Z_p$  d'un circuit résonant parallèle sont illustrées à la figure 20.28. Ils sont semblables aux effets produits dans le cas d'un circuit résonant série. La figure 20.28 représente également le schéma fréquemment utilisé du circuit résonant parallèle, peu importe que la résistance  $R_i$  de ce dernier soit nulle ou non.

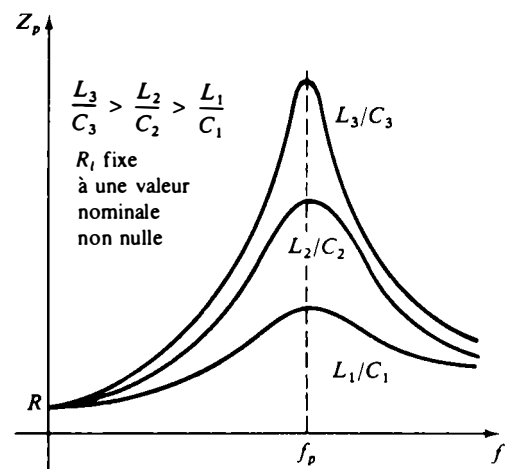
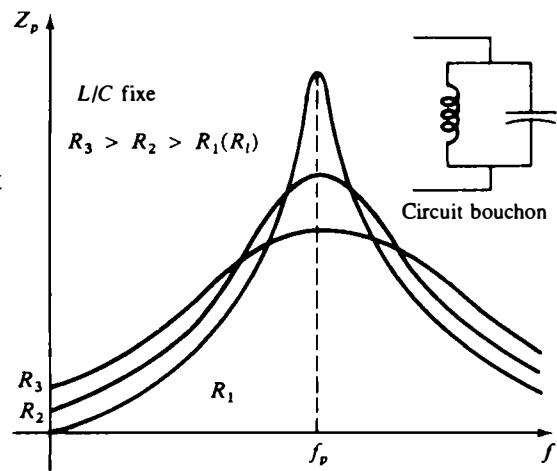
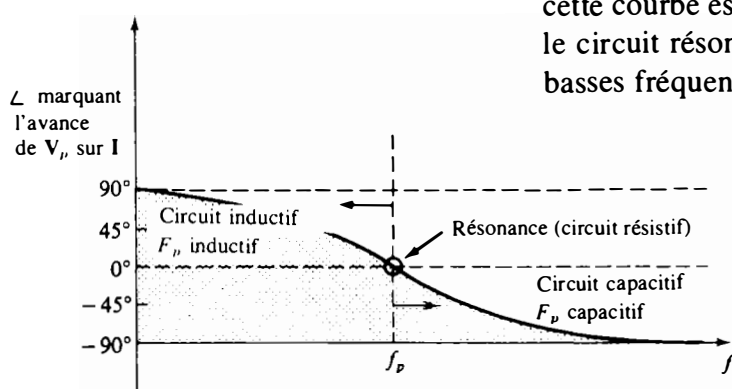


FIG. 20.28 Effet de  $L$ ,  $C$  et  $R_i$  sur la courbe de résonance parallèle.



À la résonance, comme  $Z_{Tp} = L/R_l C$ , l'augmentation de  $R_l$  ou la diminution du rapport  $L/C$  se traduit par une diminution de l'impédance et par une augmentation correspondante de l'intensité du courant. La largeur de bande des courbes de résonance est donnée par l'équation (20.34). Si  $R_l$  augmente ou que  $L$  diminue (ce qui revient à dire que  $L/C$  diminue si  $C$  est constante), la largeur de bande augmente comme l'illustre la figure 20.28.

Aux basses fréquences, la réactance capacitive est relativement élevée et la réactance inductive est basse. Puisque les éléments sont en parallèle, l'impédance totale aux basses fréquences est inductive. Aux hautes fréquences, c'est l'inverse qui est vrai et le circuit est capacitif. À la résonance, le circuit apparaît être résistif. Graphiquement, ces énoncés se traduisent pas la courbe de phase illustrée à la figure 20.29. Notons que cette courbe est l'inverse de celle que nous avons obtenue pour le circuit résonant série, puisque ce dernier était capacitif aux basses fréquences et inductif aux hautes fréquences.



**FIG. 20.29** Courbe de phase pour le circuit résonant parallèle.

Les équations (20.31) et (20.32) ont été obtenues à partir de l'hypothèse  $Q \geq 10$ . En cherchant à exprimer l'impédance totale à la résonance, nous obtenons:

$$Z_{Tp} = R_s \parallel R_p$$

ou encore:

$$Z_{Tp} = R_s \parallel \frac{R_l^2 + X_L^2}{R_l} = R_s \parallel (R_l + Q^2 R_l)$$

Si  $Q \geq 10$ , on a:

$$\boxed{Z_{Tp} = R_s \parallel Q^2 R_l} \quad Q \geq 10 \quad (20.39)$$

condition qui s'applique au circuit illustré à la figure 20.27.

La fréquence propre d'un circuit résonant parallèle peut être déterminée en fonction de  $Q = X_L/R_l$  à la condition de manipuler de la façon qui suit le facteur apparaissant dans la racine carrée:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{R_l^2 C}{L} &= 1 - \frac{R_l^2 \omega C}{\omega L} = 1 - \frac{R_l^2}{X_L X_C} = 1 - \frac{R_l^2}{R_l^2 + X_L^2} \\ &= \frac{R_l^2 + X_L^2 - R_l^2}{R_l^2 + X_L^2} = \frac{X_L^2}{R_l^2 + X_L^2} \end{aligned}$$



mais comme:

$$X_L = Q R_l \quad \text{et} \quad \frac{X_L^2}{R_l^2 + X_L^2} = \frac{Q^2 R_l^2}{R_l^2 + Q^2 R_l^2} = \frac{Q^2}{1 + Q^2}$$

l'équation (20.22) devient:

$$f_p = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{Q^2}{1 + Q^2}} \quad (\text{pour un } Q \text{ quelconque}) \quad (20.40)$$

Si  $Q \geq 10$ ,  $1 + Q^2 \cong Q^2$  et  $Q^2/(1 + Q^2) \cong 1$ , ce qui permet d'écrire:

$$f_p = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (Q \geq 10)$$

formule que nous avons établie antérieurement.

On se rappellera que pour le circuit résonant série on avait  $V_L = V_C = QE$  à la résonance. Un examen attentif du circuit à la figure 20.30 permet d'obtenir un résultat semblable pour le circuit résonant parallèle. Le courant  $I_T$  entrant dans ce circuit n'est pas débité par la source de courant (en raison de  $R_s$ ); il s'agit plutôt du courant entrant dans le circuit bouchon. Bien sûr, si, comme il se produit souvent, la condition  $R_s = \infty \Omega$  (circuit ouvert) est réalisée, le courant  $I_T$  est égal au courant  $I$  de la source.

À la résonance,  $Z_{T_p} = Q^2 R_l$ , comme nous l'avons établi antérieurement, et la loi d'Ohm permet d'écrire  $V = I_T Q^2 R_l$ . Le courant  $I_L$  est:

$$I_L = \frac{V}{Z_L} = \frac{I_T Q^2 R_l}{R_l + jX_L}$$

En divisant le numérateur et le dénominateur de cette relation par  $R_l$ , on obtient:

$$I_L = \frac{I_T Q^2}{1 + j \frac{X_L}{R_l}} = \frac{I_T Q^2}{1 + jQ}$$

L'intensité de  $I_L$  est donnée par la relation:

$$I_L = \frac{I_T Q^2}{\sqrt{1 + Q^2}}$$

qui devient si  $Q \geq 10$ :

$$I_L = \frac{I_T Q^2}{Q}$$

et:

$$I_L = Q I_T \quad (20.41)$$

Dans un circuit résonant parallèle, l'intensité du courant qui passe dans la branche inductive est par conséquent  $Q$  fois le courant entrant dans le circuit bouchon (à la résonance seulement). En outre, comme:

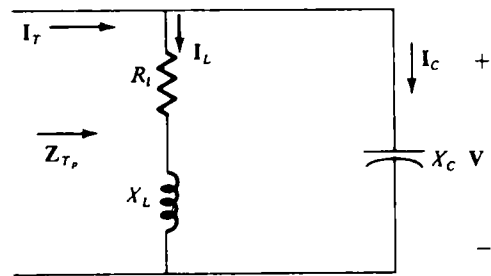


FIG. 20.30





$$I_c = \frac{V}{-jX_C} = \frac{I_T Q^2 R_l}{-jX_C}$$

en divisant par  $R_l$ , nous avons:

$$I_c = \frac{I_T Q^2}{-j \frac{X_C}{R_l}}$$

ce qui donne à la résonance, si  $Q \geq 10$

$$X_L = X_C \quad \text{et} \quad \frac{X_C}{R_l} = \frac{X_L}{R_l} = Q$$

et:

$$I_c = \frac{I_T Q^2}{-jQ}$$

L'intensité de ce courant est:

$$I_c = \frac{I_T Q^2}{Q}$$

et:

$$I_c = Q I_T \quad (\text{à la résonance}) \quad (20.42)$$

## 20.11 TABLEAU RÉCAPITULATIF ET ABAQUE DE RÉACTANCE

Nous avons dressé le tableau 20.1 en y incluant les expressions simplifiées obtenues quand  $Q \geq 10$ .

TABLEAU 20.1

	$Q$ quelconque	$Q \geq 10$	$R_s = \infty \Omega (Q \geq 10)$
Résonance	$\frac{R_l^2 + X_L^2}{X_L} = X_C$	$X_L = X_C$	$X_L = X_C$
$f_p$	$\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \sqrt{1 + \frac{R_l^2 C}{L}}, \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{Q^2}{1 + Q^2}}$	$\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$	$\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$
$Z_{Tp}$	$R_s \parallel \frac{R_l^2 + X_L^2}{R_l}, R_s \parallel \frac{L}{R_l C}$	$R_s \parallel Q^2 R_l$	$Q^2 R_l$
$Q_p$	$\frac{R}{X_{Lp}}, \frac{R}{X_C}$ , ou $\omega_p C R$ ( $R = R_s \parallel R_p$ )	$\frac{R}{\omega_p L}, \omega_p C R$	$Q$
LB	$\frac{f_p}{Q_p}$	$I_L = I_c = Q_p I_T$ $\frac{f_p}{Q_p}$	$I_L = I_c = Q I_T$ $\frac{f_p}{Q}$



Notons par ailleurs qu'il est possible d'utiliser l'abaque de réactance à la figure 20.21 quand  $Q \geq 10$  puisque:

$$X_L = X_C \quad \text{et} \quad f_p = f_s = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

L'exemple 20.8 porte sur l'utilisation de l'abaque.

## 20.12 EXEMPLES (RÉSONANCE PARALLÈLE)

**EXEMPLE 20.7** Voir le réseau illustré à la figure 20.31.

Calculer:

- $Q$ .
- $R_p$ .
- $Z_{Tp}$ .
- $C$  à la résonance.
- $Q_p$ .
- LB.

*Solution:*

$$\begin{aligned} \text{a. } Q &= \frac{X_L}{R_l} = \frac{2\pi f_p L}{R_l} = \frac{(6,28)(0,04 \times 10^6)(10^{-3})}{10} \\ &= \mathbf{25,12} \end{aligned}$$

$$\text{b. } Q \geq 10$$

Alors:

$$R_p = Q^2 R_l = (25,12)^2 10 = \mathbf{6,31 \text{ k}\Omega}$$

$$\text{c. } Z_{Tp} = R_s \parallel R_p = 40 \text{ k}\Omega \parallel 6,31 \text{ k}\Omega = \mathbf{5,45 \text{ k}\Omega}$$

$$\text{d. } Q \geq 10$$

Alors:

$$f_p = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad \text{and}$$

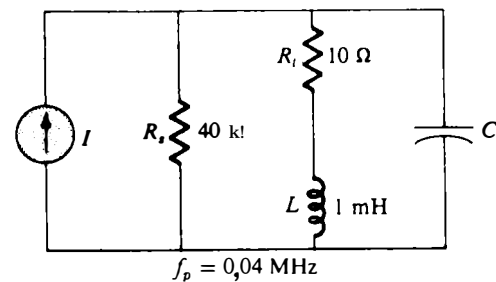
$$C = \frac{1}{L(f2\pi)^2} = \frac{1}{(10^{-3})(0,04 \times 10^6 \cdot 2\pi)^2} = \mathbf{0,0159 \text{ F}}$$

$$\text{e. } Q \geq 10$$

Alors:

$$Q_p = \frac{R}{\omega_p L} = \frac{5,45 \text{ k}\Omega}{(6,28)(0,04 \times 10^6)(10^{-3})} = \mathbf{21,71}$$

$$\text{f. LB} = \frac{f_p}{Q_p} = \frac{0,04 \times 10^6}{21,71} = \mathbf{1,84 \text{ kHz}}$$



**FIG. 20.31**

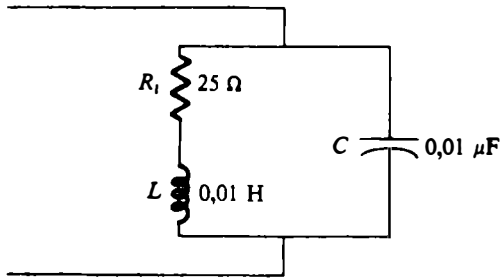


FIG. 20.32

**EXEMPLE 20.8** Voir le réseau illustré à la figure 20.32. En déterminer la fréquence propre et  $X_L$  à l'aide des équations appropriées et de l'abaque à la figure 20.21. Comparer les résultats obtenus par les deux méthodes.

*Solution:* L'abaque de réactance donne  $f_p \cong 16$  kHz et  $X_L = 1000 \Omega$ . Ces données indiquent que  $Q = X_L/R_l = 1000/25 = 40$ , ce qui est suffisamment plus grand que 10 pour que nous puissions supposer que  $X_L = X_C$  et utiliser l'abaque. En d'autres termes, nous obtiendrions les mêmes résultats si nous utilisons le tableau 20.1 qu'en faisant appel à la condition  $X_L = X_C$ . Soulignons qu'il nous faudrait toutefois utiliser les équations du tableau 20.1 et laisser de côté l'abaque si  $Q$  s'approchait de 10.

Les équations du tableau donnent:

$$\begin{aligned} f_p &= \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{6,28} \sqrt{(0,01)(0,01 \times 10^{-6})} \\ &= \frac{1}{6,28\sqrt{10^{-10}}} = \frac{1}{6,28 \times 10^{-5}} \\ &= \frac{10^5}{6,28} = 15\,924 \text{ Hz} = \mathbf{15,924 \text{ kHz}} \end{aligned}$$

et:

$$X_L = 2\pi f_p L = (6,28)(15,924 \times 10^3)(0,01) = \mathbf{1000,03 \Omega}$$

Ces résultats sont certainement comparables en grandeur à ceux qui nous avons obtenus ci-dessus et confirment la validité de l'utilisation de l'abaque.

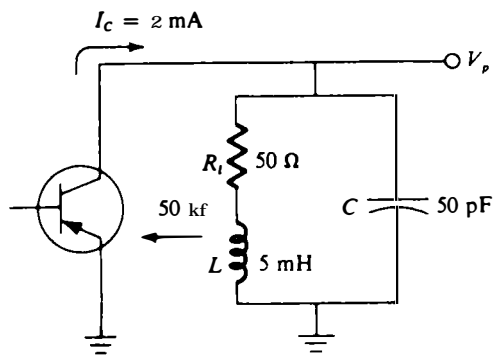


FIG. 20.33

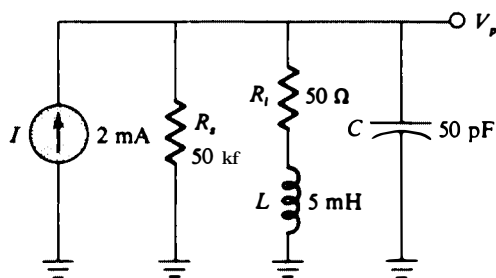


FIG. 20.34

**EXEMPLE 20.9** Le circuit équivalent du montage à transistor à la figure 20.33 est illustré à la figure 20.34. Calculer:

- $f_p$  (à l'aide de l'abaque);
- $Q$ ;
- $Q_p$ ;
- LB;
- $V_p$  à la résonance.
- Tracer la courbe de  $V_C$  en fonction de la fréquence.

*Solution:*

- a. L'abaque donne  $f_p \cong \mathbf{320 \text{ kHz}}$

$$\begin{aligned} \text{b. } Q &= \frac{X_L}{R_l} = \frac{2\pi f_p L}{R_l} = \frac{(6,28)(320 \times 10^3)(5 \times 10^{-3})}{50} \\ &= \frac{10\,048}{50} = \mathbf{200,96} \end{aligned}$$

$$\text{c. } Q_p = \frac{R}{\omega_p L} = \frac{R}{X_L}$$

$$\begin{aligned} R &= R_s \parallel R_p = R_s \parallel Q^2 R_l = 50 \text{ k}\Omega \parallel (200,96)^2 \cdot 50 \\ &= 50 \text{ k}\Omega \parallel 2\,019,2 \text{ k}\Omega = \mathbf{48,79 \text{ k}\Omega} \end{aligned}$$



de sorte que:

$$Q_p = \frac{48,79 \text{ k}\Omega}{10\,048} = 4,86$$

d.  $LB = \frac{f_p}{Q_p} = \frac{320 \times 10^3}{4,86} = 65,84 \text{ kHz}$

e. À la résonance  $Z_{T_p} = R_s \parallel R_p = R = 48,79 \text{ k}\Omega$

et:

$$V_p = IZ_{T_p} = (2 \times 10^{-3})(48,79 \times 10^3) = 97,58 \text{ V}$$

f. Voir la figure 20.35.

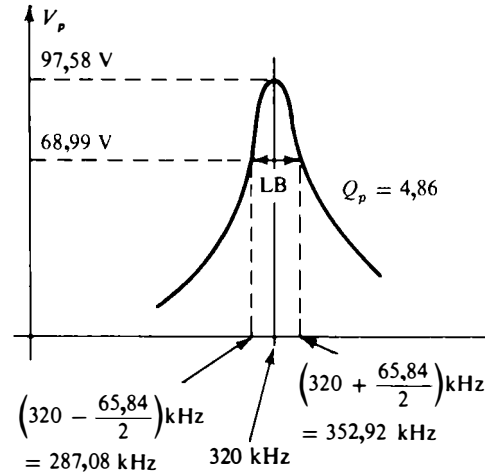


FIG. 20.35

**EXEMPLE 20.10** Dessiner un circuit résonant parallèle comprenant une bobine de 1 mH et 10 Ω ainsi qu'une résistance  $R_s = 40 \text{ k}\Omega$  et dont la courbe de réponse est celle illustrée à la figure 20.36.

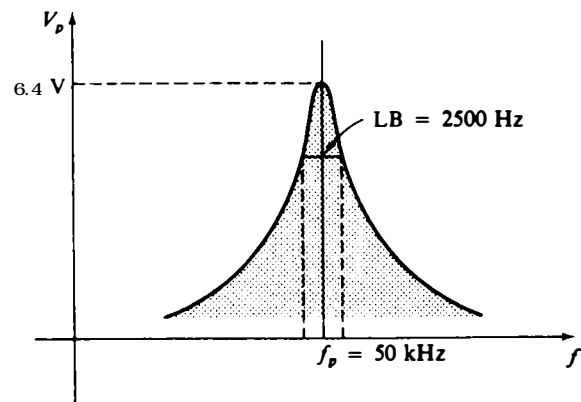


FIG. 20.36

Solution:

$$LB = \frac{f_p}{Q_p}$$

Par suite:

$$Q_p = \frac{f_p}{LB} = \frac{50\,000}{2500} = 20$$

$$X_L = 2\pi f_p L = (6,28)(50 \times 10^3)(10^{-3}) = 314,0 \Omega$$

et:

$$Q = \frac{X_L}{R_l} = \frac{314}{10} = 31,4$$

$$R_p = Q^2 R_l = (31,4)^2 10 = 9859,60 \Omega$$

$$Q_p = \frac{R}{X_L} = \frac{R_s \parallel 9859,60}{314} = 20$$

$$\frac{(R_s)(9859,6)}{R_s + 9859,6} = 6280$$

$$9859,60 R_s = 6280 R_s + 61,92 \times 10^6$$

ou:

$$3579,6 R_s = 61,92 \times 10^6$$

$$R_s = 17,298 \text{ k}\Omega$$



La résistance de la source doit toutefois être de  $40\text{ k}\Omega$ . Nous devons donc lui ajouter en parallèle une résistance de façon à faire chuter la résistance totale du montage parallèle à  $17,298\text{ k}\Omega$ . Traduite mathématiquement, cette condition s'écrit:

$$\frac{(40\text{ k}\Omega)(R')}{40\text{ k}\Omega + R'} = 17,298\text{ k}\Omega$$

et:

$$(40\text{ k}\Omega)(R') = (17,298\text{ k}\Omega)(R') + 691,92 \times 10^6$$

ou encore:

$$22,70R' = 691,92 \times 10^3$$

de sorte que:

$$R' = 30,481\text{ k}\Omega$$

À la résonance,  $X_L = X_C$  et:

$$X_C = \frac{1}{\omega_p C}$$

ou:

$$314 = \frac{1}{(6,28)(50 \times 10^3)(C)} = \frac{1}{314 \times 10^3 C}$$

ce qui donne:

$$C = \frac{1}{(314 \times 10^3)(314)} = \frac{10^{-6}}{98,596}$$

et, enfin:

$$C \cong 0,01\text{ }\mu\text{F}$$

Le réseau est illustré à la figure 20.37.

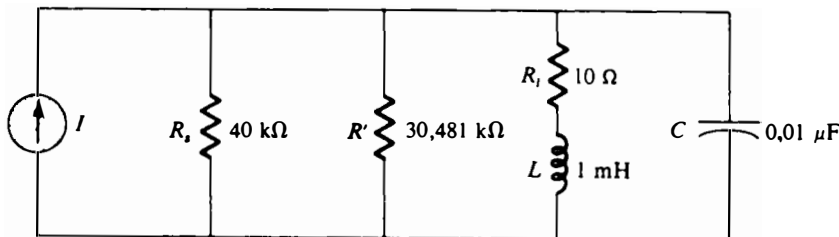


FIG. 20.37

## 20.13 FILTRES

*Les filtres sont des réseaux conçus soit pour bloquer soit pour laisser passer une bande précise de fréquences. Une étude approfondie des filtres nécessiterait un chapitre au complet. Dans la présente section, nous ne ferons qu'introduire le sujet par le biais du filtre passe-bande, du filtre coupe-bande et du filtre à double accord. Les noms des filtres indiquent bien à quoi ils servent.*



Le filtre passe-bande élémentaire est habituellement monté de l'une des façons illustrées à la figure 20.38. Son rôle est de garantir que la tension  $V_C$  soit maximale pour certaines fréquences de la tension  $E$  de la source.

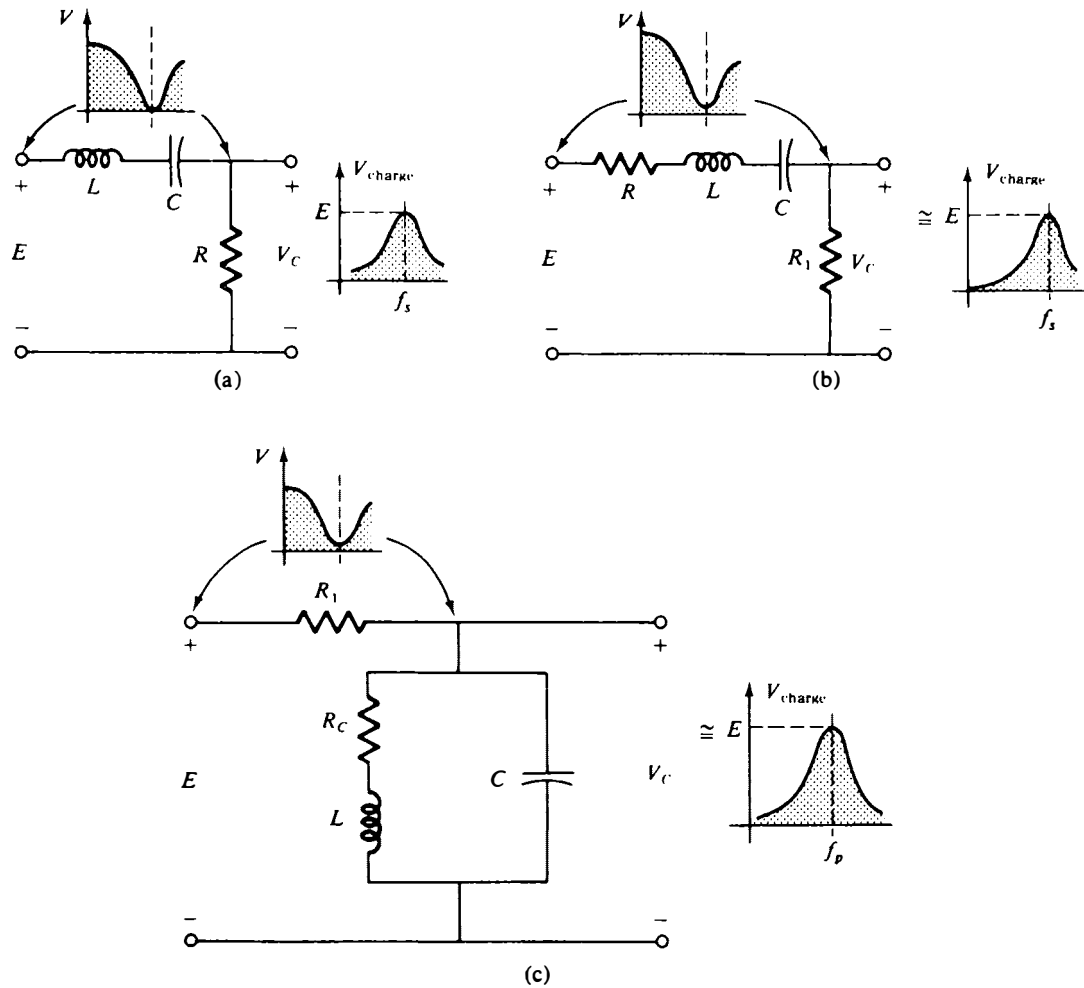


FIG. 20.38

Dans le montage à la figure 20.38a, nous supposons que la résistance de la charge raccordée aux bornes du montage est beaucoup plus grande que la résistance de ce dernier, c'est-à-dire que  $R_C \gg R$ . On pourra ainsi utiliser l'approximation  $R_C \parallel R \cong R$ . Le facteur  $Q_s$  du réseau est alors:

$$Q_s = \frac{X_L}{R} \tag{20.43}$$

La règle du diviseur de tension donne:

$$V_C = \frac{RE}{R + j(X_L + X_C)}$$

À la résonance  $X_L = X_C$ , de sorte que:

$$V_C = \frac{RE}{R} = E$$



Aux fréquences inférieures et supérieures à la fréquence propre, l'impédance du montage  $L$ - $C$  augmente et devient supérieure à  $R$ , ce qui fait chuter la tension aux bornes de  $R$ . La courbe de réponse résultante est illustrée à la figure 20.38a. Dans le cas où  $R_C$  n'est pas suffisamment plus grande que  $R$ , il faut remplacer  $R$  dans les équations ci-dessus par  $R \parallel R_C$ .

Dans le réseau à la figure 20.38b,  $R_1$  est de nombreuses fois plus grande que la résistance  $R$  du circuit résonant série, et  $R_C \gg R_1$ . On a donc à la résonance:

$$V_C = \frac{R_1 E}{R_1 + R + j(X_L - X_C)}$$

ou encore:

$$V_C = \frac{R_1 E}{R_1 + R} \cong \frac{R_1 E}{R_1} \quad (\text{puisque } R_1 \gg R) \\ = E$$

de sorte que:

$$Q_{s(\text{sans charge})} = \frac{X_L}{R + R_1} \quad (20.44)$$

Si la condition  $R_C \gg R_1$  n'est pas vérifiée, on a:

$$Q_{s(\text{avec charge})} = \frac{X_L}{R + R_1 \parallel R_C} \quad (20.45)$$

Le montage de la figure 20.38c est un circuit résonant parallèle. Dans ce montage,  $V_C = E$  à la résonance en raison de la haute impédance du montage comparativement à  $R_1$ . Aux fréquences inférieures et supérieures, l'impédance du circuit résonant parallèle est de beaucoup inférieure à  $R_1$ . Les courbes de réponse obtenues pour ce circuit sont illustrées à la figure 20.38c.

Si  $R_C \gg Q^2 R_1$  (et  $Q \geq 10$ ) comme pour le circuit à la figure 20.39, on a:

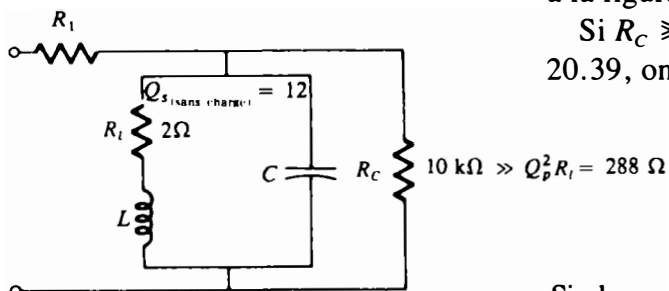


FIG. 20.39

$$Q_{p(\text{avec charge})} = Q = \frac{X_L}{R_1} \quad (20.46)$$

Si la condition  $R_C \gg Q^2 R_1$  n'est pas vérifiée (mais que  $Q \geq 10$ ), on peut écrire:

$$Q_{p(\text{avec charge})} = \frac{R_p}{X_{Lp}}$$

et:

$$Q_{p(\text{avec charge})} = \frac{R_C \parallel Q^2 R_1}{X_L} \quad (20.47)$$



La résistance  $R_1$  n'influe pas sur la valeur du facteur de qualité, puisque dans le voisinage de la fréquence propre elle est de beaucoup inférieure à l'impédance du circuit bouchon; on peut donc ne pas en tenir compte.

**EXEMPLE 20.11** Tracer la courbe de réponse de  $V_C$  du filtre passe-bande illustré à la figure 20.40.

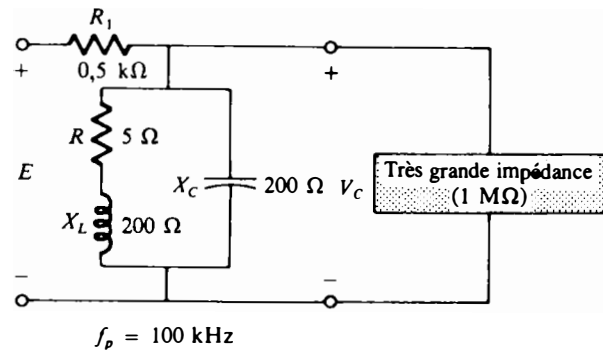


FIG. 20.40

Solution:

$$Q = \frac{200}{5} = 40 = Q_p \quad (\text{puisque } R_s \cong \infty \Omega)$$

Comme:

$$Q = 40 \geq 10$$

on a:

$$Z_{T_p} = Q^2 R = (40)^2 5 = 8 \text{ k}\Omega$$

et:

$$V_C = \frac{(8 \text{ k}\Omega)E}{8 \text{ k}\Omega + 0,5 \text{ k}\Omega} = 0,94E \quad (\text{à la résonance})$$

$$LB = \frac{f_p}{Q_p} = \frac{100\,000}{40} = 2500 \text{ Hz}$$

Par conséquent:

$$f_1 = 100 \text{ kHz} - 1,25 \text{ kHz} = 98,75 \text{ kHz}$$

$$f_2 = 100 \text{ kHz} + 1,25 \text{ kHz} = 101,25 \text{ kHz}$$

Aux fréquences à demi-puissance on a:

$$Z_{T_{DP}} = 0,707 Z_{T_p} = 0,707(8 \text{ k}\Omega)$$

$$Z_{T_{DP}} \cong 5,66 \text{ k}\Omega$$

et:

$$V_C = \frac{(5,66 \text{ k}\Omega)E}{5,66 \text{ k}\Omega + 0,5 \text{ k}\Omega} = 0,92E$$

Le tracé  $V_C$  est illustré à la figure 20.41.

À  $f_p = 100 \text{ kHz}$ , on a:

$$X_L = 20 \Omega \quad \text{et} \quad X_C = 2 \text{ k}\Omega$$

de sorte que l'impédance du circuit bouchon est:

$$\begin{aligned} Z_T &= (R + jX_L) \parallel X_C \cong R + jX_L \\ &= 5 + j20 = 20,62 \angle 75,96^\circ \end{aligned}$$

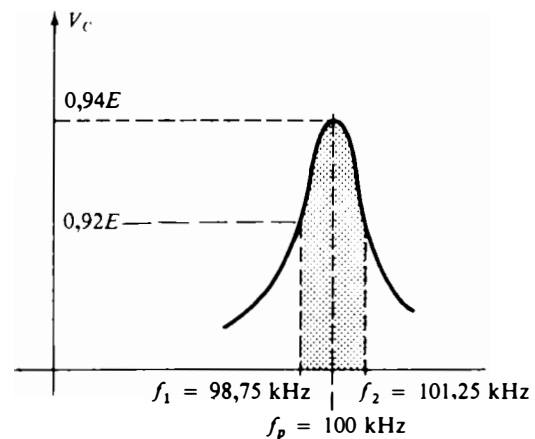


FIG. 20.41





et la grandeur de  $V_C$  est:

$$|V_C| = \frac{Z_T E}{Z_T + R_1} = \frac{(20,62)E}{5 + j20 + 0,5 \text{ k}\Omega} = \frac{20,62E}{505 + j20}$$

$$= \frac{20,62E}{505,4} \cong 0,041E$$

soit 4,1% de  $E$ , alors qu'elle est de 94% et 92% de  $E$  à la fréquence propre et aux fréquences à demi-puissance respectivement.

Pour  $R_C = 50 \text{ k}\Omega$  nous avons:

$$Q_{p(\text{avec charge})} = \frac{R_C \parallel Q_s^2 R}{X_L}$$

$$= \frac{50 \text{ k}\Omega \parallel 8 \text{ k}\Omega}{200} = \frac{6897}{200} = 34,49$$

Le facteur de qualité est de 40 lorsqu'aucune charge n'est raccordée au circuit.

### Filtre coupe-bande

Un examen attentif des courbes illustrées à la figure 20.38 devrait permettre de deviner la façon de monter un filtre coupe-bande. Le circuit à la figure 20.38a, par exemple, présente une réponse relativement élevée aux bornes du montage  $L$ - $C$ , à toutes les fréquences sauf à la fréquence propre. En d'autres termes, toutes les fréquences passent relativement bien, exception faite de la fréquence propre, en ce qui a trait à la tension  $V_{L-C}$ . Ce circuit peut donc servir de filtre coupe-bande, à condition que la tension de sortie soit prélevée aux bornes de la branche  $L$ - $C$ .

La figure 20.42 illustre les éléments des montages à la figure 20.38 aux bornes desquels il faut prélever la tension  $V_C$  de coupe-bande.

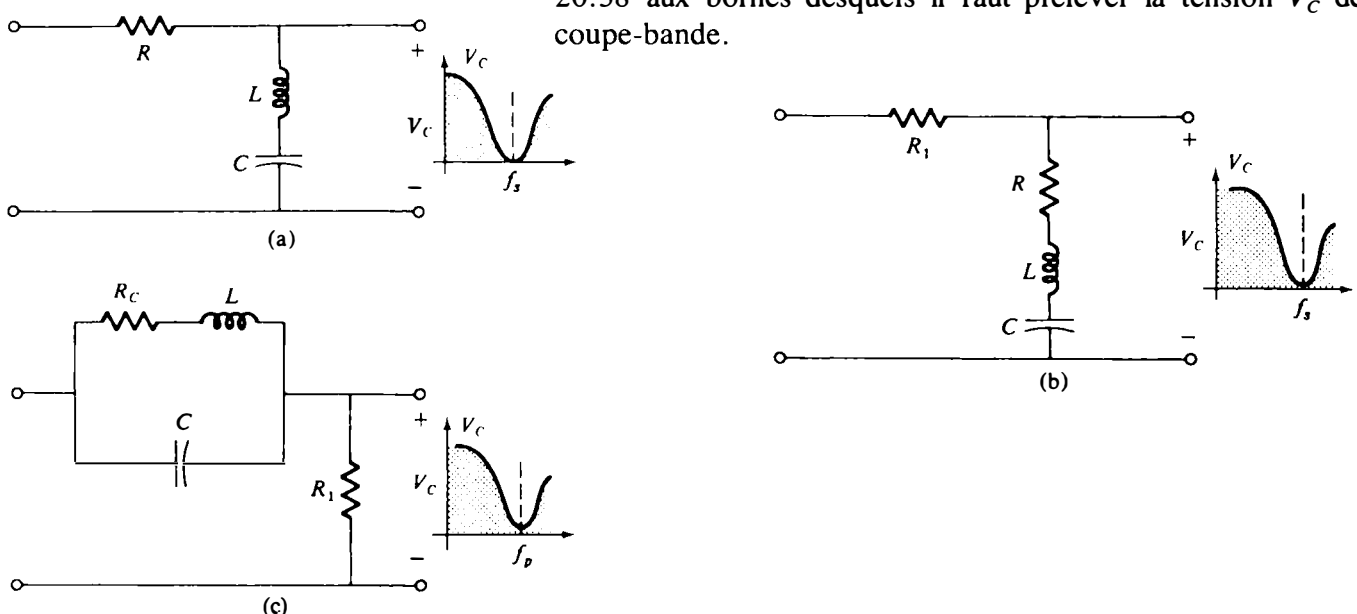


FIG. 20.42



Dans le montage à la figure 20.42a, la résistance  $R_C$  de la charge est en parallèle avec le montage  $L-C$ ; elle n'influe donc pas sur le facteur  $Q_s$  du circuit parce que  $Z_{L-C} = 0 \Omega$  et que, près de la résonance,  $R_C \gg Z_{L-C}$ . On peut donc ne pas tenir compte de l'effet de la résistance de la charge. Par conséquent:

$$Q_{s(\text{avec ou sans charge})} = \frac{X_L}{R} \quad (20.48)$$

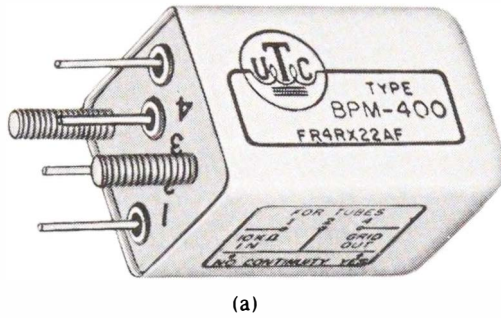
À la résonance, le circuit résonant série ( $R-L-C$ ) illustré à la figure 20.42b a une impédance totale de  $R$ . Pour  $R_C \gg R$  (ce qui est normalement le cas), on peut à nouveau ne pas tenir compte de  $R_C$  pour la détermination de  $Q_s$ . Cependant  $R_1$  est en série avec  $R$ , et on a donc:

$$Q_{s(\text{avec ou sans charge})} = \frac{X_L}{R + R_1} \quad (20.49)$$

Dans le dernier cas, celui du circuit résonant parallèle illustré à la figure 20.42c. Le montage parallèle de  $R_C$  et de  $R_1$  a une impédance inférieure à  $R_1$ , et on peut ne pas tenir compte de celle-ci à la résonance puisqu'elle est en série avec l'impédance élevée du circuit bouchon. Par conséquent,  $R_C$  n'influe normalement pas sur la grandeur du facteur de qualité du circuit résonant. On peut donc écrire:

$$Q_{p(\text{avec ou sans charge})} = Q = \frac{X_L}{R_1} \quad (20.50)$$

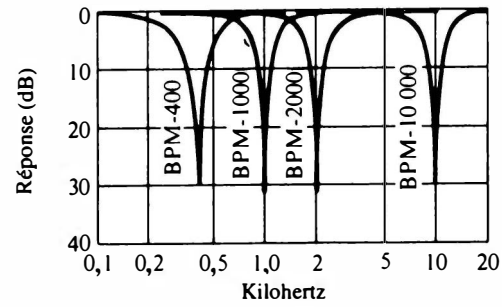
Les caractéristiques de coupe-bande et de passe-bande de filtres miniatures fabriqués par TRW/UTC sont fournies à la figure 20.43, ainsi que la photographie d'un filtre type. Le point de  $-3$  dB de la bande passante correspond au niveau de 0,707 déjà expliqué dans ce chapitre. On remarquera que les caractéristiques de passe-bande sont universelles puisque la fréquence propre n'est pas définie et que l'axe horizontal est gradué sans dimension (rapport de  $f$  sur  $f_r$ ). Dans l'étude de ces courbes, on gardera à l'esprit que l'axe vertical est une mesure de l'atténuation du signal d'entrée. Ainsi, à 0 dB, la sortie est égale à l'entrée mais, à  $-30$  dB, elle est considérablement moindre que l'entrée. Comme ces filtres peuvent servir à la fois de passe-bande et de coupe-bande, ils sont vendus avec des données relatives à ces deux utilisations. On remarquera également que la bande passante pour chacun des filtres est définie par la fréquence centrale; le numéro du filtre indique quelle est cette fréquence centrale. La bande coupée est définie par les fréquences où la réponse est nulle, c'est-à-dire où l'atténuation est de 35 dB. Enfin, soulignons que la fréquence centrale ne se situe pas au centre de la bande coupée, car elle est trop voisine du bas de la courbe de résonance.



Courtoisie de United Transformer Corp.

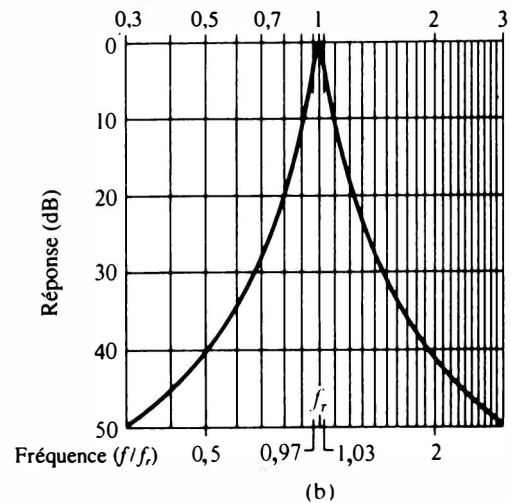
### COUPE-BANDE

Filtres BPM servant à la fois de coupe-bande et de passe-bande



### PASSE BANDE

Réponse typique normalisée des filtres BPM



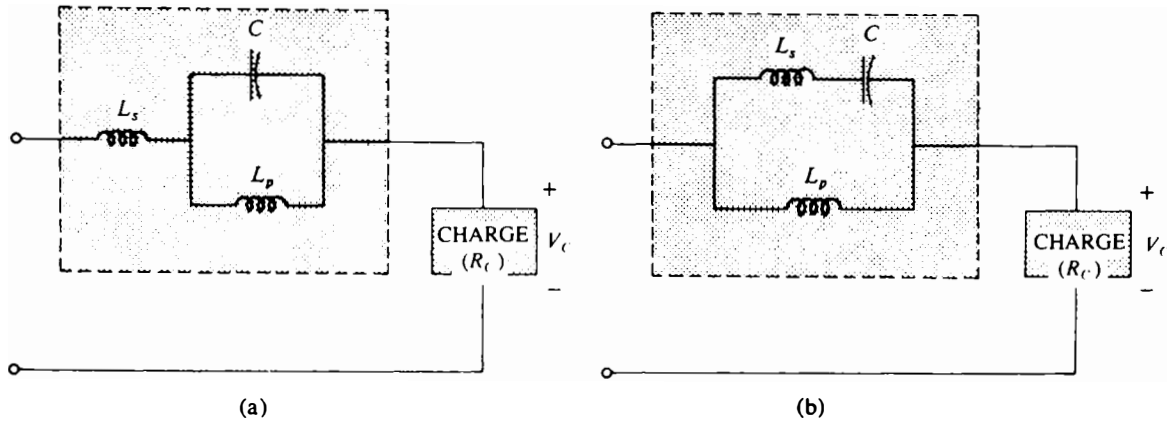
N°	Fréquence centrale (Hz)	Passe-bande (moins de 2 dB) (Hz)	Coupe-bande (plus de 35 dB)	
			Bas (Hz)	Haut (Hz)
BPM 400	400	388-412	200	800
BPM 440	440	427-453	220	880
BPM 500	500	485-515	250	1000
BPM 600	600	582-618	300	1200
BPM 800	800	776-824	400	1600
BPM 1000	1000	970-1030	500	2000
BPM 1200	1200	1164-1236	600	2400
BPM 1500	1500	1455-1545	750	3000
BPM 1600	1600	1552-1648	800	3200
BPM 2000	2000	1940-2060	1000	4000
BPM 2500	2500	2425-2575	1250	5000
BPM 3000	3000	2910-3090	1500	6000
BPM 3200	3200	3104-3296	1600	6400
BPM 4000	4000	3880-4120	2000	8000
BPM 4800	4800	4656-4944	2400	9600
BPM 5000	5000	4850-5150	2500	10000
BPM 6000	6000	5820-6180	3000	12000
BPM 8000	8000	7760-8240	4000	16000
BPM 10000	10000	9700-10300	5000	20000
BPM 20000	20000	19400-20600	10000	40000

FIG. 20.43 Caractéristiques de passe-bande et de coupe-bande des filtres BPM de TRW/UTC.



**Filtre à double accord**

Certains montages comme ceux à la figure 20.44 présentent à la fois les caractéristiques d'un passe-bande et d'un coupe-bande. Dans le circuit à la figure 20.44a, le circuit résonant parallèle agit comme un coupe-bande en résonant à la fréquence qui ne permet pas l'établissement d'une tension  $V_C$ . La majeure partie de la tension appliquée  $E$  apparaît alors aux bornes du circuit résonant parallèle, car l'impédance de ce dernier est très grande comparativement à  $R_C$ .



**FIG. 20.44** *Filtres à double accord.*

Dans le passe-bande, le circuit résonant parallèle est conçu pour être capacitif (et inductif si  $L_s$  est remplacée par  $C_s$ ). L'inductance  $L_s$  est choisie pour annuler les effets de la réactance capacitive résultante à la fréquence propre du circuit bouchon qui agit par conséquent comme un circuit résonant série. La tension appliquée  $E$  apparaît alors aux bornes de  $R_C$  à cette fréquence.

Dans le réseau à la figure 20.44b, le circuit résonant série est encore le facteur déterminant du passe-bande, puisqu'il présente une impédance très faible aux bornes de l'inductance parallèle à la résonance, ce qui permet à la tension  $V_C$  d'atteindre la valeur  $E$ . À la fréquence propre de coupe-bande désirée, le circuit résonant série est capacitif. L'inductance  $L_p$  est choisie pour qu'il y ait résonance parallèle à la fréquence propre de coupe-bande. La haute impédance du circuit résonant parallèle se traduit par l'apparition d'une très faible tension  $V_C$ .

Aux fréquences rejetées inférieures à la bande passante, les réseaux devraient apparaître comme l'illustre la figure 20.44. Pour la situation inverse, l'inductance  $L_s$  à la figure 20.44a et l'inductance  $L_p$  à la figure 20.44b sont remplacées par des condensateurs.

**EXEMPLE 20.12** Voir le réseau illustré à la figure 20.44b. Déterminer  $L_s$  et  $L_p$ , si la capacité du condensateur  $C$  est de 500 pF, pour que le filtre rejette la fréquence de 200 kHz et qu'il laisse passer la fréquence de 600 kHz.

*Solution:* Nous avons pour la résonance série:

$$f_s = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$



et:

$$L_s = \frac{1}{4\pi^2 f_s^2 C} = \frac{1}{4(3,14)^2 (600 \times 10^3)^2 500 \times 10^{-12}}$$

$$= 141 \mu\text{H}$$

À la fréquence 200 kHz, on a:

$$X_L = \omega L = 2\pi f_s L = (6,28)(200 \times 10^3)(141) \times 10^{-6}$$

$$= 177,1 \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{(6,28)(200 \times 10^3)(500) \times 10^{-12}} = 1,59 \text{ k}\Omega$$

et pour les éléments série:

$$j(X_L - X_C) = j(177,1 - 1592) = -j(1414,8) \text{ capacitif}$$

Pour la résonance parallèle (on suppose que  $Q \geq 10$ ), on a:

$$X_L = X_C$$

et:

$$L_p = \frac{X_C}{\omega} = \frac{1412,9}{(6,28)(200 \times 10^3)} = 1,126 \text{ mH}$$

## PROBLÈMES

### Sections 20.1 à 20.8

- Calculez la pulsation propre  $\omega$ , et la fréquence propre  $f_s$  du circuit série dont les caractéristiques sont les suivantes:
  - $R = 10 \Omega$ ,  $L = 1 \text{ H}$ ,  $C = 16 \mu\text{F}$
  - $R = 300 \Omega$ ,  $L = 0,5 \text{ H}$ ,  $C = 0,16 \mu\text{F}$
  - $R = 20 \Omega$ ,  $L = 0,28 \text{ mH}$ ,  $C = 7,46 \mu\text{F}$
- Résolvez le problème 1 à l'aide de l'abaque de réactance.
  - À l'aide de l'abaque, réalisez un montage constitué d'une bobine et d'un condensateur dont la fréquence propre est de 10 kHz. Déterminez la réactance de  $X_L$  et de  $X_C$  à cette fréquence.
  - À l'aide de l'abaque, déterminez les éléments d'un circuit résonant série dont  $X_L = X_C = 2 \text{ k}\Omega$ , dont  $f_s = 100 \text{ kHz}$  et dont  $Q_s = 50$ .
- Voir le circuit série illustré à la figure 20.45.
  - Calculez la valeur de  $X_C$  à la résonance.
  - Calculez en vecteurs de phase le courant  $I$  et les tensions  $V_R$ ,  $V_L$  et  $V_C$  à la résonance.
  - Tracez le diagramme de phase de ces tensions et du courant.
  - Tracez le triangle des puissances du circuit à la résonance.
  - Calculez le facteur de qualité  $Q_s$  du circuit.
- Refaites le problème 3 pour le circuit illustré à la figure 20.46.
- Voir le circuit illustré à la figure 20.47.
  - Calculez la valeur de  $L$  en millihenrys, sachant que la fréquence propre est de 1800 Hz.

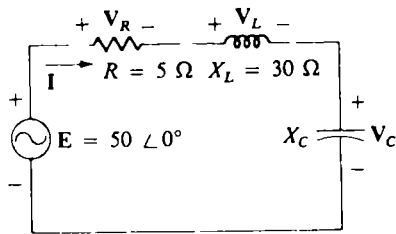


FIG. 20.45

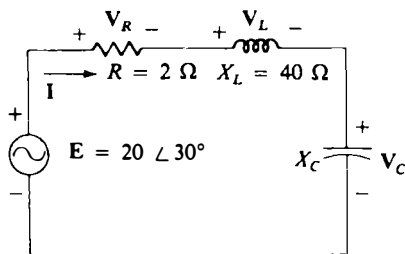


FIG. 20.46

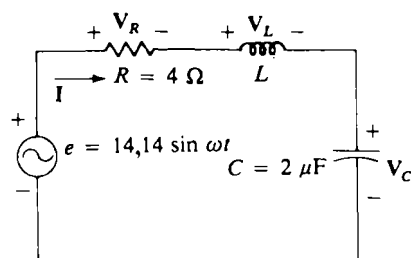


FIG. 20.47



- b. Refaites les parties (b) à (e) du problème 3.  
c. Calculez les fréquences de coupure.  
d. Calculez la largeur de bande du circuit résonant série.
6. a. Calculez la largeur de bande d'un circuit résonant série dont la fréquence propre est de 600 Hz et dont le facteur de qualité  $Q_s$  est de 15.  
b. Calculez les fréquences de coupure.  
c. Sachant que la résistance du circuit est de  $3 \Omega$  à la résonance, calculez en ohms les valeurs de  $X_L$  et de  $X_C$ .  
d. Quelle est la puissance fournie aux fréquences à demi-puissance, si le courant maximal pouvant passer dans le circuit est de 0,5 A?
7. a. Un circuit série a une fréquence propre de 10 kHz. Sachant que la résistance du circuit est de  $5 \Omega$  et que  $X_C$  est de  $200 \Omega$  à la résonance, calculez sa largeur de bande.  
b. Calculez les fréquences de coupure.  
c. Calculez  $Q_s$ .  
d. Sachant que la tension d'entrée est de  $30 \angle 0^\circ$ , calculez la tension aux bornes de la bobine et du condensateur.  
e. Calculez la puissance fournie à la résonance.
8. a. La largeur de bande d'un circuit résonant série est de 200 Hz. Sachant que la fréquence propre est de 2000 Hz, calculez le facteur de qualité  $Q_s$  du circuit.  
b. Si  $R = 2 \Omega$ , quelle est la valeur de  $X_L$  à la résonance?  
c. Calculez la valeur de  $L$  et de  $C$  à la résonance.  
d. Calculez les fréquences de coupure.
9. Sachant que les fréquences de coupure d'un circuit résonant série sont de 5400 Hz et de 6000 Hz:  
a. calculez la largeur de bande du circuit;  
b. calculez la fréquence propre du circuit si  $Q_s$  est de 9.5;  
c. calculez la valeur de  $X_L$  et de  $X_C$  à la résonance si la résistance du circuit est de  $2 \Omega$ .  
d. calculez la valeur de  $L$  et de  $C$  à la résonance.
- \*10. Dessinez un circuit résonant série dont la tension d'entrée est de  $5 \angle 0^\circ$  et dont les caractéristiques sont:  
a. un courant de crête de 500 mA à la résonance;  
b. une largeur de bande de 120 Hz;  
c. une fréquence propre de 8400 Hz.  
Calculez la valeur de  $L$  et de  $C$  ainsi que les fréquences de coupure.
- \*11. Dessinez un circuit résonant série d'une largeur de bande de 400 Hz; le circuit doit être composé d'une bobine d'un  $Q$  de 20 et d'une résistance de  $2 \Omega$ . Calculez la valeur de  $L$  et de  $C$  ainsi que les fréquences de coupure.



## Sections 20.9 à 20.12

12. Voir le circuit illustré à la figure 20.48.

- Calculez la valeur de  $X_C$  à la résonance.
- Calculez l'impédance totale  $Z_T$  à la résonance.
- Calculez les courants  $I_L$  et  $I_C$  à la résonance.
- Sachant que la fréquence propre est de 20 000 Hz, calculez la valeur de  $L$  et de  $C$  à la résonance.
- Calculez  $Q_p$  et LB.

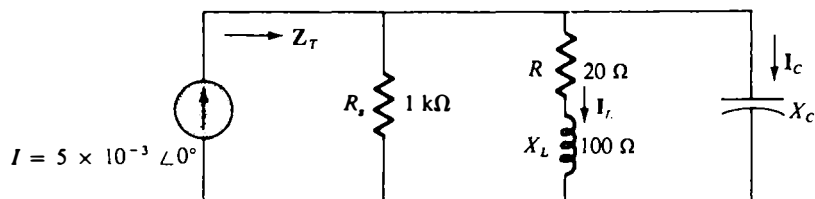


FIG. 20.48

13. Refaites le problème 12 pour le circuit illustré à la figure 20.49.

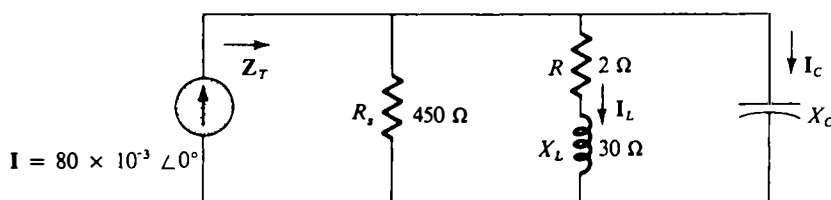


FIG. 20.49

14. Voir le circuit illustré à la figure 20.50.

- Calculez la fréquence propre.
- Calculez la valeur de  $X_L$  et de  $X_C$  à la résonance.
- Le  $Q$  de la bobine est-il grand ou petit à la résonance?
- Calculez l'impédance  $Z_{T_p}$  à la résonance.
- Calculez les courants  $I_L$  et  $I_C$  à la résonance.
- Calculez  $Q_p$  et LB.

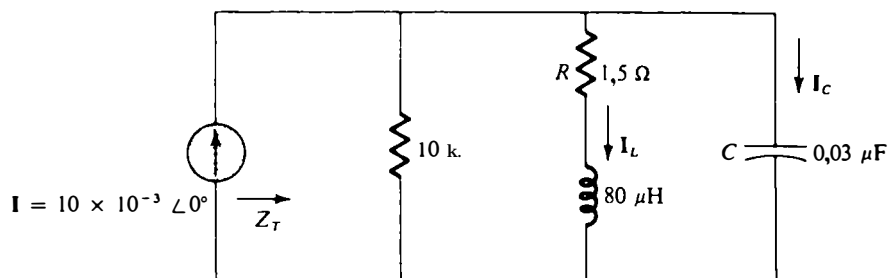


FIG. 20.50

15. Refaites le problème 14 pour le circuit illustré à la figure 20.51.

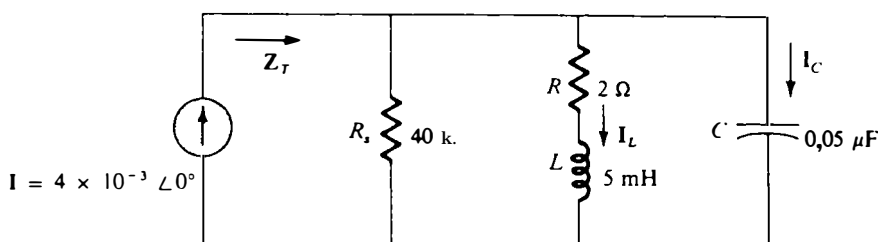


FIG. 20.51



16. On désire que l'impédance  $Z_T$  du circuit à la figure 20.52 soit purement résistive et d'une valeur de  $50\text{ k}\Omega$  à la résonance.
- Calculez alors la valeur de  $X_L$ .
  - Calculez  $X_C$ .
  - Calculez la fréquence propre sachant que  $L = 16\text{ mH}$ .
  - Calculez la valeur de  $C$  en microfarads.

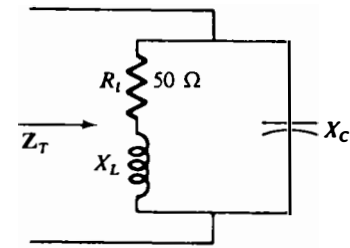


FIG. 20.52

17. Voir le réseau illustré à la figure 20.53.
- Calculez  $f_p$ .
  - Calculez  $V_C$  à la résonance.
  - Calculez la puissance absorbée à la résonance.
  - Calculez LB.

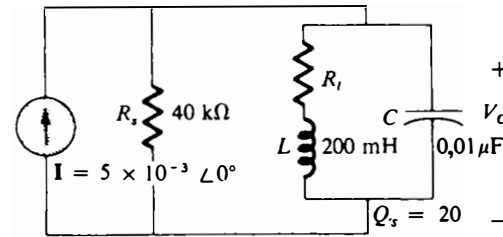


FIG. 20.53

- \*18. Les caractéristiques du réseau illustré à la figure 20.54 sont:

$$\begin{aligned} f_p &= 100\text{ kHz} \\ \text{LB} &= 2500\text{ Hz} \\ L &= 2\text{ mH} \\ Q &= 80 \end{aligned}$$

Calculez  $R_s$  et  $C$ .

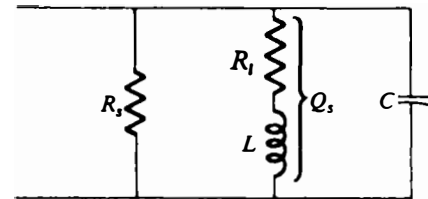


FIG. 20.54

- \*19. Voir le circuit illustré à la figure 20.55.
- Calculez la valeur de  $X_L$  à la résonance.
  - Calculez  $Q$ .
  - Calculez la fréquence propre sachant que la largeur de bande est de  $1000\text{ Hz}$ .
  - Calculez la valeur maximale de la tension  $V_C$ .
  - Tracez la courbe de  $V_C$  en fonction de la fréquence. Indiquez sur le graphique obtenu la valeur de crête de la courbe, la fréquence propre et les fréquences de coupure.

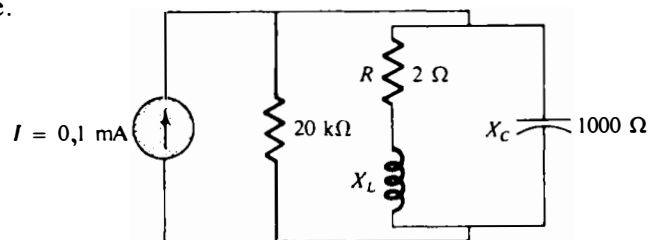


FIG. 20.55

- \*20. Refaites le problème 19 pour le réseau illustré à la figure 20.56.

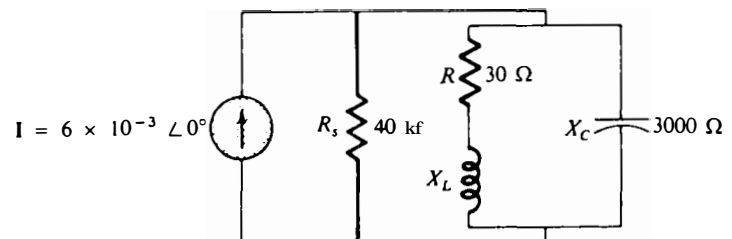


FIG. 20.56



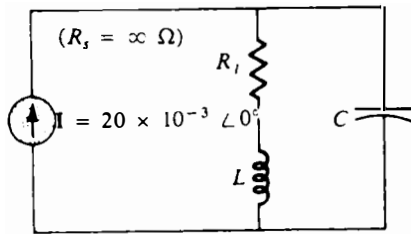


FIG. 20.57

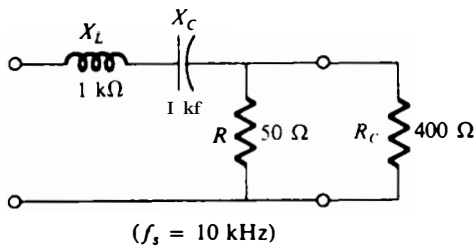


FIG. 20.58

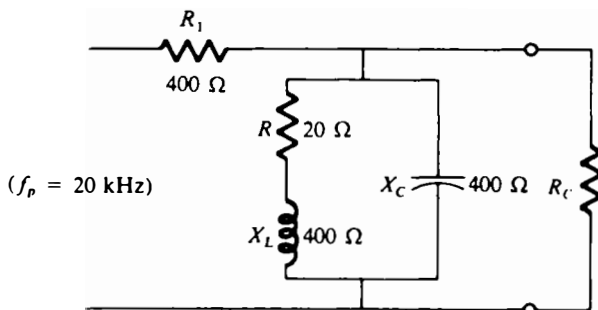


FIG. 20.59

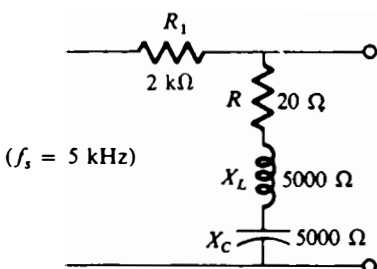


FIG. 20.60

\*21. Déterminez les valeurs des éléments du réseau illustré à la figure 20.57, pour que les caractéristiques de ce dernier soient:

- a.  $LB = 500 \text{ Hz}$ ;
- b.  $Q_p = 30$ ;
- c.  $V_{C'_{\max}} = 1,8 \text{ V}$ .

Section 20.13

22. Voir le filtre passe-bande illustré à la figure 20.58.
- a. Calculez  $Q_s$ .
  - b. Calculez les fréquences de coupure.
  - c. Dessinez la courbe de réponse fréquentielle du filtre.
  - d. Calculez  $Q_p$  (avec charge) sachant que la charge est de  $200 \Omega$ .
  - e. Indiquez sur la courbe obtenue à la partie (c) la variation des caractéristiques fréquentielles en fonction de la charge appliquée.
23. Voir le filtre passe-bande illustré à la figure 20.59.
- a. Calculez  $Q_p$  ( $R_C = \infty \Omega$ : condition de circuit ouvert).
  - b. Dessinez la courbe de réponse fréquentielle.
  - c. Calculez  $Q_p$  (avec charge) si  $R_C = 100 \text{ k}\Omega$ , et indiquez l'incidence de  $R_C$  sur la courbe obtenue en (b).
  - d. Refaites la partie (c) avec  $R_C = 20 \text{ k}\Omega$ .
24. Voir le filtre coupe-bande illustré à la figure 20.60.
- a. Calculez  $Q_s$ .
  - b. Calculez la largeur de bande et les fréquences à demi-puissance.
  - c. Dessinez la courbe de réponse fréquentielle.
  - d. On raccorde le circuit à une charge de  $2 \text{ k}\Omega$ . Quel effet cela a-t-il sur la courbe obtenue à la partie (c)?
25. On désire utiliser le réseau à la figure 20.59 comme filtre coupe-bande.
- a. Dessinez le réseau lorsqu'il est utilisé comme filtre coupe-bande.
  - b. Dessinez la courbe de réponse fréquentielle du coupe-bande.
  - c. On raccorde des charges de  $100 \text{ k}\Omega$  et de  $20 \text{ k}\Omega$  au réseau. Quels effets cela a-t-il sur la courbe de réponse fréquentielle du filtre?
26. a. Voir le réseau illustré à la figure 20.44a. Sachant que  $L_p = 400 \mu\text{H}$  ( $Q > 10$ ), que  $L_s = 60 \mu\text{H}$  et que  $C = 120 \text{ pF}$ , déterminez la fréquence rejetée et la fréquence passée.
- b. Dessinez la courbe de réponse fréquentielle du réseau.
27. a. Voir le réseau illustré à la figure 20.44b. Sachant que la fréquence rejetée est de  $30 \text{ kHz}$  et que la fréquence passée est de  $100 \text{ kHz}$ , déterminez les valeurs de  $L_s$  et de  $L_p$  ( $Q \geq 10$ ), si la capacité du condensateur est de  $200 \text{ pF}$ .
- b. Tracez la courbe de réponse fréquentielle du filtre.



## GLOSSAIRE

**Abaque de réactance** Diagramme extrêmement utile pour l'analyse et la conception de circuits résonants série ou parallèles.

**Facteur de qualité ( $Q$ )** Rapport qui fournit une indication immédiate de l'étroitesse du pic de la courbe de résonance. Plus le facteur  $Q$  est grand, plus le pic est étroit et plus rapidement chute la courbe de part et d'autre de la fréquence propre.

**Filtre** Circuit conçu soit pour bloquer soit pour laisser passer une bande précise de fréquences.

**Filtre à double accord** Filtre présentant à la fois les caractéristiques d'un filtre passe-bande et d'un filtre coupe-bande.

**Filtre coupe-bande** Circuit qui bloque les fréquences d'une bande donnée.

**Fréquences limites, de coupure, à demi-puissance ou à  $-3$  dB**  
Fréquences qui correspondent à un courant (tension) égal à 0,707 fois le courant (tension) maximal. Elles sont aussi les fréquences pour lesquelles la puissance fournie au circuit est égale à la moitié ( $-3$  dB) de la puissance que reçoit le circuit à la résonance.

**Filtre passe-bande** Circuit qui ne laisse passer que les fréquences d'une bande donnée.

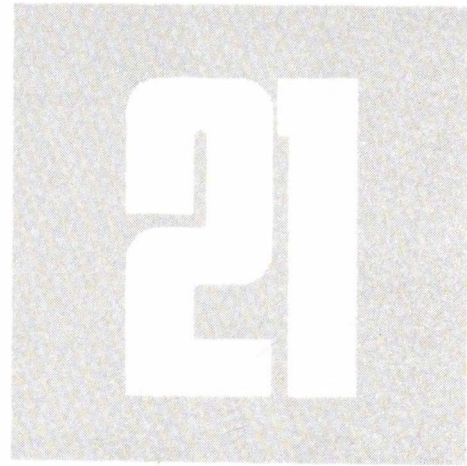
**Largeur de bande** Gamme de fréquences comprises entre les fréquences de coupure ou entre les fréquences à demi-puissance.

**Résonance** Condition établie par l'application d'un signal d'une fréquence donnée (la fréquence propre) à un circuit  $R-L-C$  série ou parallèle. La puissance transférée au circuit est maximale à cette fréquence et chute rapidement aux fréquences inférieures et supérieures.

**Sélectivité** Caractéristique des circuits résonants directement liée à la largeur de bande. Plus la largeur de bande est petite, plus la sélectivité est grande.



# SYSTÈMES POLYPHASÉS

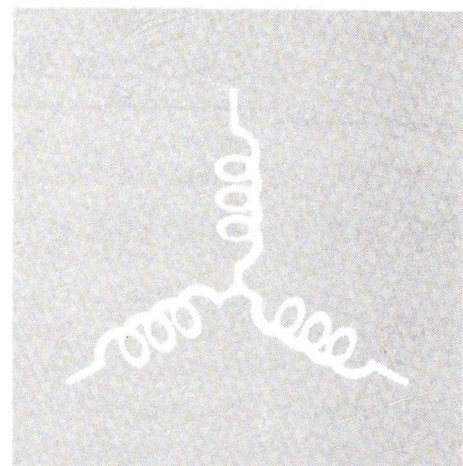


## 21.1 INTRODUCTION

Le système que nous avons décrit au chapitre 13, qui ne génère qu'une seule tension sinusoïdale chaque fois que le rotor accomplit une révolution, est appelé *alternateur monophasé*. Les alternateurs qui comptent plusieurs enroulements rotoriques et qui génèrent par conséquent plus d'une tension alternative sont appelés *alternateurs ou systèmes polyphasés*. Dans le présent chapitre, nous étudierons en détails le système triphasé, car c'est celui qu'on emploie le plus fréquemment dans les systèmes de distribution.

En règle générale, le système triphasé est plus avantageux que le système monophasé pour transmettre de la puissance. Cet avantage tient au fait que la puissance dissipée par effet Joule dans les lignes de transmission est moins grande en courant triphasé qu'en courant monophasé, ce qui permet l'emploi de conducteurs de section plus petite, d'où réduction de la masse de cuivre nécessaire.

Les alternateurs commerciaux sont presque tous triphasés. Les systèmes monophasés et diphasés n'ont pas pour autant disparu de la circulation. De fait, la plupart des groupes électrogènes de secours, notamment ceux à essence, sont des systèmes monophasés.





Les systèmes diphasés trouvent leurs applications les plus communes dans les servomécanismes, c'est-à-dire dans des systèmes de commande et de régulation automatique. De tels servomécanismes sont utilisés dans les instruments de navigation automatique des avions et des navires, de même que dans des dispositifs plus simples, notamment dans les circuits thermostatiques. Mais dans la plupart des cas où il faut un courant monophasé ou diphasé, on obtient ce dernier en ne prélevant que l'une ou que deux des phases d'un système triphasé.

Le nombre de tensions déphasées que peut produire un système polyphasé n'est pas limité à trois. On peut de fait obtenir un nombre quelconque de tensions déphasées en décalant autant d'enroulements autour du rotor du système. Certaines machines électriques fournissent d'ailleurs un meilleur rendement si elles sont alimentées par un système polyphasé. Le redresseur, qui transforme un courant alternatif en courant continu, en est un exemple: plus grand est le nombre de phases de l'alimentation, meilleure est sa sortie en courant continu.

## 21.2 LE SYSTÈME TRIPHASÉ

Le rotor (aussi appelé induit) du système triphasé compte trois bobines espacées de  $120^\circ$ , comme l'illustre la figure 21.1 a. Les bobines étant identiques (même nombre de spires) et chacune tournant à la même vitesse angulaire, les f.é.m. induites dans chacune des trois bobines ont même valeur de crête, même allure et même fréquence. La figure 21.1 a illustre le sens d'augmentation de la f.é.m. induite dans chaque bobine, selon la règle de la main droite. La tension induite  $e_{A'A}$  s'accroît et

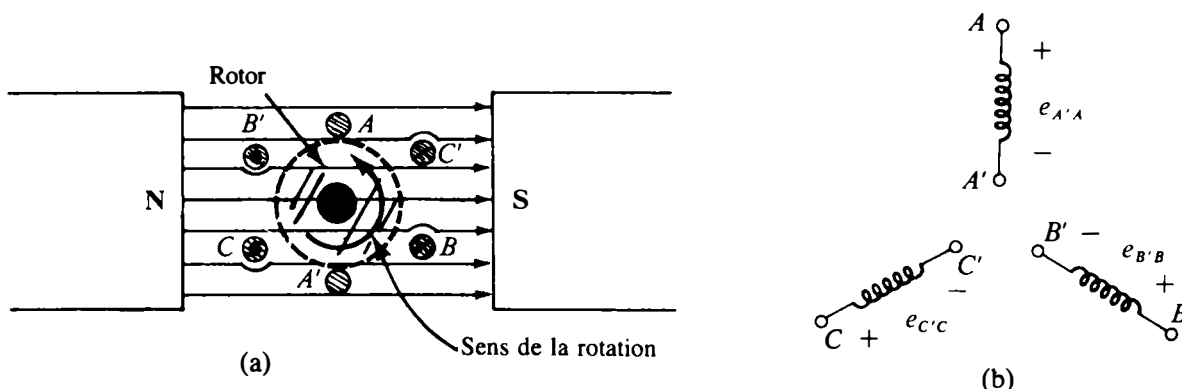


FIG. 21.1 Alternateur triphasé.

tend vers son maximum positif alors que la tension induite  $e_{B'B}$  chute vers son maximum négatif puisque  $e_{BB'} = -e_{B'B}$ . Simultanément, la tension induite  $e_{C'C}$  a atteint son maximum positif et amorce sa chute vers zéro.



Le tracé des trois tensions induites sur le même graphique donne le résultat illustré à la figure 21.2. À tout instant donné, la somme algébrique des trois tensions de phase est nulle. Cela est représenté à la figure 21.2 pour  $\omega t = 0$ . Notons qu'à l'instant où une tension induite est nulle, les deux autres ont atteint 86,6% de leur maximum positif ou négatif. Notons aussi qu'à l'instant où deux tensions sont égales en grandeur et en sens (à  $0,5 E_m$ ), la troisième tension induite a atteint sa valeur maximale mais est de sens contraire aux deux premières.

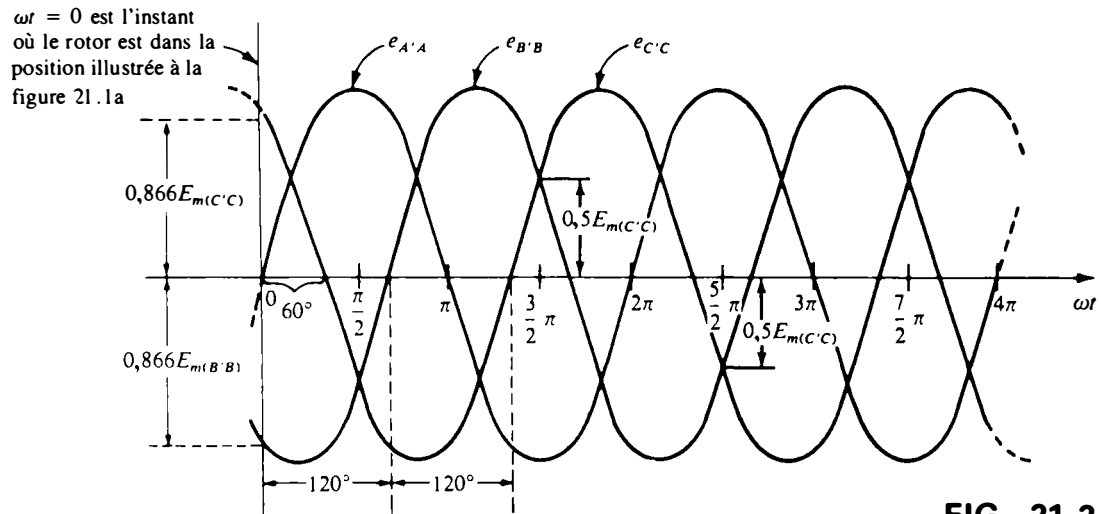


FIG. 21.2

L'expression sinusoïdale de chacune des tensions induites est:

$$\begin{aligned} e_{A'A} &= E_{m(A'A)} \sin \omega t \\ e_{B'B} &= E_{m(B'B)} \sin(\omega t - 120^\circ) \\ e_{C'C} &= E_{m(C'C)} \sin(\omega t - 240^\circ) = E_{m(C'C)} \sin(\omega t + 120^\circ) \end{aligned} \tag{21.1}$$

Le diagramme de phase des tensions est représenté à la figure 21.3, sur laquelle on a:

$$\begin{aligned} E_{A'A} &= 0,707 E_{m(A'A)} \\ E_{B'B} &= 0,707 E_{m(B'B)} \\ E_{C'C} &= 0,707 E_{m(C'C)} \end{aligned}$$

et:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{A'A} &= E_{A'A} \angle 0^\circ \\ \mathbf{E}_{B'B} &= E_{B'B} \angle -120^\circ \\ \mathbf{E}_{C'C} &= E_{C'C} \angle +120^\circ \end{aligned}$$

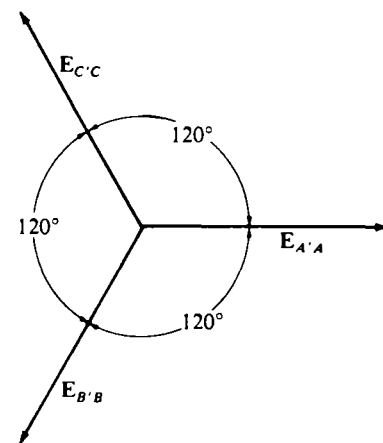


FIG. 21.3

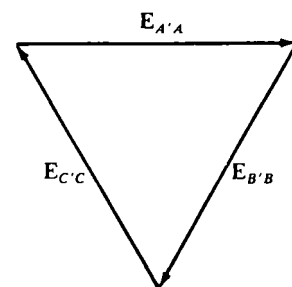


FIG. 21.4

Les trois vecteurs de phase peuvent être redessinés comme à la figure 21.4. Mais une loi précise que la somme vectorielle de trois vecteurs mis bout à bout de cette façon (c'est-à-dire que la « tête » de chaque vecteur touche à la « queue » d'un autre) est nulle. On peut donc conclure que la somme vectorielle des tensions de phase d'un système triphasé est nulle. Traduit mathématiquement, cet énoncé s'écrit:



$$\sum (E_{A'A} + E_{B'B} + E_{C'C}) = 0 \quad (21.2)$$

La représentation symbolique du système triphasé est illustrée à la figure 21.1b. Notons la correspondance entre les lettres indiquant les bornes des symboles des bobines et les positions réelles des bobines sur le rotor de l'alternateur.

### 21.3 LE SYSTÈME TRIPHASÉ MONTÉ EN ÉTOILE

Le système, dont les trois bornes,  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$ , sont reliées ensemble comme à la figure 21.1b, est appelé *système triphasé monté en étoile* (figure 21.5). À cette figure, la lettre  $Y$  est inversée pour simplifier la notation et rendre le montage plus clair. Le point auquel toutes les bornes sont raccordées est appelé *point neutre*. Si aucun conducteur ne relie ce point au récepteur (charge), le système est appelé *système triphasé à trois conducteurs monté en étoile*. Si le point neutre est par contre relié au récepteur, le système est appelé *système triphasé à quatre conducteurs monté en étoile*. Nous verrons quel est le rôle du neutre quand nous ferons l'étude du récepteur.

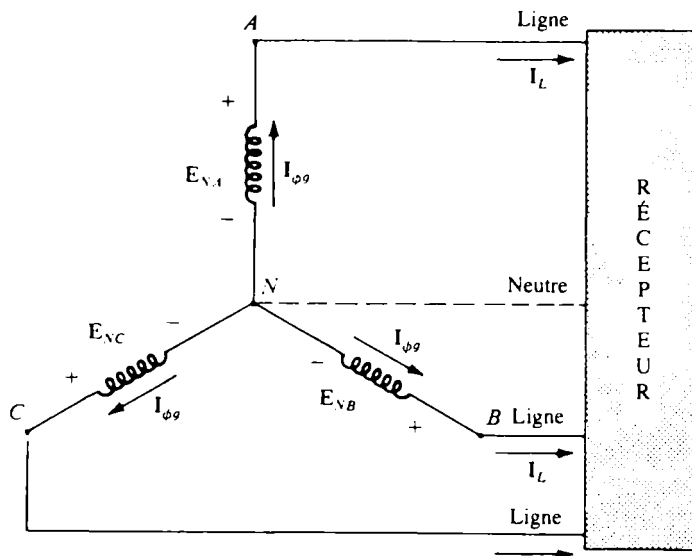


FIG. 21.5 Alternateur monté en  $Y$ .

Les trois points,  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$ , étant maintenant confondus avec le point neutre  $N$ , nous représentons les tensions de phase par  $E_{NA}$ ,  $E_{NB}$  et  $E_{NC}$ . (Dans un système monté en étoile, ces tensions sont usuellement appelées *tensions simples*.)

Les trois conducteurs reliant les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  au récepteur sont appelés *lignes*. (Ce terme est un générique; dans le cas particulier du système triphasé monté en étoile, les trois conducteurs sont usuellement appelés *conducteurs de phase*.) Il est manifeste (figure 21.5) que le courant de ligne est égal au courant de phase, pour chaque phase, dans le système monté en étoile; c'est-à-dire:

$$I_L = I_{\phi g} \quad (21.3)$$



La tension mesurée entre deux lignes est appelée *tension de ligne* (et en particulier *tension composée* dans le système monté en étoile). Sur le diagramme de phase à la figure 21.6, la tension de ligne est le vecteur de phase tracé entre les extrémités de deux vecteurs représentant des tensions de phase, dans le sens antihoraire. Le sens du vecteur représentant la tension de ligne est défini par l'ordre des deux lettres en indice inférieur.

L'application de la loi des tensions de Kirchhoff à la boucle indiquée à la figure 21.6 donne:

$$E_{BA} - E_{NA} + E_{NB} = 0$$

ou encore:

$$E_{BA} = E_{NA} - E_{NB} = E_{NA} + E_{BN}$$

Nous avons réarrangé le diagramme de phase à la figure 21.7 de façon à montrer le vecteur  $E_{BA}$ . Puisque chaque tension de phase inversée ( $E_{BN}$ ) est bissectrice des deux autres, l'angle  $\alpha = 60^\circ$ . L'angle  $\beta = 30^\circ$ , puisqu'une ligne tracée entre les extrémités opposées du losange divise en deux parties égales l'angle à l'origine et l'angle opposé. Nous avons aussi tracé sur ce diagramme la deuxième diagonale du losange qui coupe en son milieu et à angle droit la première.

La longueur du segment  $x$  est:

$$x = E_{NA} \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} E_{NA}$$

de sorte que:

$$E_{BA} = 2x = (2) \frac{\sqrt{3}}{2} E_{NA} = \sqrt{3} E_{NA}$$

Comme d'autre part l'argument  $\theta$  de  $E_{BA} = 30^\circ$ , on a aussi:

$$E_{BA} = E_{BA} \angle 30^\circ = \sqrt{3} E_{NA} \angle 30^\circ$$

ce qui, traduit en clair, signifie que la grandeur de la tension de ligne d'un système monté en étoile est  $\sqrt{3}$  fois la tension de phase:

$$E_L = \sqrt{3} E_\phi \tag{21.4}$$

Le diagramme indique en outre que le déphasage entre le vecteur représentant une tension de ligne et le plus proche vecteur représentant une tension de phase est de  $30^\circ$ .

Nous avons donc la relation sinusoïdale:

$$e_{BA} = \sqrt{2} E_{BA} \sin(\omega t + 30^\circ)$$

On obtient de la même façon pour les autres tensions de ligne:

$$e_{AC} = \sqrt{2} E_{AC} \sin(\omega t + 150^\circ)$$

et:

$$e_{CB} = \sqrt{2} E_{CB} \sin(\omega t + 270^\circ)$$

La figure 21.8 illustre le diagramme de phase des tensions de ligne et des tensions de phase. On peut manifestement réarranger les vecteurs représentant les tensions de ligne de

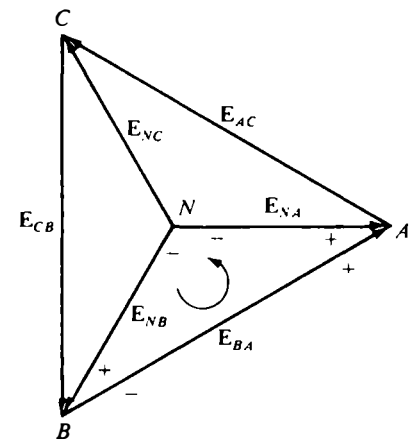


FIG. 21.6 Tensions de ligne et de phase de l'alternateur triphasé monté en Y.

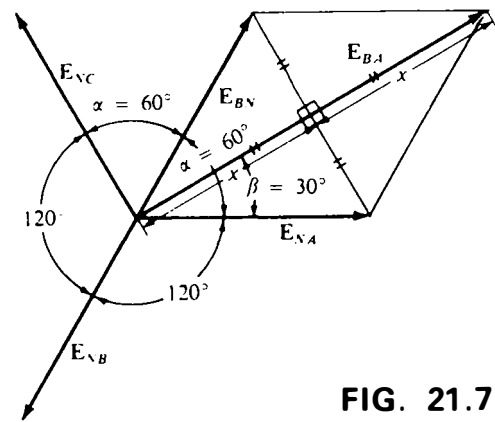


FIG. 21.7





sorte qu'ils forment une boucle, comme à la figure 21.8b. Il est donc permis de conclure que la somme des tensions de ligne est également nulle. c'est-à-dire:

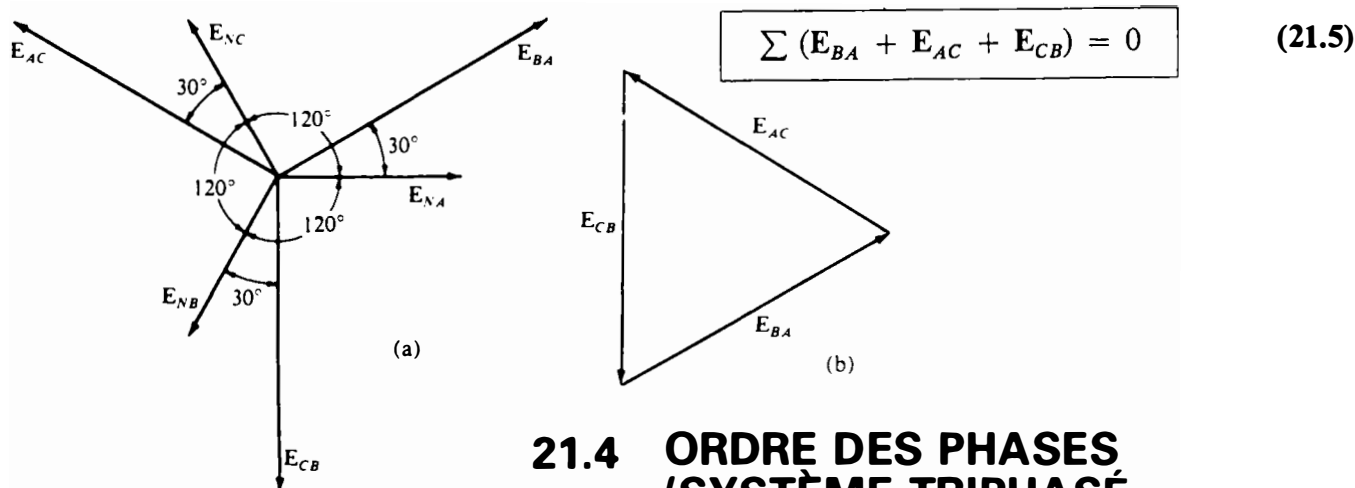


FIG. 21.8

## 21.4 ORDRE DES PHASES (SYSTÈME TRIPHASÉ MONTÉ EN ÉTOILE)

L'ordre des phases est l'ordre dans lequel les vecteurs de phase représentant les tensions de phase passent par un point fixe du diagramme de phase lorsqu'ils sont animés d'une rotation en sens antihoraire. L'ordre des phases des vecteurs à la figure 21.9 est ainsi *ABC*. Soulignons toutefois que le point fixe pouvant être placé n'importe où sur le diagramme, l'ordre des phases peut aussi être *BAC* ou *CAB*. L'ordre des phases est une importante caractéristique des distributions triphasées. Ainsi la permutation de deux tensions de phase dans un moteur triphasé a pour résultat d'inverser le sens de rotation du moteur. Nous décrirons d'autres effets de la permutation de l'ordre des phases lors de notre étude des systèmes triphasés raccordés à un récepteur.

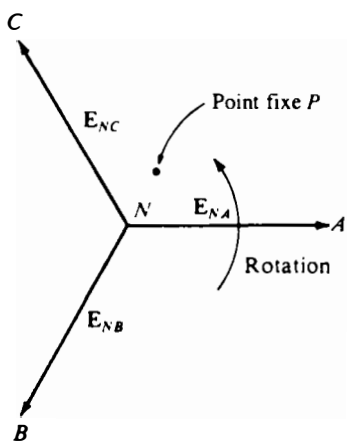


FIG. 21.9

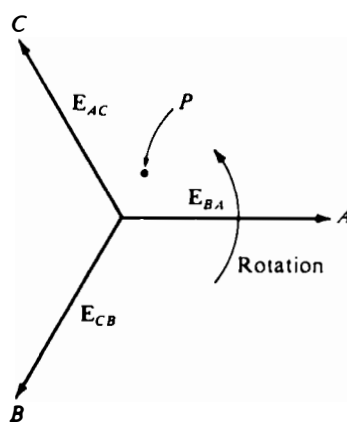


FIG. 21.10

L'ordre des phases peut aussi se définir en fonction des tensions de ligne, par rotation dans le sens antihoraire les vecteurs de phase représentant ces dernières comme à la figure 21.10. Il faut toutefois prendre soin dans ce cas de définir l'ordre des phases à l'aide des premières lettres en indice inférieur uniquement ou des deuxièmes lettres en indice inférieur uniquement. Ainsi à la figure 21.10, l'ordre des phases déterminé à l'aide des premières lettres en indice inférieur des vecteurs passant par le point *P* est *ABC*. Mais de toutes façons l'ordre est le même, puisque *BCA* équivaut à *ABC*. Soulignons enfin que l'ordre des phases ainsi déterminé est le même que celui que nous avons déterminé au moyen des tensions de phase (figure 21.9).

Le diagramme de phase peut être tracé dès que l'ordre des phases est connu. Il suffit de choisir une tension de référence, de faire coïncider son vecteur avec l'axe horizontal puis de tracer les vecteurs des autres tensions aux positions angulaires correctes. Si l'ordre des phases est *ABC* par exemple, on peut choisir la tension  $E_{BA}$  comme tension de référence (figure



21.11a) pour tracer le diagramme de phase des tensions de ligne, ou la tension  $E_{NA}$  pour le diagramme des tensions de phase (figure 21.11b). Les relations peuvent d'autre part s'écrire aussi sous forme vectorielle comme ci-dessous:

$$\begin{aligned} \text{Tensions de ligne} & \begin{cases} E_{BA} = E_{BA} \angle 0^\circ \text{ (référence)} \\ E_{AC} = E_{AC} \angle -120^\circ \\ E_{CB} = E_{CB} \angle +120^\circ \end{cases} \\ \text{Tensions de phase} & \begin{cases} E_{NA} = E_{NA} \angle 0^\circ \text{ (référence)} \\ E_{NC} = E_{NC} \angle -120^\circ \\ E_{NB} = E_{NB} \angle +120^\circ \end{cases} \end{aligned}$$

### 21.5 SYSTÈME MONTÉ EN ÉTOILE RACCORDÉ À UN RÉCEPTEUR MONTÉ EN ÉTOILE

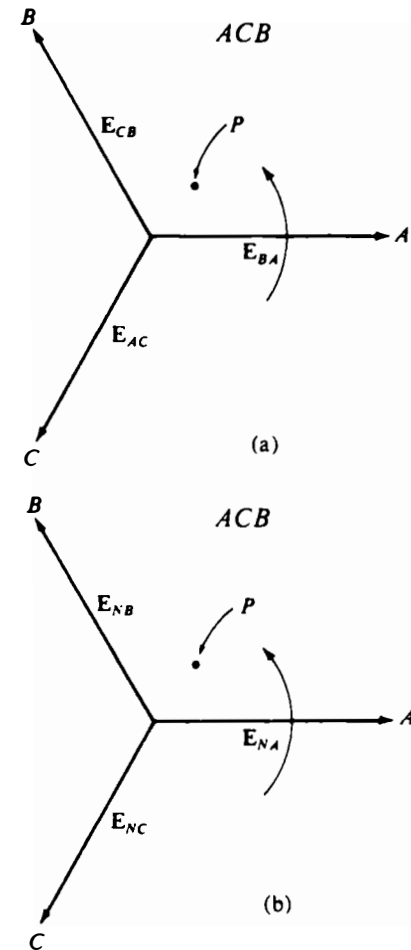
Les récepteurs raccordés à un système triphasé peuvent être monté en étoile ou en triangle.

La figure 21.12 illustre un système Y-Y (récepteur en étoile raccordé à un alternateur en étoile).

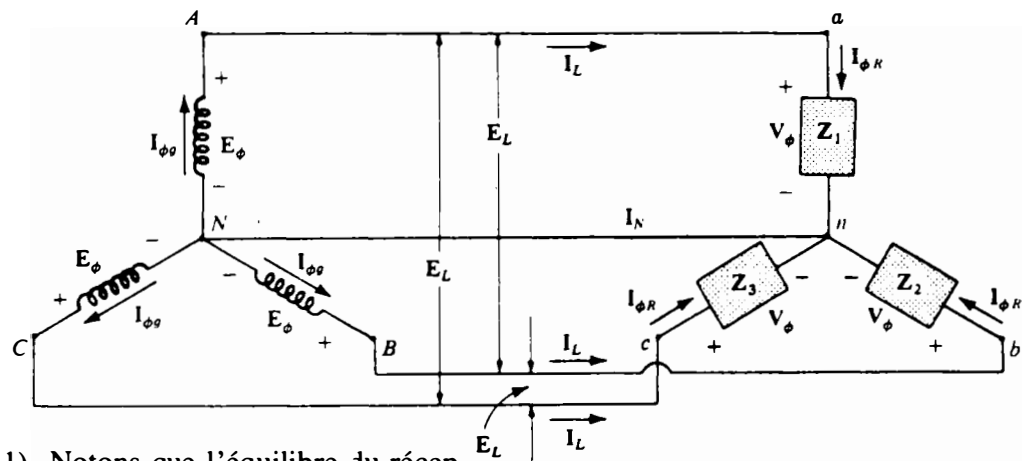
Si le récepteur est équilibré, on peut supprimer le conducteur neutre sans perturber le système. En d'autres termes, si la condition:

$$Z_1 = Z_2 = Z_3$$

est réalisée, le courant  $I_N$  dans le neutre est nul (nous en ferons



**FIG. 21.11**



**FIG. 21.12** Alternateur Y raccordé à un récepteur Y.

la preuve à l'exemple 21.1). Notons que l'équilibre du récepteur suppose que le déphasage est le même pour chacune des impédances, condition qui n'était pas nécessaire en courant continu.

Idéalement, c'est-à-dire en supposant que tous les récepteurs des usagers soient équilibrés, on pourrait supprimer le conducteur neutre. Il y aurait donc économie, en raison de la diminution de la masse de cuivre nécessaire. Mais dans la pratique, les appareils d'éclairage et la majorité des autres matériels électriques n'utilisent qu'une seule tension de phase, et même si tout le matériel récepteur est conçu pour être parfaitement équilibré (comme il le devrait) il y a toujours



déséquilibre puisque les appareils d'éclairage et les matériels électriques sont indépendamment mis sous tension ou hors tension. Le rôle du conducteur neutre est par conséquent de ramener au système générateur monté en étoile le courant résultant du déséquilibre. Nous reviendrons sur ce point dans notre étude des systèmes déséquilibrés montés en étoile.

Passons maintenant au système  $Y-Y$  à quatre conducteurs. Le courant passant dans chaque phase du système générateur est égal au courant de ligne correspondant. Si le récepteur est monté en étoile, il est égal au courant passant dans la phase correspondante du récepteur. On a donc:

$$\mathbf{I}_{\phi\theta} = \mathbf{I}_L = \mathbf{I}_{\phi R} \quad (21.6)$$

Que le récepteur soit équilibré ou non, on peut par ailleurs écrire, puisque le système générateur et le récepteur ont un point neutre commun:

$$\mathbf{V}_\phi = \mathbf{E}_\phi \quad (21.7)$$

Puisque  $\mathbf{I}_{\theta R} = \mathbf{V}_\theta / \mathbf{Z}_\theta$ , les courants passant dans les trois phases ont même intensité si la charge est équilibrée et des intensités différentes, si la charge est déséquilibrée. On se rappellera d'autre part que dans le système générateur monté en étoile, la grandeur de la tension de ligne est égale à  $\sqrt{3}$  fois la tension de phase. La même relation peut s'appliquer au récepteur à quatre fils monté en étoile, qu'il soit équilibré ou non. On a donc:

$$E_L = \sqrt{3}V_\phi \quad (21.8)$$

Pour définir une chute de tension aux bornes d'une branche d'un récepteur, on utilise un indice inférieur comptant deux lettres. La première désigne la borne par laquelle le courant entre dans la branche et la deuxième, la borne par laquelle il sort. En d'autres termes, la première lettre de l'indice inférieur représente par définition la borne positive par rapport à celle que représente la deuxième lettre. Les symboles littéraux des f.é.m. et des chutes de tension utilisés à la figure 21.13 reflètent cette définition.

**EXEMPLE 21.1** L'ordre des phases du système générateur monté en étoile illustré à la figure 21.13 est  $ABC$ .

- Calculer les déphasages  $\theta_2$  et  $\theta_3$ .
- Calculer la grandeur des tensions de ligne.
- Calculer l'intensité des courants de ligne.
- Vérifier si  $\mathbf{I}_N = 0$ , puisque le récepteur est équilibré.

*Solution:*

- L'ordre des phases étant  $ABC$ , on a nécessairement:  
 $\theta_2 = -120^\circ$  et  $\theta_3 = +120^\circ$ .



## SYSTÈME MONTÉ EN ÉTOILE RACCORDÉ À UN RÉCEPTEUR MONTÉ EN ÉTOILE

617

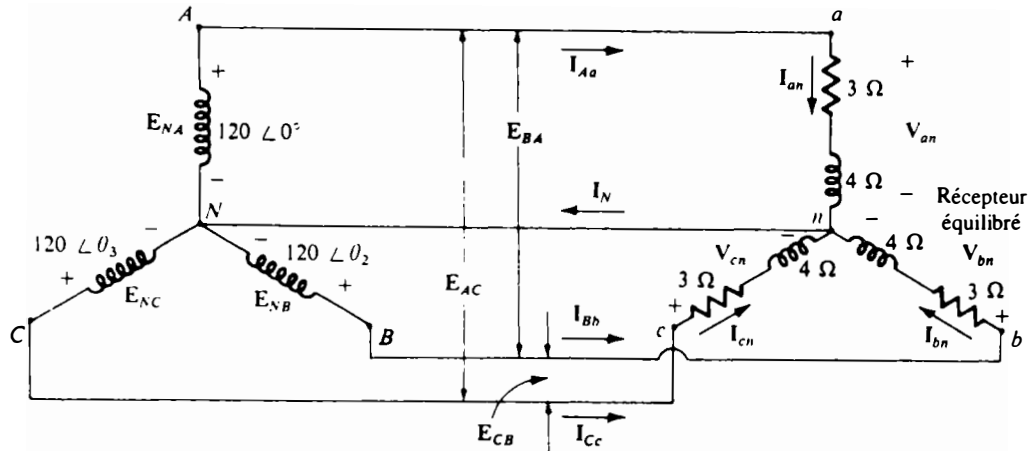


FIG. 21.13

b.  $E_L = \sqrt{3}E_\phi = 1,73(120) = 208$  V. Par conséquent:

$$E_{BA} = E_{CB} = E_{AC} = 208 \text{ V}$$

c.  $V_\theta = E_\phi$ . Alors:

$$\begin{aligned} V_{an} &= E_{NA}, & V_{bn} &= E_{NB}, & V_{cn} &= E_{NC} \\ I_{\phi L} = I_{an} &= \frac{V_{an}}{Z_{an}} = \frac{120 \angle 0^\circ}{3 + j4} = \frac{120 \angle 0^\circ}{5 \angle 53,13^\circ} \\ &= 24 \angle -53,13^\circ \\ I_{bn} &= \frac{V_{bn}}{Z_{bn}} = \frac{120 \angle -120^\circ}{5 \angle 53,13^\circ} = 24 \angle -173,13^\circ \\ I_{cn} &= \frac{V_{cn}}{Z_{cn}} = \frac{120 \angle +120^\circ}{5 \angle 53,13^\circ} = 24 \angle 66,87^\circ \end{aligned}$$

et puisque  $I_L = I_{\phi R}$ :

$$\begin{aligned} I_{Aa} &= I_{an} = 24 \angle -53,13^\circ \\ I_{Bb} &= I_{bn} = 24 \angle -173,13^\circ \\ I_{Cc} &= I_{cn} = 24 \angle 66,87^\circ \end{aligned}$$

d. La loi des courants de Kirchhoff donne:

$$I_N = I_{Aa} + I_{Bb} + I_{Cc}$$

Sous forme rectangulaire, les courants sont:

$$\begin{aligned} I_{Aa} &= 24 \angle -53,13^\circ = 14,40 - j19,20 \\ I_{Bb} &= 24 \angle -173,13^\circ = -23,83 - j2,87 \\ I_{Cc} &= 24 \angle 66,87^\circ = 9,43 + j22,07 \\ \Sigma I_{Aa} + I_{Bb} + I_{Cc} &= 0 + j0 \end{aligned}$$

et  $I_N$  est de fait égal à  $\mathbf{0}$ .



## 21.6 LE SYSTÈME Y-Δ

Le système Y-Δ illustré à la figure 21.14 ne comporte pas de point neutre. Toute variation de l'impédance d'une phase créant un déséquilibre fait simplement varier les courants de ligne et de phase du système.

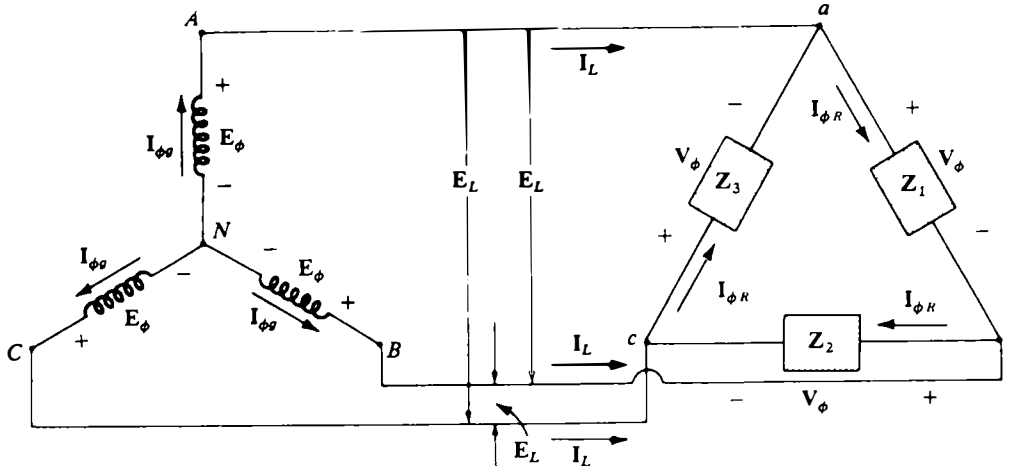


FIG. 21.14 Alternateur Y raccordé à un récepteur Δ.

Dans un récepteur équilibré, on a:

$$Z_1 = Z_2 = Z_3 \quad (21.9)$$

La tension aux bornes de chaque phase du récepteur est égale à la tension de ligne du système générateur, que le récepteur soit équilibré ou déséquilibré. On a donc:

$$V_\phi = E_L \quad (21.10)$$

La relation entre les courants de ligne et les courants de phase pour un récepteur équilibré monté en triangle peut être déterminée au moyen d'une méthode semblable à celle que nous avons adoptée à la section 21.3 pour déterminer la relation entre les tensions de ligne et les tensions de phase dans le système générateur monté en étoile. Dans le présent cas, nous ferons toutefois appel à la loi des courants de Kirchhoff plutôt qu'à la loi des tensions.

Le résultat ainsi obtenu est:

$$I_L = \sqrt{3}I_\phi \quad (21.11)$$

et le déphasage entre le vecteur représentant un courant de ligne et le plus proche vecteur représentant un courant de phase est de  $30^\circ$ . Une étude plus détaillée de cette relation entre les courants de ligne et de phase d'un récepteur monté en étoile est donnée à la section 21.7.

Si le récepteur est équilibré, les courants de ligne sont égaux en intensité de même que les courants de phase.



**EXEMPLE 21.2** Voir le système triphasé illustré à la figure 21.15.

- Calculer les déphasages  $\theta_2$  et  $\theta_3$ .
- Calculer le courant qui passe dans chacune des phases du récepteur.
- Calculer l'intensité des courants de ligne.

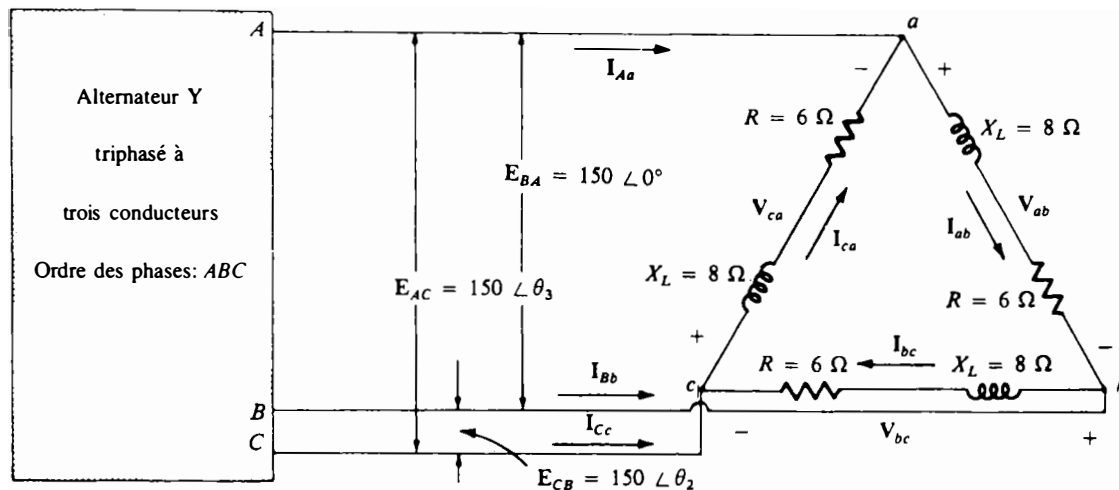


FIG. 21.15

*Solution:*

a. L'ordre des phases étant ABC, on a:

$$\theta_2 = -120^\circ \quad \text{et} \quad \theta_3 = +120^\circ$$

b.  $V_\phi = E_L$ . On a par conséquent:

$$V_{ab} = E_{BA}, \quad V_{ca} = E_{AC}, \quad \text{et} \quad V_{bc} = E_{CB}$$

Les courants de phase sont:

$$I_{ab} = \frac{V_{ab}}{Z_{ab}} = \frac{150 \angle 0^\circ}{6 + j8} = \frac{150 \angle 0^\circ}{10 \angle 53,13^\circ} = 15 \angle -53,13^\circ$$

$$I_{bc} = \frac{V_{bc}}{Z_{bc}} = \frac{150 \angle -120^\circ}{10 \angle 53,13^\circ} = 15 \angle -173,13^\circ$$

$$I_{ca} = \frac{V_{ca}}{Z_{ca}} = \frac{150 \angle +120^\circ}{10 \angle 53,13^\circ} = 15 \angle 66,87^\circ$$

c.  $I_L = \sqrt{3}I_\phi = \sqrt{3}(15) = 25,95 \text{ A}$ . Par conséquent:

$$I_{Aa} = I_{Bb} = I_{Cc} = 25,95 \text{ A}$$

## 21.7 LE SYSTÈME MONTÉ EN TRIANGLE

Raccordons les bobines de l'alternateur illustré à la figure 21.6a comme à la figure 21.16b, c'est-à-dire relierons le point A au point C', le point B au point A' et le point C au point B'. Le montage résultant est appelé *système triphasé à trois conducteurs monté en triangle*. Dans ce système, les tensions de phase et de ligne sont équivalentes et égales à la tension induite aux bornes de chaque bobine. En d'autres termes:

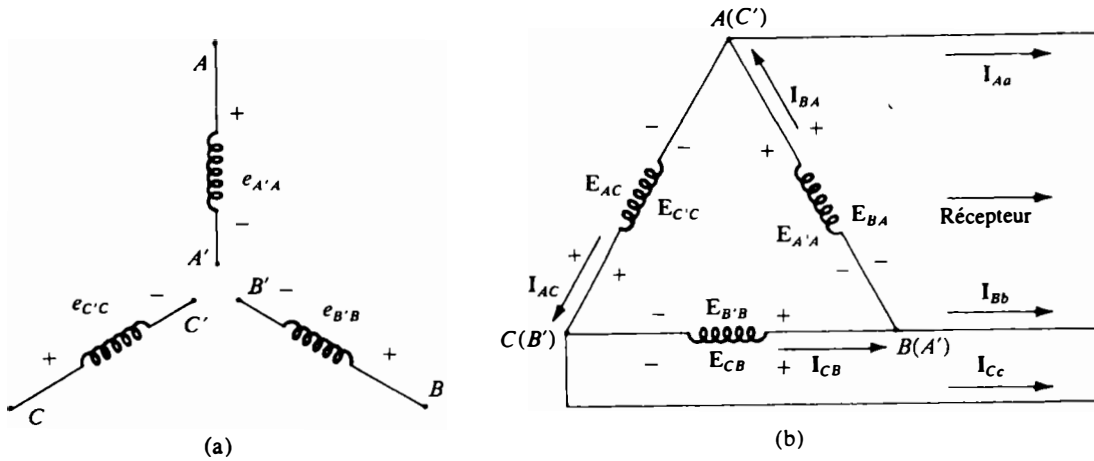


FIG. 21.16 Alternateur monté en  $\Delta$ .

$$\left. \begin{aligned}
 E_{BA} &= E_{A'A} & \text{et} & & e_{A'A} &= \sqrt{2} E_{A'A} \sin \omega t \\
 E_{CB} &= E_{B'B} & \text{et} & & e_{B'B} &= \sqrt{2} E_{B'B} \sin(\omega t - 120^\circ) \\
 E_{AC} &= E_{C'C} & \text{et} & & e_{C'C} &= \sqrt{2} E_{C'C} \sin(\omega t + 120^\circ)
 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Ordre} \\ \text{des phases:} \\ ABC \end{array}$$

$$\boxed{E_L = E_{\phi g}} \quad (21.12)$$

Soulignons que ce système n'offre qu'une seule tension (en grandeur), alors que le système monté en étoile en offrirait deux.

Le courant de ligne du système monté en triangle n'est pas égal au courant de phase, comme c'était le cas dans le système monté en étoile. La relation entre ces deux courants peut être déterminée par application de la loi des courants de Kirchhoff à l'un des noeuds et par l'expression du courant de ligne en termes des courants de phase. Au noeud A, cette méthode donne:

$$I_{BA} = I_{Aa} + I_{AC}$$

ou:

$$I_{Aa} = I_{BA} - I_{AC} = I_{BA} + I_{CA}$$

Le diagramme de phase est représenté à la figure 21.17, dans le cas d'un récepteur équilibré.

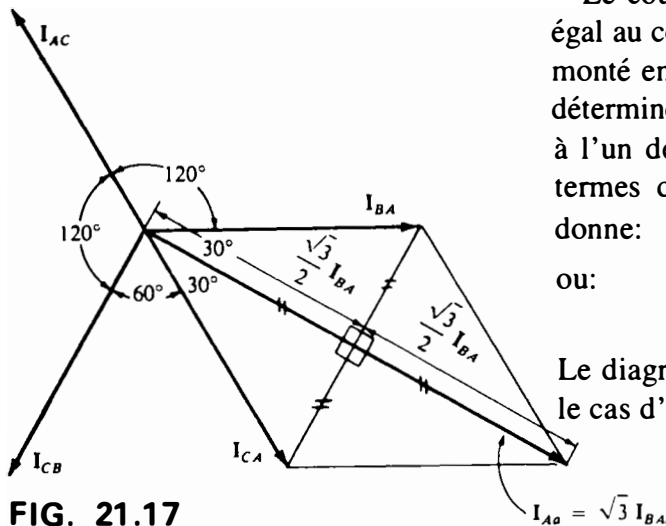


FIG. 21.17

En adoptant maintenant, pour déterminer le courant de ligne, la méthode utilisée pour déterminer la tension de ligne d'un système monté en étoile, nous obtenons le résultat global:

$$\boxed{I_L = \sqrt{3} I_{\phi g}} \quad (21.13)$$

Comme l'illustre le diagramme de phase des courants (figure 21.18), le déphasage entre le vecteur représentant un courant de ligne et le plus proche vecteur représentant un courant de phase est de  $30^\circ$ .

Tout comme nous l'avons fait pour les tensions d'un système monté en étoile, nous pouvons montrer que la somme vectorielle des courants de ligne ou des courants de phase d'un système monté en triangle est nulle si ce dernier est raccordé à un récepteur équilibré.

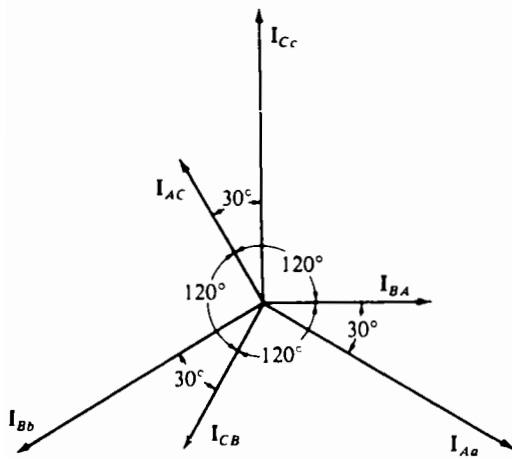


FIG. 21.18



### 21.8 ORDRE DES PHASES (SYSTÈME MONTÉ EN TRIANGLE)

Bien que les tensions de ligne et de phase d'un système monté en triangle soient les mêmes, il est usuel de préciser l'ordre des phases au moyen des tensions de ligne. La méthode utilisée est celle que nous avons décrite pour les tensions de ligne du système monté en étoile. La figure 21.19 représente le diagramme de phase des tensions de ligne ainsi obtenu, l'ordre des phases étant ABC. À noter que l'ordre de la première et de la deuxième lettre des indices inférieurs est le même.

Les relations sous forme vectorielle sont:

$$\begin{aligned} E_{BA} &= E_{BA} \angle 0^\circ \\ E_{CB} &= E_{CB} \angle -120^\circ \\ E_{AC} &= E_{AC} \angle 120^\circ \end{aligned}$$

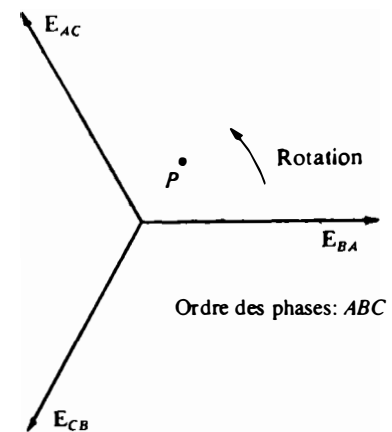


FIG. 21.19

### 21.9 LES SYSTÈMES TRIPHASÉS Δ-Δ ET Δ-Y

Les équations de base nécessaires à l'analyse des deux systèmes ont été présentées au moins une fois dans le présent chapitre. Nous passons donc directement à deux exemples, un avec un récepteur monté en triangle et l'autre avec un récepteur monté en étoile.

**EXEMPLE 21.3** Voir le système Δ-Δ illustré à la figure 21.20.

- Calculer les déphasages  $\theta_2$  et  $\theta_3$  pour l'ordre des phases donné.
- Calculer les courants dans chaque phase du récepteur.
- Calculer l'intensité des courants de ligne.

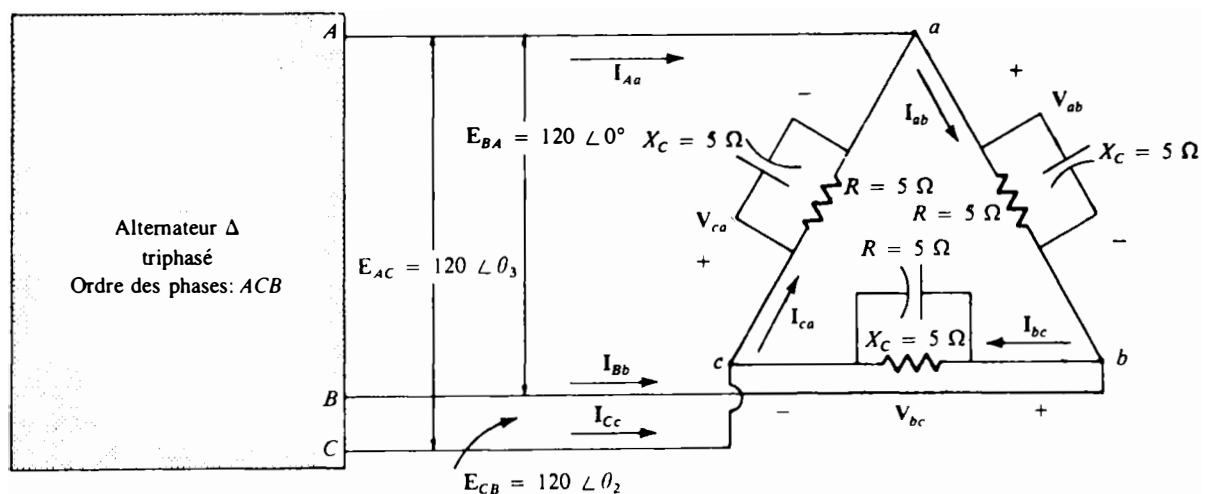


FIG. 21.20 Système Δ-Δ.





*Solution:*

a. L'ordre des phases étant *ACB*, on a:

$$\theta_2 = 120^\circ \quad \text{et} \quad \theta_3 = -120^\circ$$

b.  $V_\phi = E_L$ . Par conséquent:

$$V_{ab} = E_{BA}, \quad V_{ca} = E_{AC}, \quad \text{et} \quad V_{bc} = E_{CB}$$

Les courants de phase sont:

$$\begin{aligned} I_{ab} &= \frac{V_{ab}}{Z_{ab}} = \frac{120 \angle 0^\circ}{\frac{(5 \angle 0^\circ)(5 \angle -90^\circ)}{5 - j5}} = \frac{120 \angle 0^\circ}{7,07 \angle -45^\circ} \\ &= \frac{120 \angle 0^\circ}{3,54 \angle -45^\circ} = 33,9 \angle 45^\circ \end{aligned}$$

$$I_{bc} = \frac{V_{bc}}{Z_{bc}} = \frac{120 \angle 120^\circ}{3,54 \angle -45^\circ} = 33,9 \angle 165^\circ$$

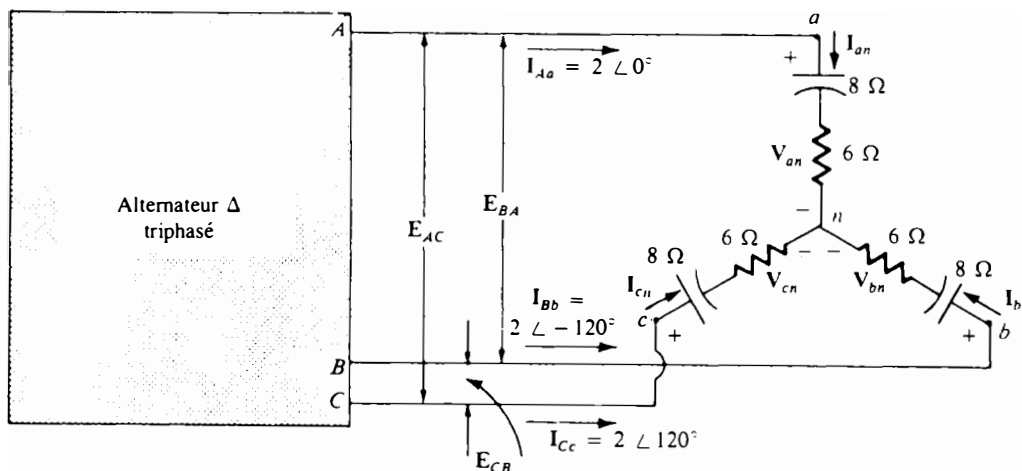
$$I_{ca} = \frac{V_{ca}}{Z_{ca}} = \frac{120 \angle -120^\circ}{3,54 \angle -45^\circ} = 33,9 \angle -75^\circ$$

c.  $I_L = \sqrt{3}I_\phi = (1,73)(34) = 58,82$  A. Par conséquent:

$$I_{Aa} = I_{Bb} = I_{Cc} = 58,82 \text{ A}$$

**EXEMPLE 21.4** Voir le système  $\Delta$ -Y illustré à la figure 21.21.

- Calculer la tension aux bornes de chaque phase du récepteur.
- Calculer la grandeur des tensions de ligne.



**FIG. 21.21** Système  $\Delta$ -Y.

*Solution:*

a.  $I_{\phi R} = I_L$ . Par conséquent:

$$I_{an} = I_{Aa} = 2 \angle 0^\circ$$

$$I_{bn} = I_{Bb} = 2 \angle -120^\circ$$

$$I_{cn} = I_{Cc} = 2 \angle 120^\circ$$



Les tensions de phase sont:

$$V_{an} = I_{an}Z_{an} = (2 \angle 0^\circ)(10 \angle -53,13^\circ) = 20 \angle -53,13^\circ$$

$$V_{bn} = I_{bn}Z_{bn} = (2 \angle -120^\circ)(10 \angle -53,13^\circ) = 20 \angle -173,13^\circ$$

$$V_{cn} = I_{cn}Z_{cn} = (2 \angle 120^\circ)(10 \angle -53,13^\circ) = 20 \angle 66,87^\circ$$

b.  $E_L = \sqrt{3}V_\phi = (1,73)(20) = 34,6 \text{ V}$  ou

$$E_{BA} = E_{CB} = E_{AC} = 34,6 \text{ V}$$

## 21.10 PUISSANCE

**Récepteur équilibré monté en étoile** (figure 21.22)

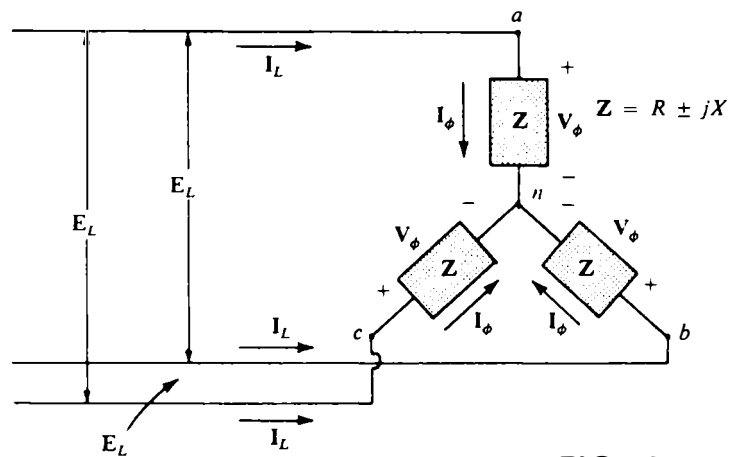


FIG. 21.22

**Puissance moyenne** La puissance moyenne fournie à chaque phase peut être déterminée au moyen de l'équation (21.14), de l'équation (21.15) ou de l'équation (21.16).

$$P_\phi = V_\phi I_\phi \cos \theta_{I_\phi}^V = I_\phi^2 R_\phi = \frac{V_\phi^2}{R_\phi} \quad (\text{W}) \quad (21.14)$$

Dans la relation ci-dessus,  $\theta_{I_\phi}^V$  indique que  $\theta$  est le déphasage entre  $V_\phi$  et  $I_\phi$ . La puissance totale fournie au récepteur équilibré est:

$$P_T = 3P_\phi \quad (\text{W}) \quad (21.15)$$

ce qui s'écrit ainsi:

$$P_T = 3 \frac{E_L}{\sqrt{3}} I_L \cos \theta_{I_\phi}^V$$

puisque:

$$V_\phi = \frac{E_L}{\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad I_\phi = I_L$$

Mais:

$$\frac{3}{\sqrt{3}} (1) = \left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$



On a par conséquent:

$$P_T = \sqrt{3}E_L I_L \cos \theta_{I_\phi}^V = 3I_L^2 R_\phi \quad (\text{W}) \quad (21.16)$$

**Puissance réactive** La puissance réactive dans chaque phase est:

$$Q_\phi = V_\phi I_\phi \sin \theta_{I_\phi}^V = I_\phi^2 X_\phi = \frac{V_\phi^2}{X_\phi} \quad (\text{vars}) \quad (21.17)$$

La puissance réactive totale du récepteur est:

$$Q_T = 3Q_\phi \quad (\text{vars}) \quad (21.18)$$

ce qui s'écrit ainsi, si on procède de la manière ci-dessus:

$$Q_T = \sqrt{3}E_L I_L \sin \theta_{I_\phi}^V = 3I_L^2 X_\phi \quad (\text{vars}) \quad (21.19)$$

**Puissance apparente** La puissance apparente dans chaque phase est:

$$S_\phi = V_\phi I_\phi \quad (\text{voltampères}) \quad (21.20)$$

La puissance apparente totale du récepteur est:

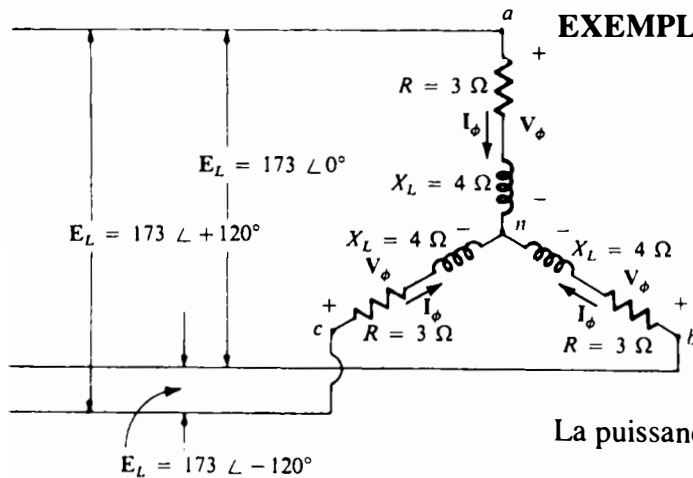
$$S_T = 3S_\phi \quad (\text{voltampères}) \quad (21.21)$$

ce qui s'écrit ainsi:

$$S_T = \sqrt{3}E_L I_L \quad (\text{voltampères}) \quad (21.22)$$

**Facteur de puissance** Le facteur de puissance du récepteur est donné par la relation:

$$F_p = \frac{P_T}{S_T} = \cos \theta \quad (\text{inductif ou capacitif}) \quad (21.23)$$



**EXEMPLE 21.5** Voir la figure 21.23.

$$Z_\phi = 3 + j4 = 5 \angle 53,13^\circ$$

$$V_\phi = \frac{V_L}{\sqrt{3}} = \frac{173}{1,73} = 100 \text{ V}$$

$$I_\phi = \frac{V_\phi}{Z_\phi} = \frac{100}{5} = 20 \text{ A}$$

La puissance moyenne est:

$$P_\phi = V_\phi I_\phi \cos \theta_{I_\phi}^V = (100)(20)\cos 53,13^\circ = (2000)(0,6) = 1200 \text{ W}$$

FIG. 21.23



$$P_\phi = I_\phi^2 R_\phi = (20^2)(3) = (400)(3) = 1200 \text{ W}$$

$$P_\phi = \frac{V_R^2}{R_\phi} = \frac{60^2}{3} = \frac{3600}{3} = 1200 \text{ W}$$

$$P_T = 3P_\phi = (3)(1200) = 3600 \text{ W}$$

ou encore:

$$P_T = \sqrt{3}E_L I_L \cos \theta_{I_\phi}^V = (1,73)(173)(20)(0,6) = 3600 \text{ W}$$

La puissance réactive est:

$$Q_\phi = V_\phi I_\phi \sin \theta_{I_\phi}^V = (100)(20) \sin 53,13^\circ = 2000(0,8) = 1600 \text{ vars}$$

ou encore:

$$Q_\phi = I_\phi^2 X_\phi = (20^2)(4) = (400)(4) = 1600 \text{ vars}$$

$$Q_T = 3Q_\phi = (3)(1600) = 4800 \text{ vars}$$

ou encore:

$$Q_T = \sqrt{3}E_L I_L \sin \theta_{I_\phi}^V = (1,73)(173)(20)(0,8) = 4800 \text{ vars}$$

La puissance apparente est:

$$S_\phi = V_\phi I_\phi = (100)(20) = 2000 \text{ VA}$$

$$S_T = 3S_\phi = (3)(2000) = 6000 \text{ VA}$$

ou encore:

$$S_T = \sqrt{3}E_L I_L = (1,73)(173)(20) = 6000 \text{ VA}$$

Le facteur de puissance est:

$$F_p = \frac{P_T}{S_T} = \frac{3600}{6000} = 0,6 \text{ (inductif)}$$

### Récepteur équilibré monté en triangle

(figure 21.24)

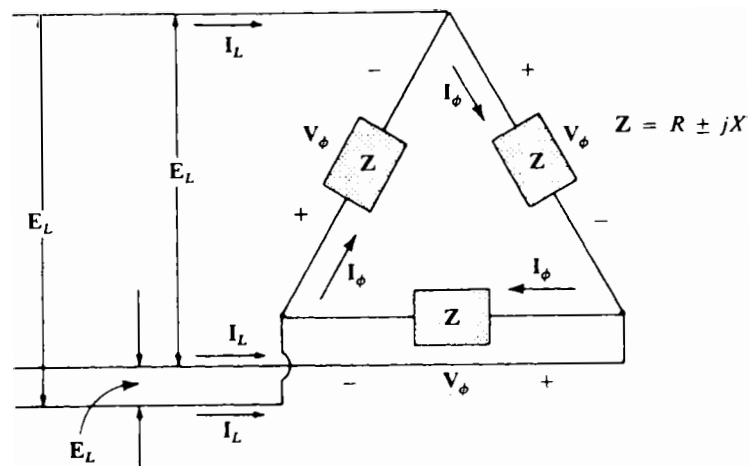


FIG. 21.24

**Puissance moyenne**

$$P_\phi = V_\phi I_\phi \cos \theta_{I_\phi}^V = I_\phi^2 R_\phi = \frac{V_R^2}{R_\phi} \quad (\text{W}) \quad (21.24)$$

$$P_T = 3P_\phi \quad (\text{W}) \quad (21.25)$$

**Puissance réactive**

$$Q_\phi = V_\phi I_\phi \sin \theta_{I_\phi}^V = I_\phi^2 X_\phi = \frac{V_X^2}{X_\phi} \quad (\text{vars}) \quad (21.26)$$

$$P_{qT} = 3P_{q\phi} \quad (\text{vars}) \quad (21.27)$$

**Puissance apparente**

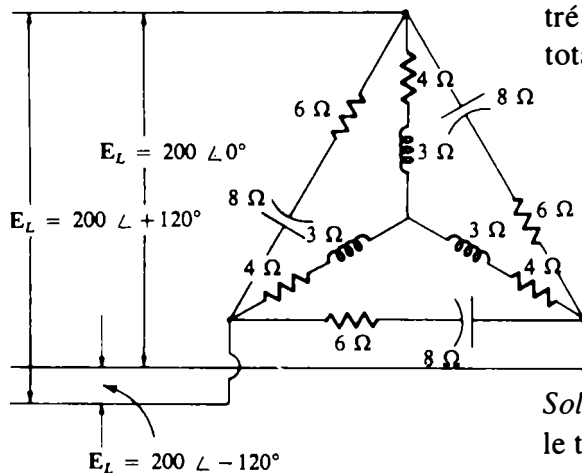
$$S_\phi = V_\phi I_\phi \quad (\text{voltampères}) \quad (21.28)$$

$$S_T = 3S_\phi = \sqrt{3} E_L I_L \quad (\text{voltampères}) \quad (21.29)$$

**Facteur de puissance**

$$F_p = \frac{P_T}{S_T} \quad (21.30)$$

**EXEMPLE 21.6** Déterminer la puissance moyenne, la puissance réactive et la puissance apparente du récepteur illustré à la figure 21.25. Calculer en outre le facteur de puissance total de ce récepteur.



**FIG. 21.25**

*Solution:* Considérons séparément le triangle et l'étoile. Pour le triangle, on a:

$$Z = 6 - j8 = 10 \angle -53,13^\circ$$

$$I_\phi = \frac{200}{10} = 20 \text{ A}$$

$$P_T = 3I_\phi^2 R_\phi = (3)(20^2)(6) = 7200 \text{ W}$$

$$Q_T = 3I_\phi^2 X_\phi = (3)(20^2)(8) = 9600 \text{ vars (cap.)}$$

$$S_T = 3V_\phi I_\phi = (3)(200)(20) = 12\,000 \text{ VA}$$



Pour l'étoile, on a :

$$Z = 4 + j3 = 5 \angle 36,87^\circ$$

$$I_\phi = \frac{200/\sqrt{3}}{5} = \frac{116}{5} = 23,12 \text{ A}$$

$$P_T = 3I_\phi^2 R_\phi = (3)(23,12^2)(4) = \mathbf{6414,41 \text{ W}}$$

$$Q_T = 3I_\phi^2 X_\phi = (3)(23,12^2)(3) = \mathbf{4810,81 \text{ vars (ind.)}}$$

$$S_T = 3V_\phi I_\phi = (3)(116)(23,12) = \mathbf{8045,76 \text{ VA}}$$

$$P_T = P_{T_\Delta} + P_{T_Y} = 7200 + 6414,41 = \mathbf{13\ 614,41 \text{ W}}$$

$$Q_T = Q_{T_\Delta} - Q_{T_Y} = 9600 \text{ (cap.)} - 4810,81 \text{ (ind.)}$$

$$= \mathbf{4789,19 \text{ vars (cap.)}}$$

$$S_T = \sqrt{P_T^2 + Q_T^2} = \sqrt{(13\ 614,41)^2 + (4\ 789,19)^2}$$

$$= \mathbf{14\ 432,2 \text{ VA}}$$

$$F_p = \frac{P_T}{S_T} = \frac{13\ 614,41}{14\ 432,20} = \mathbf{0,943 \text{ (capacitif)}}$$

## 21.11 LA MÉTHODE DES TROIS WATTMÈTRES

La puissance fournie à un récepteur à quatre conducteurs monté en étoile, équilibré ou déséquilibré, peut être déterminée au moyen de trois wattmètres raccordés de la façon illustrée à la figure 21.26. Chaque wattmètre mesure la puissance fournie à chaque phase du récepteur. Le cadre mobile de chaque wattmètre est raccordé en parallèle avec le récepteur, alors que le cadre fixe est en série. La puissance moyenne totale du récepteur est égale à la somme des indications des trois wattmètres, c'est-à-dire :

$$P_{T_Y} = P_1 + P_2 + P_3$$

(21.31)

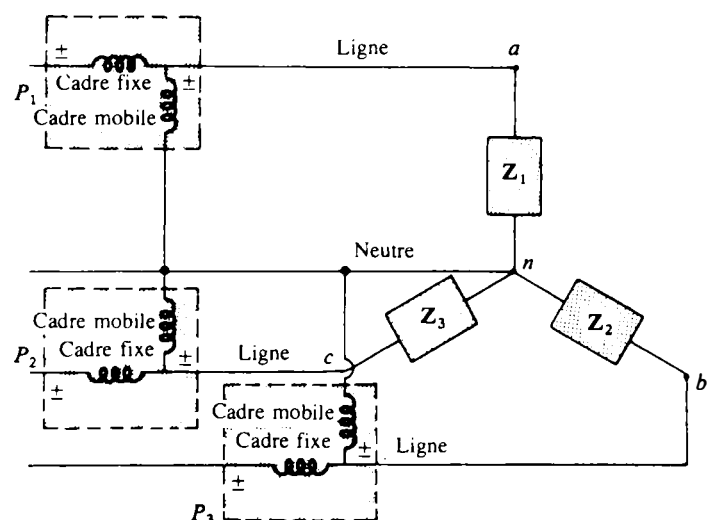


FIG. 21.26

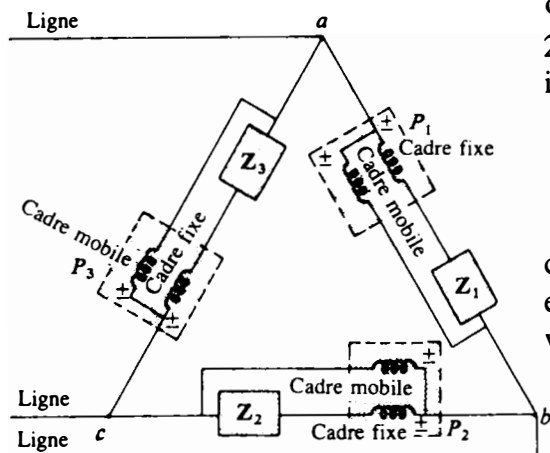


FIG. 21.27

Pour le récepteur monté en triangle (équilibré ou déséquilibré), on raccorde les wattmètres de la façon illustrée à la figure 21.27. La puissance totale est aussi égale à la somme des indications des trois wattmètres:

$$P_{T\Delta} = P_1 + P_2 + P_3 \quad (21.32)$$

Si dans les deux cas ci-dessus le récepteur est équilibré, chaque phase reçoit la même puissance. La puissance totale est alors tout simplement le triple de l'indication de l'un des wattmètres.

## 21.12 LA MÉTHODE DES DEUX WATTMÈTRES

La puissance fournie à un récepteur Y ou  $\Delta$  triphasé à trois fils, équilibré ou déséquilibré, peut être déterminé au moyen de deux wattmètres seulement, à condition de bien raccorder les deux appareils et de bien interpréter leurs indications. Le raccordement de base des deux appareils est représenté à la figure 21.28. Une extrémité de chacun des cadres mobiles est raccordée à une même ligne. Les cadres fixes sont alors mis en série avec les deux autres lignes.

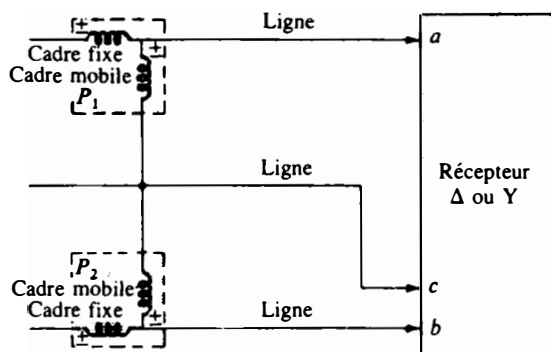


FIG. 21.28

Le raccordement illustré à la figure 21.29 répond aussi aux mêmes exigences. Un troisième raccordement est possible mais nous laissons au lecteur la tâche de le déterminer, à titre d'exercice.

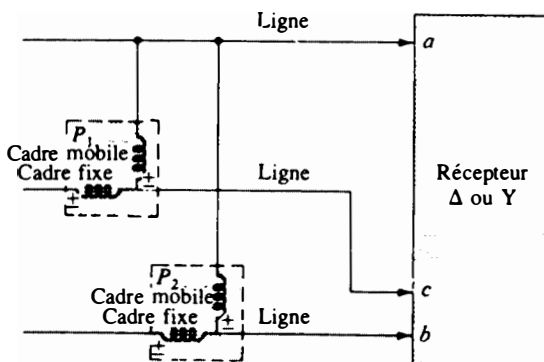


FIG. 21.29



La puissance totale fournie au récepteur est la somme algébrique des indications des deux wattmètres. Nous allons maintenant considérer, pour un récepteur *équilibré*, deux méthodes permettant de déterminer si la puissance est la somme arithmétique ou la différence arithmétique des indications des deux wattmètres. La première méthode suppose que nous connaissons ou que nous sachions déterminer le facteur de puissance (inductif ou capacitif) de l'une quelconque des phases du récepteur. L'utilisation de la courbe à la figure 21.30 n'est possible que si le facteur de puissance est connu.

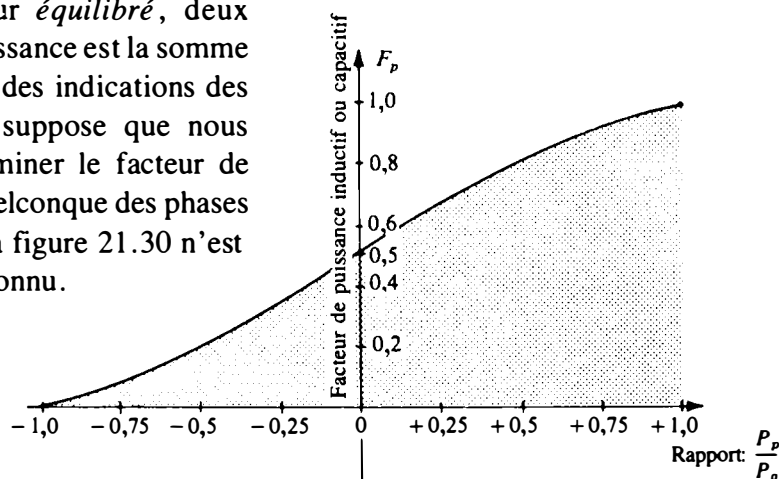


FIG. 21.30

Cette courbe est le tracé du facteur de puissance de l'une quelconque des phases du récepteur en fonction du rapport  $P_p/P_g$ , où  $P_p$  et  $P_g$  sont les grandeurs de la plus petite et de la plus grande des indications des wattmètres, respectivement. Notons que le rapport est positif du moment que le facteur de puissance (inductif ou capacitif) est supérieur à 0,5. Ce fait indique que les deux wattmètres fournissent des indications positives et que la puissance totale est égale à la somme des deux indications des wattmètres, c'est-à-dire  $P_T = P_p + P_g$ . Le rapport est par contre négatif si le facteur de puissance est inférieur à 0,5 (qu'il soit capacitif ou inductif). Il faut alors soustraire la plus petite des indications de la plus grande pour obtenir la puissance totale, c'est-à-dire  $P_T = P_g - P_p$ .

Un examen plus attentif révèle qu'un facteur de puissance égal à 1 ( $\cos 0^\circ = 1$ ) correspond à un récepteur purement résistif, et qu'alors  $P_p/P_g = 1$  ou  $P_p = P_g$  et que les indications des deux wattmètres sont identiques. Par ailleurs, un facteur de puissance égal à 0 ( $\cos 90^\circ = 0$ ) correspond à un récepteur purement réactif, et alors  $P_p/P_g = -1$  ou  $P_p = -P_g$  et les indications des deux wattmètres sont encore les mêmes, mais de signes opposés. Le passage d'un rapport positif à un rapport négatif se produit lorsque le facteur de puissance du récepteur est de 0,5 ou lorsque  $\theta = \cos^{-1} 0,5 = 60^\circ$ . Quand le facteur de puissance a cette valeur,  $P_p/P_g = 0$ , de sorte que  $P_p = 0$  et que  $P_g$  représente la puissance totale fournie au récepteur.

La deuxième méthode permettant de déterminer si la puissance totale est la somme arithmétique ou la différence arithmétique des indications des deux wattmètres exige la tenue d'un essai simple en laboratoire. Pour que l'essai puisse être exécuté, les aiguilles des deux wattmètres doivent dévier vers le haut de l'échelle. Si l'aiguille de l'un des wattmètres dévie vers le bas de l'échelle, il faudra donc inverser les connexions faites aux bornes de la bobine fixe du wattmètre pour que l'aiguille dévie vers le haut de l'échelle. L'essai s'exécute





de la façon suivante. On débranche d'abord la sonde du cadre mobile du wattmètre *fournissant la plus petite indication* de la ligne avec laquelle aucune bobine fixe n'est en série. On applique ensuite la pointe de cette sonde sur la ligne avec laquelle la bobine fixe du wattmètre *fournissant l'indication la plus grande* est en série. Si l'aiguille du wattmètre fournissant la plus petite indication dévie vers le haut, il faut faire la somme arithmétique des indications des deux wattmètres. Si au contraire l'aiguille dévie vers le bas, sous zéro watt, il faut soustraire la plus petite indication de l'indication la plus grande.

Par ailleurs, comme dans un récepteur équilibré:

$$P_T = P_g \pm P_p = \sqrt{3}E_L I_L \cos \theta_{I_\phi}^V$$

on peut déterminer le facteur de puissance de l'une quelconque des phases du récepteur en fonction des indications du wattmètre, de la grandeur de la tension de ligne et de l'intensité du courant de ligne:

$$F_p = \cos \theta_{I_\phi}^V = \frac{P_g \pm P_p}{\sqrt{3}E_L I_L} \quad (21.33)$$

### 21.13 RÉCEPTEUR TRIPHASÉ À QUATRE CONDUCTEURS MONTÉ EN ÉTOILE ET DÉSÉQUILIBRÉ

Dans un récepteur triphasé à quatre conducteurs monté en étoile et déséquilibré (figure 21.31), on a:

$$Z_1 \neq Z_2 \neq Z_3$$

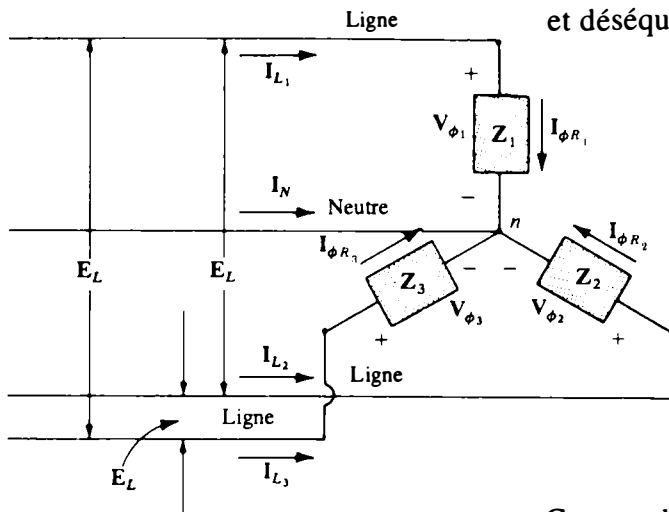


FIG. 21.31 Récepteur Y déséquilibré.

Comme le neutre est le point commun au récepteur et à la source, peu importe l'impédance de chacune des phases du récepteur, la tension aux bornes de chaque phase est la tension de phase de l'alternateur:

$$V_\phi = E_\phi \quad (21.34)$$

Il est donc possible de déterminer les courants de phase au moyen de la loi d'Ohm:



$$\boxed{I_{\phi_1} = \frac{V_{\phi_1}}{Z_1} = \frac{E_{\phi_1}}{Z_1}, \text{ etc.}} \quad (21.35)$$

Le courant dans le conducteur neutre d'un système déséquilibré peut par ailleurs se calculer par l'application de la loi des courants de Kirchhoff au point commun  $N'$ . On obtient ainsi:

$$\boxed{I_N = I_{\phi_1} + I_{\phi_2} + I_{\phi_3} = I_{L_1} + I_{L_2} + I_{L_3}} \quad (21.36)$$

### 21.14 RÉCEPTEUR TRIPHASÉ À TROIS CONDUCTEURS MONTÉ EN ÉTOILE ET DÉSÉQUILIBRÉ

Un récepteur triphasé à trois conducteurs monté en étoile et déséquilibré est représenté à la figure 21.32. Les équations cherchées peuvent être obtenues par application de la loi des tensions de Kirchhoff sur chacune des boucles. On obtient ainsi:

$$E_{BA} - V_{an} + V_{bn} = 0$$

$$E_{CB} - V_{bn} + V_{cn} = 0$$

$$E_{AC} - V_{cn} + V_{an} = 0$$

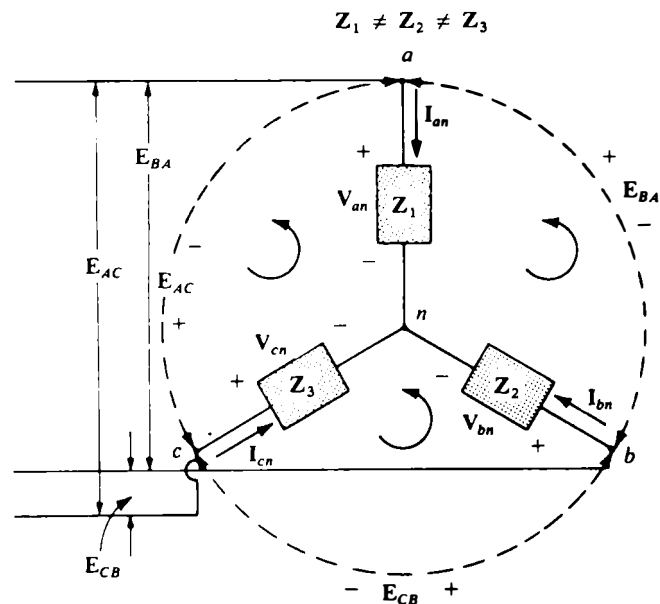


FIG. 21.32

Par substitution, on a:

$$V_{an} = I_{an}Z_1 \quad V_{bn} = I_{bn}Z_2 \quad V_{cn} = I_{cn}Z_3$$

$$\boxed{E_{BA} = I_{an}Z_1 - I_{bn}Z_2} \quad (21.37a)$$

$$\boxed{E_{CB} = I_{bn}Z_2 - I_{cn}Z_3} \quad (21.37b)$$

$$\boxed{E_{AC} = I_{cn}Z_3 - I_{an}Z_1} \quad (21.37c)$$

Appliquons maintenant la loi des courants de Kirchhoff au point  $N'$ . Nous obtenons:

$$I_{an} + I_{bn} + I_{cn} = 0 \quad \text{et} \quad I_{bn} = -I_{an} - I_{cn}$$



Par substitution de  $I_{bn}$  dans les équations (21.37a) (21.37b) on obtient:

$$\begin{aligned} E_{BA} &= I_{an}Z_1 - [-(I_{an} + I_{cn})]Z_2 \\ E_{CB} &= -(I_{an} + I_{cn})Z_2 - I_{cn}Z_3 \end{aligned}$$

ce qui peut se réécrire ainsi:

$$\begin{aligned} E_{BA} &= I_{an}(Z_1 + Z_2) + I_{cn}Z_2 \\ E_{CB} &= I_{an}(-Z_2) + I_{cn}[-(Z_2 + Z_3)] \end{aligned}$$

Par la méthode des déterminants, on obtient:

$$\begin{aligned} I_{an} &= \frac{\begin{vmatrix} E_{BA} & Z_2 \\ E_{CB} & -(Z_2 + Z_3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_1 + Z_2 & Z_2 \\ -Z_2 & -(Z_2 + Z_3) \end{vmatrix}} \\ &= \frac{-(Z_2 + Z_3)E_{BA} - E_{CB}Z_2}{-Z_1Z_2 - Z_1Z_3 - Z_2Z_3 - Z_2^2 + Z_2^2} \\ I_{an} &= \frac{-Z_2(E_{BA} + E_{CB}) - Z_3E_{BA}}{-Z_1Z_2 - Z_1Z_3 - Z_2Z_3} \end{aligned}$$

Appliquons maintenant la loi des tensions de Kirchhoff aux tensions de ligne, ce qui donne:

$$E_{BA} + E_{AC} + E_{CB} = 0 \quad \text{ou} \quad E_{BA} + E_{CB} = -E_{AC}$$

On obtient enfin par substitution de  $E_{BA} + E_{CB}$  dans l'équation ci-dessus donnant l'expression de  $I_{an}$ :

$$I_{an} = \frac{-Z_2(-E_{AC}) - Z_3E_{BA}}{-Z_1Z_2 - Z_1Z_3 - Z_2Z_3}$$

et:

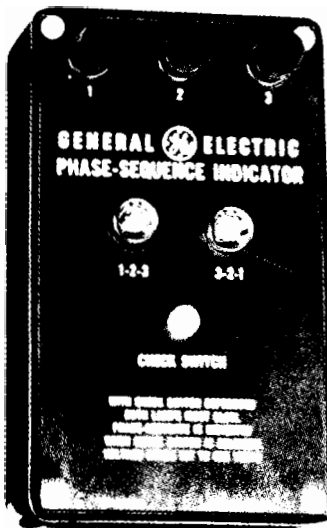
$$I_{an} = \frac{E_{BA}Z_3 - E_{AC}Z_2}{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3} \quad (21.38)$$

De la même manière, on peut démontrer que:

$$I_{cn} = \frac{E_{AC}Z_2 - E_{CB}Z_1}{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3} \quad (21.39)$$

Finalement, on obtient en substituant l'équation (21.39) au membre droit de l'équation (21.37b):

$$I_{bn} = \frac{E_{CB}Z_1 - E_{BA}Z_3}{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3} \quad (21.40)$$



Courtoisie de General Electric Co.

**FIG. 21.33** Indicateur d'ordre des phases.

**EXEMPLE 21.7** L'indicateur d'ordre des phases (figure 21.33) est un appareil qui permet de déterminer l'ordre des phases d'un circuit polyphasé. Les numéros 1, 2 et 3 correspondent aux bornes A, B et C utilisées dans notre étude.



La figure 21.34 représente un circuit pouvant jouer le même rôle que l'indicateur illustré à la figure 21.33. L'ordre des phases indiqué est *ABC*. Le voyant correspondant à cet ordre brille plus intensément que le voyant indiquant l'ordre *ACB*, car le courant qui le traverse est plus grand que le courant qui traverse ce dernier. À l'aide du circuit illustré, calculons les courants de phase pour vérifier si de fait cette situation existe. On a:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{(377)(16 \times 10^{-6})} = 166 \Omega$$

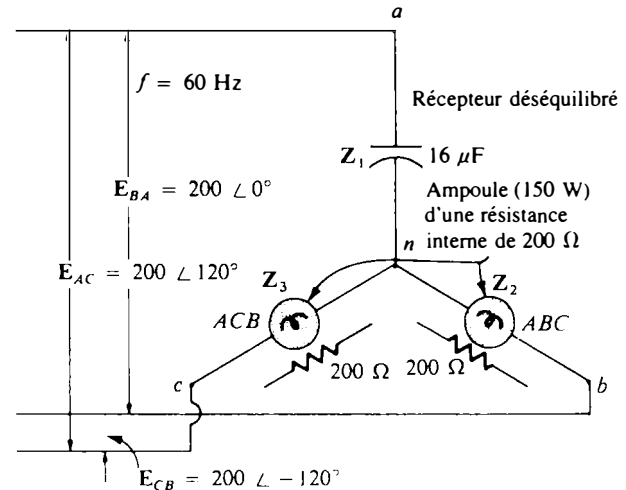


FIG. 21.34

L'équation (21.39) donne:

$$\begin{aligned} I_{cn} &= \frac{E_{AC}Z_2 - E_{CB}Z_1}{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3} \\ &= \frac{(200 \angle 120^\circ)(200 \angle 0^\circ) - (200 \angle -120^\circ)(166 \angle -90^\circ)}{(166 \angle -90^\circ)(200 \angle 0^\circ) + (166 \angle -90^\circ)(200 \angle 0^\circ) + (200 \angle 0^\circ)(200 \angle 0^\circ)} \\ &= \frac{40\,000 \angle 120^\circ + 33\,200 \angle -30^\circ}{33\,200 \angle -90^\circ + 33\,200 \angle -90^\circ + 40\,000 \angle 0^\circ} \end{aligned}$$

Divisons le numérateur et le dénominateur par 1000 et exprimons les quantités en coordonnées rectangulaires:

$$\begin{aligned} I_{cn} &= \frac{(-20 + j34,64) + (28,75 - j16,60)}{40 - j66,4} \\ &= \frac{8,75 + j18,04}{77,52 \angle -58,93^\circ} = \frac{20,05 \angle 64,13^\circ}{77,52 \angle -58,93^\circ} \\ I_{cn} &= 0,259 \angle 123,06^\circ \end{aligned}$$

De même, l'équation (21.40) donne:

$$\begin{aligned} I_{bn} &= \frac{E_{CB}Z_1 - E_{BA}Z_3}{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3} \\ &= \frac{(200 \angle -120^\circ)(166 \angle -90^\circ) - (200 \angle 0^\circ)(200 \angle 0^\circ)}{77,5 \times 10^3 \angle -59,3^\circ} \\ &= \frac{33\,200 \angle -210^\circ - 40\,000 \angle 0^\circ}{77,5 \times 10^3 \angle -59,3^\circ} \\ &= \frac{-28,7 + j16,6 - 40}{77,5 \angle -59,3^\circ} = \frac{-68,7 + j16,6}{77,5 \angle -59,3^\circ} \end{aligned}$$



Divisons le numérateur et le dénominateur par 1000 et exprimons les quantités en coordonnées rectangulaires:

$$\begin{aligned} I_{bn} &= \frac{-28,75 + j16,60 - 40,0}{77,52 \angle -58,93^\circ} \\ &= \frac{-68,75 + j16,60}{77,52 \angle -58,93^\circ} \\ &= \frac{70,73 \angle 166,43^\circ}{77,52 \angle -58,93^\circ} \\ I_{bn} &= 0,91 \angle 225,36^\circ \end{aligned}$$

et de fait  $I_{bn} > I_{cn}$ . Le voyant indiquant l'ordre  $ABC$  brille donc plus intensément, car il est parcouru par un courant plus intense. Si l'ordre des phases avait été  $ACB$ , c'est l'autre voyant qui aurait brillé plus intensément.

## PROBLÈMES

### Section 21.5

- Un récepteur Y équilibré, dont la résistance de chaque phase est de  $10 \Omega$ , est raccordé à un alternateur triphasé à quatre conducteurs monté en étoile dont la tension de ligne est de 208 V. Calculez:
  - la grandeur de la tension de phase de l'alternateur;
  - la grandeur de la tension de phase du récepteur;
  - l'intensité du courant de phase du récepteur;
  - l'intensité du courant de ligne.
- Refaites le problème 1 pour un récepteur dont chaque phase est constituée d'une résistance de  $12 \Omega$  en série avec une réactance capacitive de  $16 \Omega$ .
- Refaites le problème 1 pour un récepteur dont chaque phase est constituée d'une résistance de  $10 \Omega$  en parallèle avec une réactance capacitive de  $10 \Omega$ .
- L'ordre des phases du système Y-Y à la figure 21.35 est  $ABC$ .

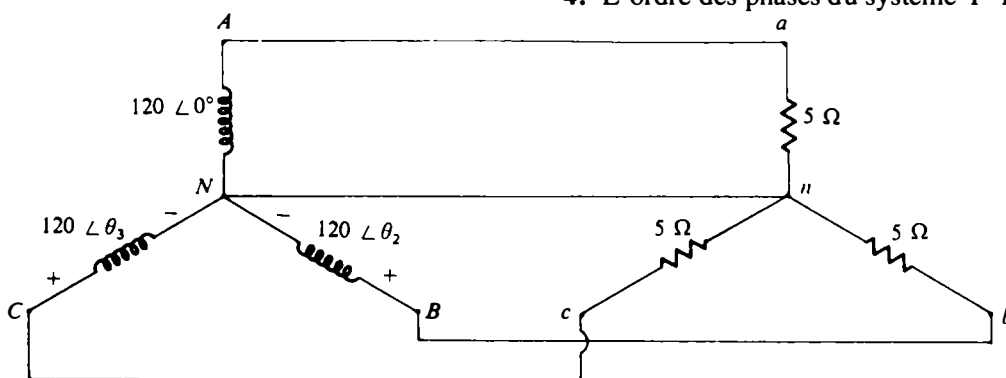


FIG. 21.35

- Calculez les angles  $\theta_2$  et  $\theta_3$ .
- Déterminez sous forme vectorielle la tension aux bornes de chaque phase.
- Déterminez sous forme vectorielle le courant passant dans chaque phase.



- d. Tracez le diagramme de phase des courants déterminés à la partie (c) et démontrez que leur somme vectorielle est de 0.
  - e. Calculez l'intensité des courants de ligne.
  - f. Calculez la grandeur des tensions de ligne.
5. Refaites le problème 4 pour un système dont les phases sont constituées d'une résistance de  $9 \Omega$  en série avec une réactance inductive de  $12 \Omega$ .
6. Refaites le problème 4 pour un système dont les phases sont constituées d'une résistance de  $6 \Omega$  en parallèle avec une réactance capacitive de  $8 \Omega$ .
7. Calculez la grandeur des tensions inconnues et l'intensité des courants inconnus du système illustré à la figure 21.36.

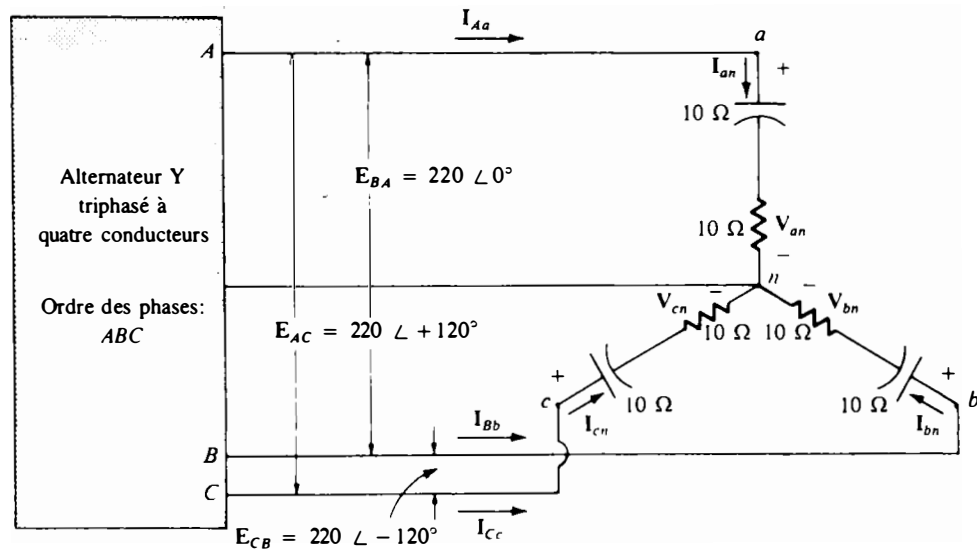


FIG. 21.36

- \*8. Calculez la grandeur de la tension  $E_{BA}$  du système triphasé équilibré illustré à la figure 21.37.

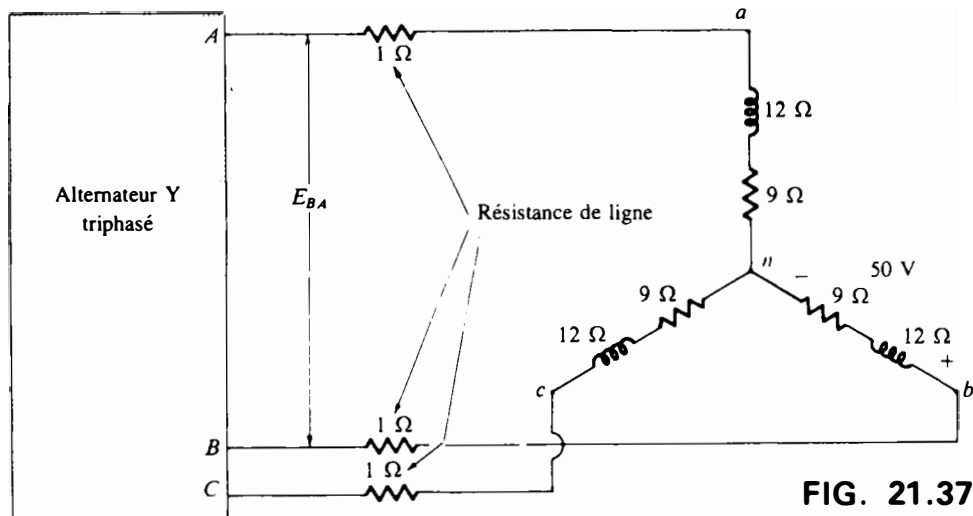


FIG. 21.37

Section 21.6

9. Un récepteur en triangle équilibré dont chaque phase est d'une résistance de  $20 \Omega$  est raccordé à un alternateur monté en étoile, triphasé et à trois fils, dont la tension de ligne est de  $208 \text{ V}$ . Calculez:
- a. la grandeur de la tension de phase de l'alternateur;
  - b. la grandeur de la tension de phase du récepteur;



- c. l'intensité du courant de phase du récepteur;
- d. l'intensité du courant de ligne.

10. Refaites le problème 9 pour un récepteur dont chaque phase est constituée d'une résistance de  $7 \Omega$  en série avec une réactance inductive de  $14 \Omega$ .
11. Refaites le problème 9 pour un récepteur dont chaque phase est constituée d'une résistance de  $8 \Omega$  en parallèle avec une réactance capacitive de  $8 \Omega$ .
12. L'ordre des phases du système Y- $\Delta$  illustré à la figure 21.38 est ABC.
  - a. Calculez les angles  $\theta_2$  et  $\theta_3$ .
  - b. Déterminez sous forme vectorielle la tension aux bornes de chaque phase.
  - c. Tracez le diagramme de phase des tensions déterminées à la partie (b) et démontrez que leur somme est de 0 pour la boucle formée par le récepteur monté en triangle.
  - d. Déterminez sous forme vectorielle le courant qui passe dans chaque phase.
  - e. Calculez l'intensité des courants de ligne.
  - f. Calculez la grandeur des tensions de phase de l'alternateur.

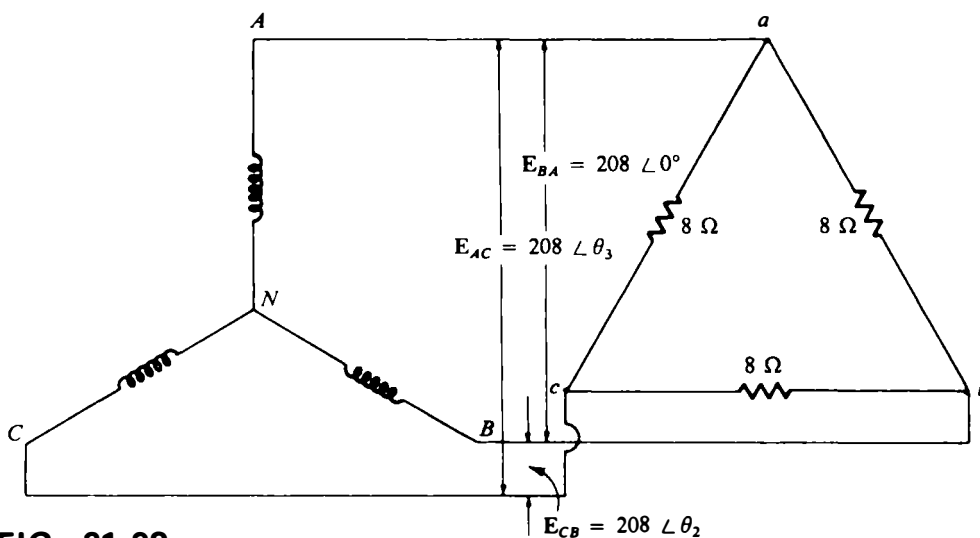
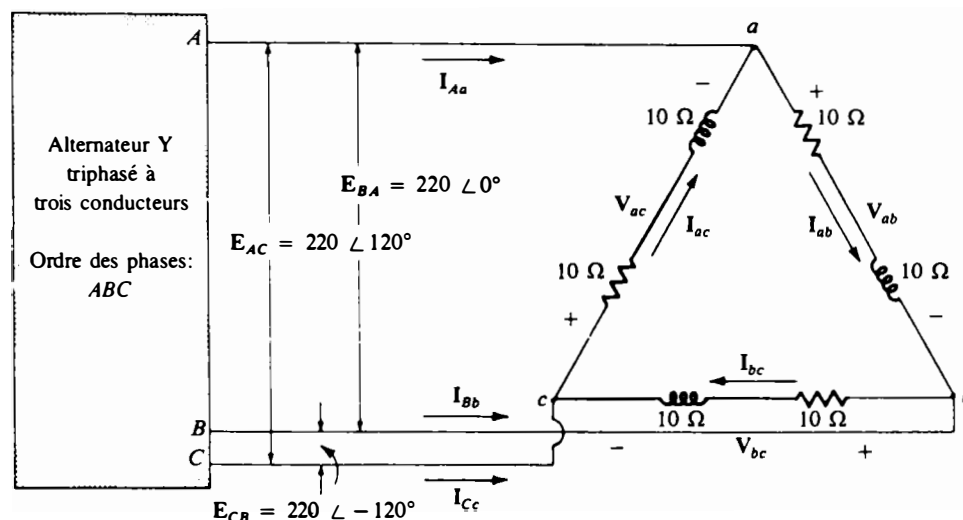


FIG. 21.38

13. Refaites le problème 12 pour un récepteur dont les phases sont constituées d'une résistance de  $100 \Omega$  en série avec une réactance capacitive de  $100 \Omega$ .
14. Refaites le problème 12 pour un récepteur dont les phases sont constituées d'une résistance de  $3 \Omega$  en parallèle avec une réactance inductive de  $4 \Omega$ .
15. Calculez les grandeurs des tensions inconnues et l'intensité des courants inconnus du système illustré à la figure 21.39.

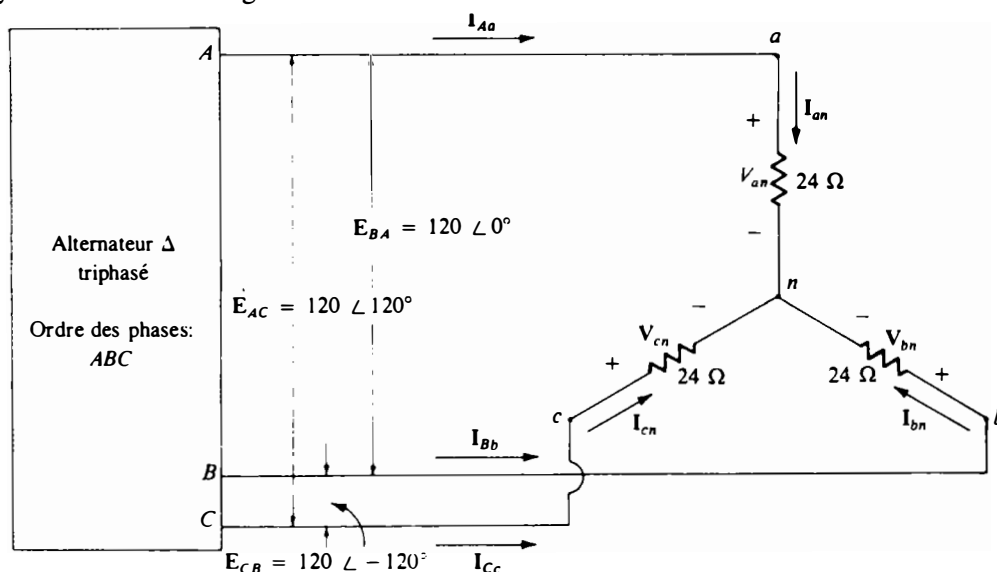
### Section 21.9

16. Un récepteur Y équilibré, dont chaque phase est constituée d'une résistance de  $6 \Omega$ , est raccordé à un alternateur triphasé monté en triangle dont la tension de ligne est de  $208 \text{ V}$ . Calculez:
  - a. la grandeur de la tension de phase de l'alternateur;
  - b. la grandeur de la tension de phase du récepteur;



- c. l'intensité du courant de phase du récepteur;
- d. l'intensité du courant de ligne.

17. Refaites le problème 16 pour un récepteur dont chaque phase est constituée d'une résistance de  $9 \Omega$  en série avec une réactance inductive de  $9 \Omega$ .
18. Refaites le problème 16 pour un récepteur dont chaque phase est constituée d'une résistance de  $15 \Omega$  en parallèle avec une réactance capacitive de  $20 \Omega$ .
- \*19. Calculez les grandeurs des tensions inconnues et l'intensité des courants inconnus du système illustré à la figure 21.40.



20. Refaites le problème 19 pour un récepteur dont chaque phase est constituée d'une résistance de  $10 \Omega$  en série avec une réactance inductive de  $20 \Omega$ .
21. Refaites le problème 19 pour un récepteur dont chaque phase est constituée d'une résistance de  $20 \Omega$  en parallèle avec une réactance capacitive de  $15 \Omega$ .
22. Un récepteur  $\Delta$  équilibré dont chaque phase est constituée d'une résistance de  $50 \Omega$  est raccordé à un alternateur  $\Delta$  triphasé dont la tension de ligne est de  $440 \text{ V}$ . Calculez:
  - a. la grandeur de la tension de phase de l'alternateur;
  - b. la grandeur de la tension de phase du récepteur;

FIG. 21.40





- c. l'intensité du courant de phase du récepteur;  
d. l'intensité du courant de ligne.
23. Refaites le problème 22 pour un récepteur dont chaque phase est constituée d'une résistance de  $12 \Omega$  en série avec une réactance capacitive de  $9 \Omega$ .
24. Refaites le problème 22 pour un récepteur dont chaque phase est constituée d'une résistance de  $6 \Omega$  en parallèle avec une réactance inductive de  $6 \Omega$ .
25. L'ordre des phases du système  $\Delta$ - $\Delta$  illustré à la figure 21.41 est  $ABC$ .
- a. Calculez les angles  $\theta_2$  et  $\theta_3$ .  
b. Déterminez sous forme vectorielle la tension aux bornes de chaque phase.  
c. Tracez le diagramme de phase des tensions déterminées à la partie (b) et démontrez que leur somme est de 0 pour la boucle formée par le récepteur monté en triangle.  
d. Déterminez sous forme vectorielle le courant qui passe dans chaque phase.  
e. Calculez l'intensité des courants de ligne.

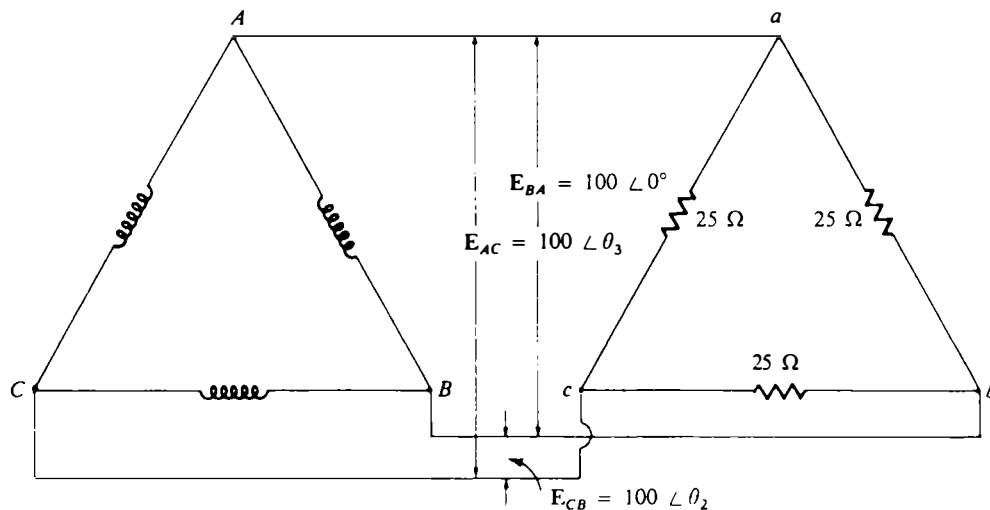


FIG. 21.41

26. Refaites le problème 25 pour un récepteur dont chaque phase est constituée d'une résistance de  $12 \Omega$  en série avec une réactance inductive de  $16 \Omega$ .
27. Refaites le problème 25 pour un récepteur dont chaque phase est constituée d'une résistance de  $20 \Omega$  en parallèle avec une réactance capacitive de  $20 \Omega$ .

## Section 21.10

28. Calculez la puissance moyenne, la puissance réactive, la puissance apparente et le facteur de puissance du système polyphasé décrit au problème 2.
29. Calculez la puissance moyenne, la puissance réactive, la puissance apparente et le facteur de puissance du système polyphasé décrit au problème 4.
30. Calculez la puissance moyenne, la puissance réactive, la puissance apparente et le facteur de puissance du système polyphasé décrit au problème 7.



- 31. Calculez la puissance moyenne, la puissance réactive, la puissance apparente et le facteur de puissance du système polyphasé décrit au problème 11.
- 32. Calculez la puissance moyenne, la puissance réactive, la puissance apparente et le facteur de puissance du système polyphasé décrit au problème 13.
- 33. Calculez la puissance moyenne, la puissance réactive, la puissance apparente et le facteur de puissance du système polyphasé décrit au problème 15.
- 34. Calculez la puissance moyenne, la puissance réactive, la puissance apparente et le facteur de puissance du système polyphasé décrit au problème 18.
- 35. Calculez la puissance moyenne, la puissance réactive, la puissance apparente et le facteur de puissance du système polyphasé décrit au problème 20.
- 36. Calculez la puissance moyenne, la puissance réactive, la puissance apparente et le facteur de puissance du système polyphasé décrit au problème 24.
- 37. Calculez la puissance moyenne, la puissance réactive, la puissance apparente et le facteur de puissance du système polyphasé décrit au problème 26.
- 38. Un récepteur  $\Delta$  triphasé et équilibré a une tension de ligne de 200 V et consomme une puissance totale de 4800 W avec un facteur de puissance inductif de 0,8. Calculez l'impédance de chaque phase du récepteur en coordonnées rectangulaires.
- 39. Un récepteur Y triphasé et équilibré a une tension de ligne de 208 V et consomme une puissance totale de 1200 W avec un facteur de puissance capacitif de 0,6. Calculez l'impédance de chaque phase du récepteur en coordonnées rectangulaires.
- \*40. Calculez la puissance moyenne, la puissance réactive, la puissance apparente et le facteur de puissance du système illustré à la figure 21.42.

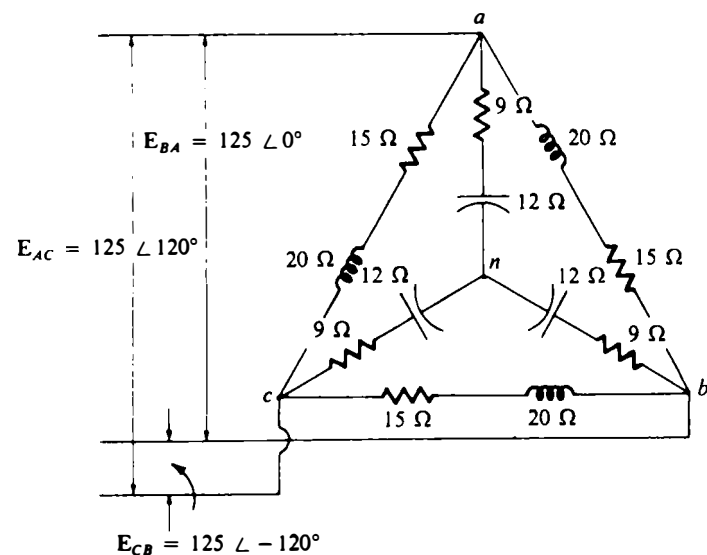


FIG. 21.42

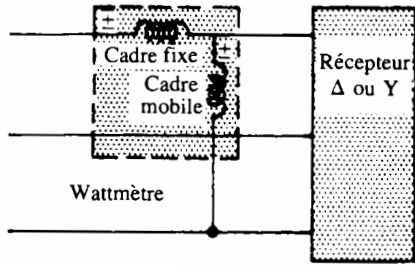


FIG. 21.43

Section 21.11

- 41. a. Dessinez comment il faut raccorder trois wattmètres pour mesurer la puissance totale fournie au récepteur illustré à la figure 21.36.
- b. Calculez la puissance totale dissipée et l'indication de chaque wattmètre.
- 42. Refaites le problème 41 pour le réseau illustré à la figure 21.38.

Section 21.12

- 43. a. Raccordez correctement un deuxième wattmètre au système à trois fils illustré à la figure 21.43, de façon à pouvoir mesurer la puissance totale fournie au récepteur.
- b. Un wattmètre indique 200 W et l'autre, 85 W. Quelle est la puissance totale dissipée, si le facteur de puissance total est de 0,8 (ind.)?
- c. Refaites la partie (b) pour un facteur de puissance total de 0,2 (cap.), si  $P_p = 100$  W.
- 44. Dessinez les trois façons possibles de raccorder deux wattmètres pour mesurer la puissance totale fournie au récepteur décrit au problème 15.

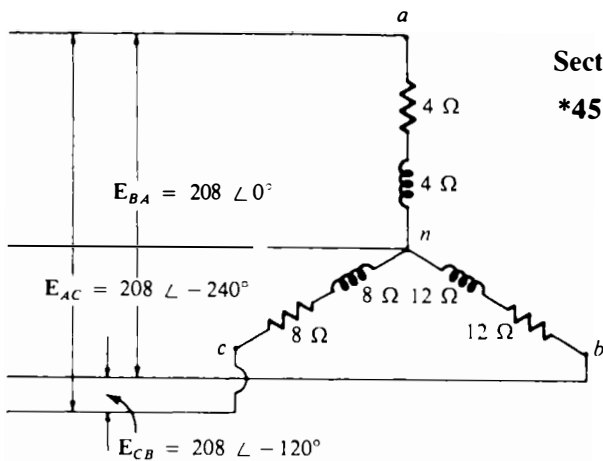


FIG. 21.44

Section 21.13

- \*45. Voir le système illustré à la figure 21.44. Calculez:
  - a. la grandeur de la tension aux bornes de chaque phase du récepteur;
  - b. l'intensité du courant passant dans chaque phase du récepteur;
  - c. la puissance moyenne, la puissance réactive, la puissance apparente et le facteur de puissance du système.

Section 21.14

- \*46. Voir le système triphasé à trois fils illustré à la figure 21.45. Calculez l'intensité du courant qui passe dans chaque phase du récepteur ainsi que la puissance moyenne, la puissance réactive, la puissance apparente et le facteur de puissance du récepteur.

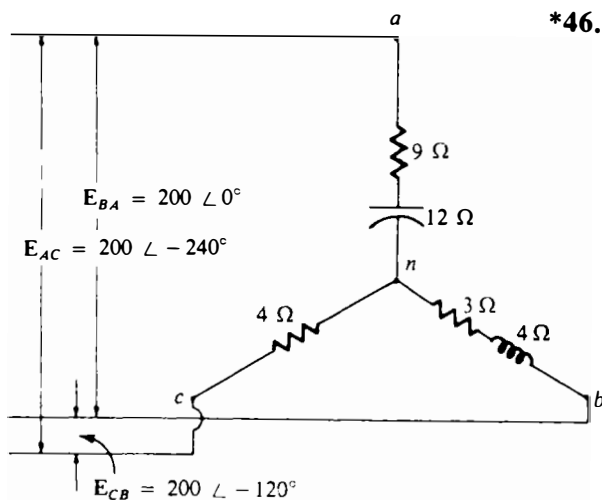


FIG. 21.45



## GLOSSAIRE

**Alternateur monophasé** Source électromécanique de puissance produisant une seule tension sinusoïdale, dont la fréquence est déterminée par la vitesse de rotation et le nombre de pôles du rotor.

**Alternateur monté en étoile** Source de puissance triphasée dont les trois conducteurs de phase sont montés en étoile.

**Alternateur monté en triangle** Source de puissance triphasée dont les trois conducteurs de phase sont montés en triangle.

**Alternateur polyphasé** Source électromécanique de puissance produisant, à chaque tour de rotor, plus d'une tension sinusoïdale. La fréquence des tensions générées est déterminée par la vitesse de rotation et le nombre de pôles du rotor.

**Courant de ligne** Courant passant d'un alternateur à un récepteur monophasé ou polyphasé.

**Courant de phase** Courant passant dans chacun des conducteurs de phase d'un récepteur monophasé ou polyphasé.

**Méthode des deux wattmètres** Méthode de détermination de la puissance totale fournie à un récepteur triphasé monté en triangle ou en étoile ne faisant appel qu'à deux wattmètres, mais exigeant la connaissance du facteur de puissance du récepteur.

**Méthode des trois wattmètres** Méthode de détermination de la puissance totale fournie à un récepteur triphasé faisant appel à trois wattmètres.

**Neutre** Conducteur reliant l'alternateur au récepteur qui, à l'équilibre, n'est parcouru par aucun courant.

**Ordre des phases** Ordre dans lequel les tensions sinusoïdales générées par un alternateur polyphasé se font sentir sur le récepteur.

**Récepteur polyphasé déséquilibré** Récepteur dont les phases ne présentent pas toutes la même impédance.

**Tension de ligne** f.é.m. existant entre les lignes d'un système monophasé ou polyphasé.

**Tension de phase** f.é.m. existant entre la ligne et le neutre d'un alternateur monté en étoile et entre les lignes d'un alternateur monté en triangle.



# APPAREILS DE MESURE POUR LE COURANT ALTERNATIF



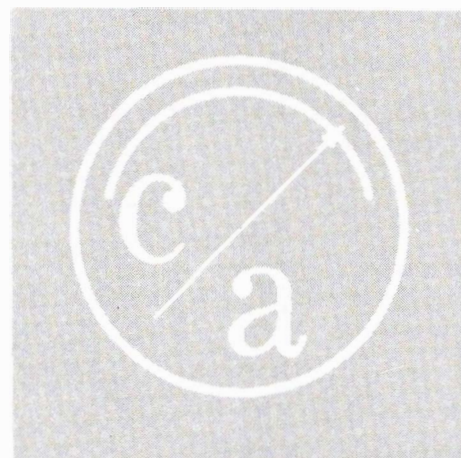
## 22.1 INTRODUCTION

Le cadre mobile et l'équipage électrodynamométrique que nous avons étudiés au chapitre 12 peuvent aussi servir à la réalisation d'appareils de mesure pour le courant alternatif. De fait, les appareils à équipage électrodynamométrique permettent de mesurer des grandeurs alternatives aussi bien que continues, et ils ne nécessitent aucun circuit supplémentaire. Par contre, le cadre mobile doit être accompagné d'un quelconque circuit de redressement, que nous décrirons à la section suivante.

Outre l'ampèremètre, le voltmètre et le wattmètre, nous étudierons dans ce chapitre le fréquencemètre analogique et numérique, le voltmètre vectoriel, la pince ampèremétrique, le pont d'impédances et, enfin, l'oscilloscope.

## 22.2 APPAREILS À CIRCUITS DE REDRESSEMENT UTILISANT LE CADRE MOBILE

L'aiguille d'un cadre mobile dévie vers le haut de l'échelle uniquement si le courant traversant le cadre est du sens indiqué sur les bornes extérieures de l'appareil. Le passage dans le cadre d'un courant de sens opposé donne en effet naissance à un couple inversé qui fait dévier l'aiguille vers le bas de l'échelle, sous le zéro. Par ailleurs, l'application d'un courant sinusoïdal d'une fréquence de 60 Hz ferait osciller l'aiguille



autour du zéro, car son inertie est trop considérable pour qu'elle puisse suivre les trop rapides variations du courant. Aucune indication sensée ne pourrait être obtenue.

Pour que le cadre mobile puisse être utilisé en courant alternatif, il faut d'abord que le courant alternatif soit transformé en une grandeur non oscillante, en un courant continu par exemple. L'une des techniques employées pour ce faire est le redressement, amplement décrit dans la plupart des manuels d'électronique élémentaire. La figure 22.1 illustre un circuit redresseur de base.

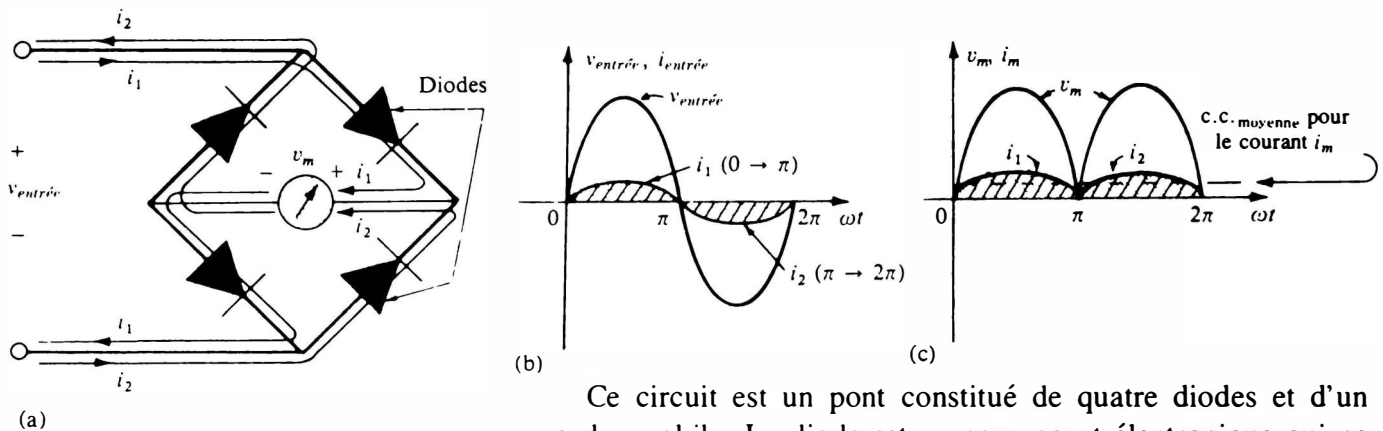
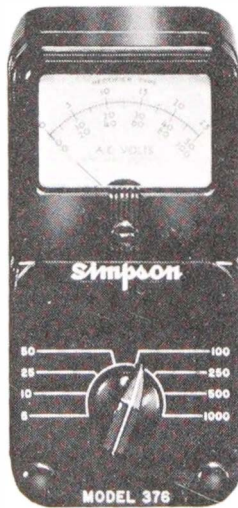


FIG. 22.1



Courtoisie de Simpson Electric Co.

FIG. 22.2 Voltmètre alternatif à cadre mobile.

Ce circuit est un pont constitué de quatre diodes et d'un cadre mobile. La diode est un composant électronique qui ne laisse passer le courant que dans un sens. Idéalement, elle se comporte comme un court-circuit si le courant est du sens voulu, et comme un circuit ouvert s'il est du sens opposé. Pour un courant conventionnel, la diode est en court-circuit si le sens du courant est celui qu'indique la flèche représentant la diode. Dans le montage illustré à la figure 22.1, l'alternance négative du courant d'attaque est inversée et redressée, de sorte que le courant passant dans le cadre mobile est toujours de même sens. Les trajets qu'emprunte le courant sont indiqués à la figure pour les alternances positives et négatives. L'appareil de mesure n'indique toutefois que la valeur *moyenne* de l'onde pulsée redressée. Il faut donc étalonner la déviation pour que l'indication de l'appareil corresponde à une valeur efficace. Malheureusement, un appareil étaloné pour une entrée sinusoïdale n'indiquera pas une valeur efficace correcte si l'entrée n'est pas sinusoïdale. Il faut donc faire preuve de prudence si on utilise de tels appareils. La figure 22.2 illustre un voltmètre c.a. typique doté d'un cadre mobile.

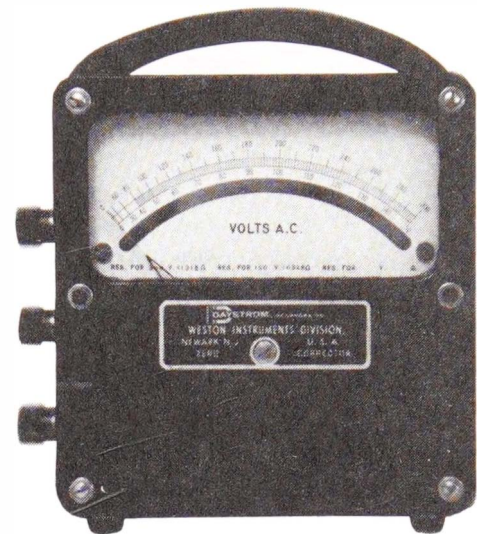
## 22.3 APPAREILS À ÉQUIPAGE ÉLECTRODYNAMOMÉTRIQUE

L'équipage électrodynamométrique peut aussi servir, sans subir de modification, à la mesure de grandeurs continues et alternatives. De fait, un tel équipement peut indiquer la valeur efficace de toute grandeur périodique ou non périodique puisque

l'inversion du sens du courant se traduit uniquement par l'inversion des champs des bobines mobile et fixe, la déviation de l'aiguille étant toujours vers le haut de l'échelle. La figure 22.3 illustre un voltmètre typique à équipement électrodynamométrique.

## 22.4 LE MULTIMÈTRE ET LE VOLTMÈTRE ÉLECTRONIQUE

Comme nous l'avons indiqué au chapitre 12, le multimètre peut mesurer des tensions alternatives et continues de même que certains courants. La figure 12.13 illustre le schéma du circuit interne d'un multimètre 260; on y voit comment le circuit redresseur s'intègre à l'appareil pour permettre au cadre mobile d'indiquer la valeur efficace d'une tension d'entrée sinusoïdale. Le circuit en pont est une forme modifiée du circuit étudié à la section 22.2.



Courtoisie de Weston Instruments Inc.

FIG. 22.3 Voltmètre alternatif à équipement électrodynamométrique.

## 22.5 INDICATIONS DES APPAREILS

Il est important de savoir quel type d'indication fournit un voltmètre (ou un ampèremètre) continu lorsqu'il est attaqué en courant alternatif, et réciproquement un voltmètre (ou un ampèremètre) alternatif attaqué en courant continu. Aux figures 22.4 et 22.5, trois types de voltmètres continus sont raccordés aux bornes d'une résistance faisant chuter une tension alternative de 10 V (valeur efficace). Voyons quelle est l'indication obtenue dans chaque cas.

Le cadre mobile (figure 22.4), en raison de son inertie, n'arrive pas à suivre au rythme de 60 Hz les variations de la tension; son indication est de 0 V. L'équipage électrodynamométrique (figure 22.5) indique la valeur efficace de toute forme d'onde; son indication est de 10 V.

Aux figures 22.6 à 22.8, trois types de voltmètres alternatifs sont raccordés aux bornes d'une résistance faisant chuter de 10 V une tension continue. Voyons quelle est l'indication obtenue dans chaque cas.

Le cadre mobile (figure 22.6) mesure la valeur moyenne du signal à redressement pleine onde présent à ses bornes; cette valeur moyenne est  $2V_m/\pi$ . En d'autres termes, la valeur c.c. moyenne =  $2V_m/\pi$ . Or, la valeur efficace est:

$$V_{\text{eff}} = 0,707V_m = 0,707 \left( \frac{\pi}{2} \right) \text{c.c. moyenne}$$

de sorte que:

$\text{indication de l'appareil} = 1,11 \text{ c.c. moyenne}$

redressement  
pleine onde

(22.1)

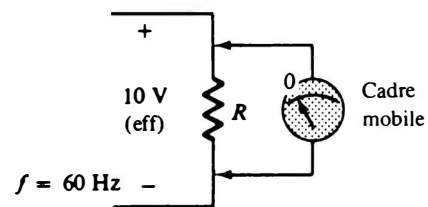


FIG. 22.4

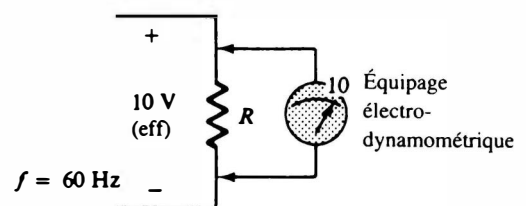


FIG. 22.5

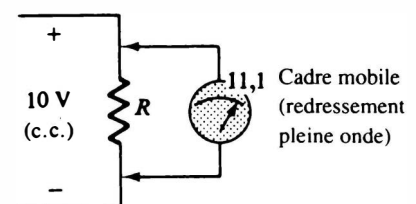


FIG. 22.6



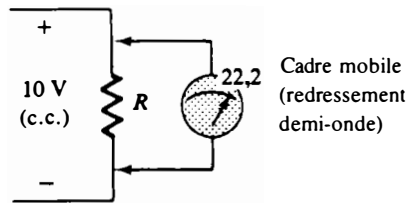


FIG. 22.7

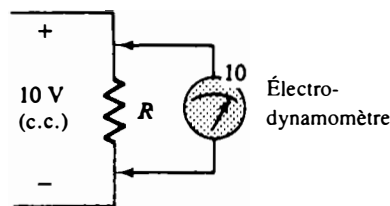


FIG. 22.8

L'échelle de l'appareil est donc étalonnée pour que son indication soit 1,11 fois la valeur moyenne de la tension présente aux bornes de l'équipage mobile.

À la figure 22.6:

$$\text{indication} = 1,11(10) = 11,1 \text{ V}$$

Pour l'appareil illustré à la figure 22.7, le facteur de correction est de 2,22, car la valeur moyenne d'un signal redressé demi-onde est égale à la moitié de celle d'un signal à redressement pleine onde, soit  $V_m/\pi$ .

$$\text{indication de l'appareil} = 2,22 \text{ c.c.}_{\text{moyenne}}$$

redressement  
demi-onde

(22.2)

À la figure 22.7:

$$\text{indication} = 2,22(10) = 22,2 \text{ V}$$

L'appareil à équipage électrodynamométrique illustré à la figure 22.8 indique aussi la valeur efficace de n'importe quelle forme d'onde.

## 22.6 WATTMÈTRES MONOPHASÉS (À ÉQUIPAGE ÉLECTRO-DYNAMOMÉTRIQUE)

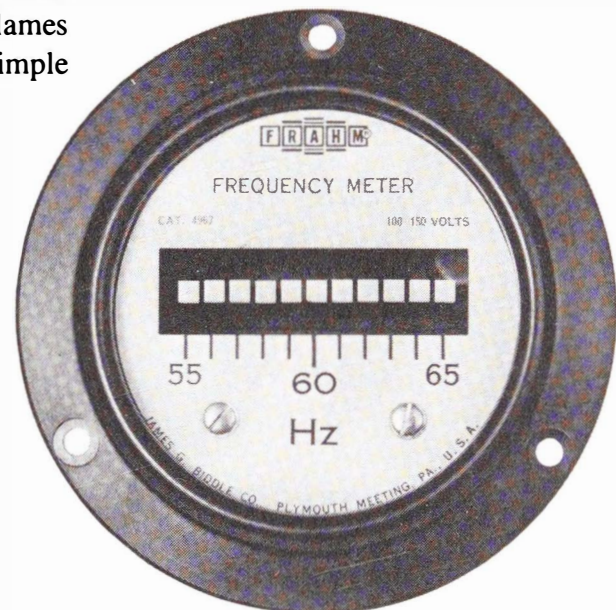
Le wattmètre muni d'un équipage électrodynamométrique peut être employé pour la mesure de la puissance en courant alternatif aussi bien qu'en courant continu. De fait, ses indications sont valables peu importe que le signal d'entrée soit périodique ou non. Son raccordement à un circuit alternatif est le même que celui à un circuit continu. Le facteur de correction est encore  $(V_{CM})^2/R_{CM}$ ,  $V_{CM}$  désignant maintenant la valeur efficace de la tension aux bornes du cadre mobile. Certains wattmètres sont munis d'un circuit de correction intégré, ce qui élimine la nécessité d'étalonner leurs indications. En se servant d'un tel appareil, l'utilisateur doit s'assurer de ne pas dépasser le courant nominal, la tension nominale ou la puissance nominale. Le produit de la tension nominale par le courant nominal n'est pas nécessairement égal à la puissance nominale. Dans un wattmètre FPE (facteur de puissance élevé), ce produit est habituellement égal à la puissance nominale, ou ne lui est pas inférieur de plus de 20%. Dans un wattmètre FPP (facteur de puissance petit), le produit est de beaucoup supérieur à la puissance nominale. Pour des raisons évidentes, on ne doit raccorder un wattmètre FPP qu'à des circuits dont le facteur de puissance est petit (impédance totale fortement réactive). Le tableau 22.1 donne les caractéristiques nominales de wattmètres FPE et FPP. L'imprécision des deux types d'appareils varie entre 0,5% et 1% de la déviation maximale.

**TABLEAU 22.1**

Appareil	Courant nominal	Tension nominale	Puissance nominale
FPE	2,5 A	150 V	1500/750/375
	5,0 A	300 V	
FPP	2,5 A	150 V	300/150/75
	5,0 A	300 V	

## 22.7 FRÉQUENCEMÈTRES ANALOGIQUES

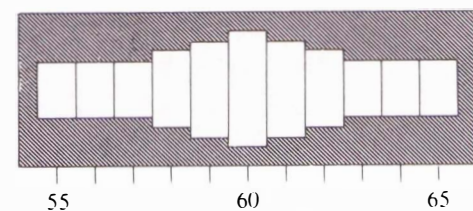
Les fréquencesmètres analogiques les plus courants sont à lames vibrantes, à cadre mobile ou à circuit résonant. Nous décrivons brièvement le fonctionnement du fréquencesmètre à lames vibrantes ci-dessous, car c'est celui qui est le plus simple (figure 23.9).



*Courtoisie de James G. Biddle Co.*

Ce fréquencesmètre est essentiellement constitué d'une rangée de lames à l'extrémité desquelles se trouvent des masselottes. L'échelle de l'appareil est située au-dessus de la rangée des lames. Chaque lame a sa fréquence propre de vibration mécanique. Le courant de fréquence inconnue qui traverse l'appareil passe dans la bobine d'un électro-aimant. L'intensité du champ magnétique créé varie avec l'intensité du courant et fait vibrer les lames à la fréquence de ce courant. Le champ magnétique passant par un maximum et un minimum deux fois au cours de chaque cycle du courant, il faut un aimant pour annuler l'impulsion dans un sens. La lame dont la fréquence propre est égale à la fréquence du courant est celle qui vibre le plus. La figure 22.10 donne l'indication de l'appareil dans le cas d'un courant de 60 Hz.

**FIG. 22.9** *Fréquencesmètre analogique.*

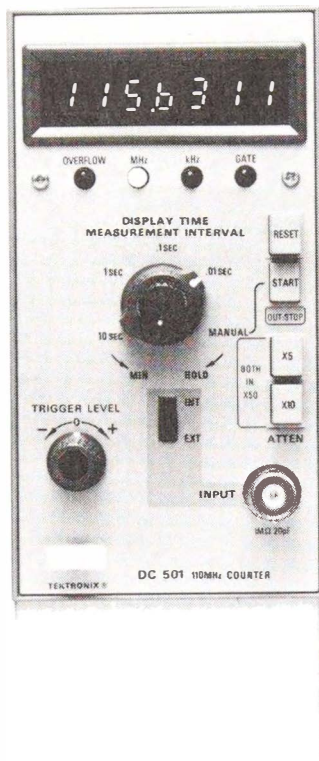


*Courtoisie de James G. Biddle Co.*

**FIG. 22.10**



## 22.8 FRÉQUENCÉMÈTRES NUMÉRIQUES



Courtoisie de Tektronix, Inc.

**FIG. 22.11** Fréquence-mètre numérique.

Le fréquences-mètre illustré à la figure 22.11 fournit une indication numérique de la fréquence ou de la période de toute forme d'onde dont la fréquence est comprise entre 5 Hz et 80 MHz. Au mode de moyenne de la période, l'appareil peut calculer la période moyenne de l'onde sur 10, 100 ou 1000 cycles. Il possède une impédance d'entrée de  $1\text{ M}\Omega$  et est doté d'un bloc d'alimentation rechargeable. À remarquer la grande précision qu'offre l'affichage à six chiffres.

## 22.9 VOLTMÈTRES VECTORIELS

Le voltmètre vectoriel Hewlett-Packard illustré à la figure 22.12 indique la grandeur et la phase de la tension de toute onde du spectre des radiofréquences entre 1 MHz et 1000 MHz. L'appareil possède deux canaux d'entrée, ce qui permet l'affichage du déphasage sur un cadran à zéro central, dont la gamme peut être de  $\pm 180^\circ$ ,  $\pm 60^\circ$ ,  $\pm 18^\circ$  et  $\pm 6^\circ$ . La résolution est de  $0,1^\circ$  pour cette dernière gamme. À ces fréquences, les tensions efficaces mesurées varient entre  $100\ \mu\text{V}$  et 1 V. La tension alternative de crête maximale admissible est de 2 V; en courant continu, la tension maximale admissible est de  $\pm 50\text{ V}$ .

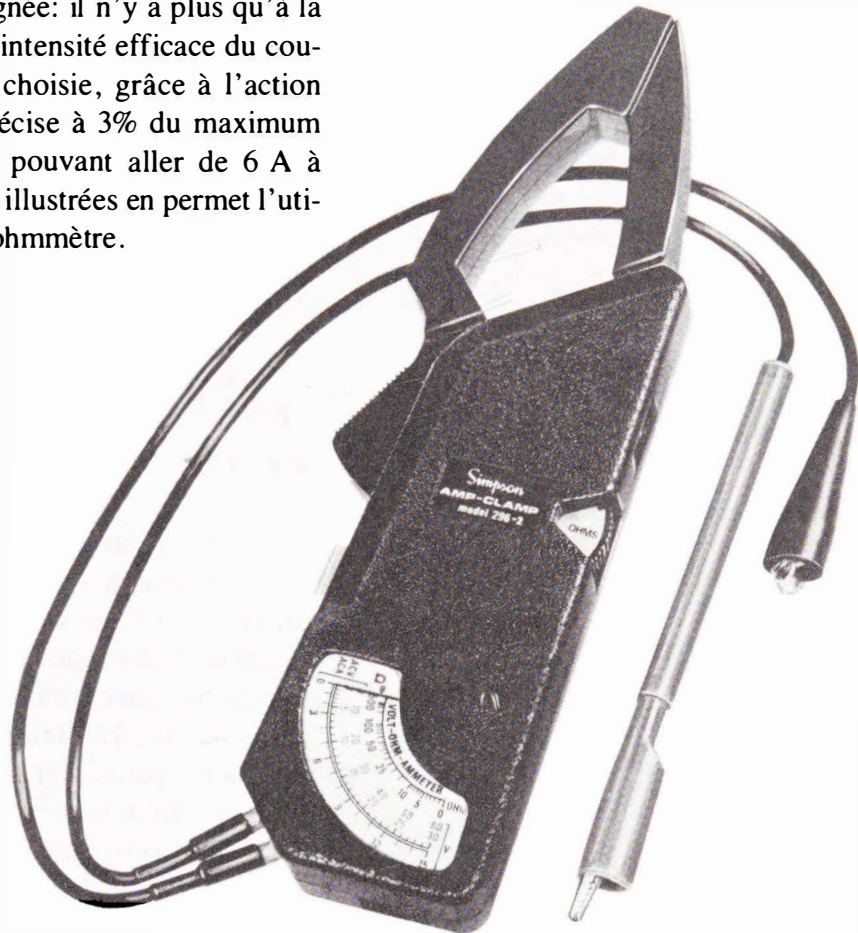


Courtoisie de Hewlett-Packard Co.

**FIG. 22.12** Voltmètre vectoriel.

## 22.10 LA PINCE AMPÈREMÉTRIQUE

La pince ampèremétrique est un appareil qui permet de mesurer l'intensité des courants de l'ordre de l'ampère, sans que les circuits ne doivent être ouverts. La pince illustrée à la figure 22.13 s'écarte par pression de la poignée: il n'y a plus qu'à la laisser refermer sur le conducteur. L'intensité efficace du courant est alors indiquée sur l'échelle choisie, grâce à l'action d'un transformateur. La pince est précise à 3% du maximum de l'échelle à 60 Hz, ce maximum pouvant aller de 6 A à 300 A. L'adjonction des deux sondes illustrées en permet l'utilisation comme voltmètre et comme ohmmètre.

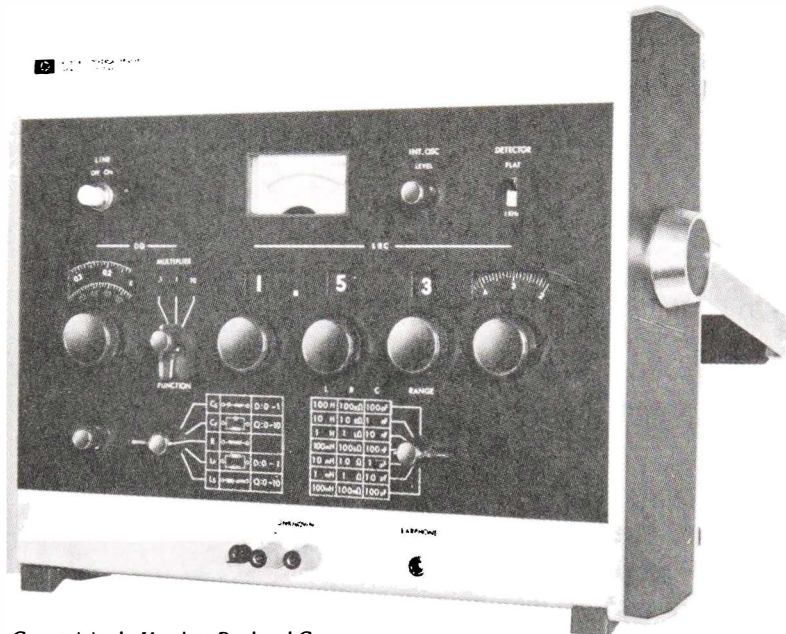


*Courtoisie de Simpson Instruments, Inc.*

**FIG. 22.13** Pince ampèremétrique.

## 22.11 PONT D'IMPÉDANCES

Le pont universel Hewlett-Packard illustré à la figure 22.14 peut mesurer avec précision l'inductance, la capacité et la résistance d'un circuit dans des gammes respectives de 0,1  $\mu\text{H}$  à 1111 H, de 0,1 pF à 1111  $\mu\text{F}$  et de 0,1  $\text{m}\Omega$  à 1,111  $\text{M}\Omega$ . Il peut aussi servir à déterminer les pertes et le facteur  $Q$  des éléments réactifs. La bande de fréquences, dans laquelle les mesures sont possibles, varie de 50 Hz à 1 kHz (avec l'oscillateur interne seulement) ou à 10 kHz (avec un oscillateur externe). Une fois l'élément inconnu raccordé aux bornes inférieures gauches de l'appareil, la mesure se fait par équilibrage de l'indicateur du cadran. Les grandeurs mesurées peuvent alors être lues directement sur les échelles analogiques et numériques.

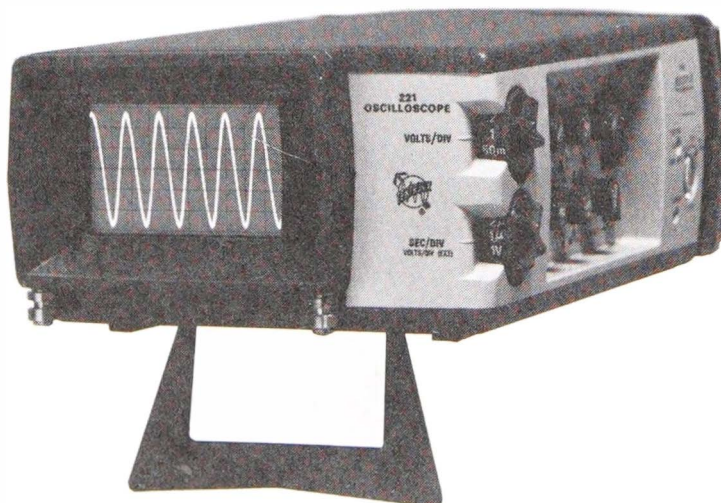


Courtoisie de Hewlett-Packard Co.

## 22.12 OSCILLOSCOPE

FIG. 22.14 Pont universel.

L'un des appareils les plus polyvalents et les plus importants de l'industrie de l'électronique est l'*oscilloscope*. Cet appareil affiche les formes d'onde sur un écran cathodique. Il est alors possible de les contrôler ou encore d'en mesurer les diverses caractéristiques: amplitude, fréquence, période, composante continue, etc. L'oscilloscope illustré à la figure 22.15 présente un intérêt particulier pour deux raisons: il est portable (bloc d'alimentation interne), léger et peu encombrant. Il ne pèse en effet que 1,6 kg environ et ses dimensions approximatives sont de 7,5 cm sur 13 cm sur 25 cm. Son impédance d'entrée est de  $1\text{ M}\Omega$  et sa base de temps peut être réglée entre  $5\ \mu\text{s}$  et 500 ms par division horizontale. La sensibilité de l'échelle peut aussi afficher deux signaux (double trace) simultanément, ce qui facilite la comparaison de leurs amplitudes et de leurs phases.



Courtoisie de Tektronix, Inc.

FIG. 22.15 Miniscope.



## PROBLÈMES

### Section 22.5

1. Inscrivez dans la colonne de droite du tableau suivant l'indication des appareils de la colonne de gauche; ceux-ci sont attaqués par une tension continue de 125 V.

#### TABLEAU 22.2

Appareil	Indication
a. Voltmètre continu à cadre mobile	
b. Voltmètre alternatif à redressement demi-onde	
c. Voltmètre alternatif à redressement pleine onde	
d. Voltmètre alternatif à équipage électrodynamométrique	

2. Inscrivez dans la colonne de droite du tableau suivant l'indication des appareils de la colonne de gauche; ceux-ci sont attaqués par une tension alternative de 110 V.

#### TABLEAU 22.3

Appareil	Indication
a. Voltmètre alternatif à redressement demi-onde	
b. Voltmètre alternatif à redressement pleine onde	
c. Voltmètre continu à cadre mobile	
d. Voltmètre continu à équipage électrodynamométrique	

## GLOSSAIRE

**Appareil à équipage électrodynamométrique** Appareil pouvant servir à mesurer en courant continu et en courant alternatif sans que son circuit interne ne soit modifié.



**Appareil à redresseur** Appareil étalonné pour indiquer l'intensité efficace ou la tension efficace et qui fait appel à un cadre mobile ainsi qu'à un redresseur.

**Fréquencemètre analogique** Appareil de mesure de la fréquence d'un signal alternatif faisant appel à un électro-aimant, à un circuit résonant ou à des lames vibrantes.

**Fréquencemètre numérique** Appareil fournissant une indication numérique de la fréquence ou de la période d'un signal variant dans le temps de façon périodique.

**Multimètre** Appareil polyvalent permettant de mesurer la résistance ainsi que le courant et la tension, tant en courant alternatif qu'en courant continu.

**Oscilloscope** Appareil affichant sur un écran cathodique les caractéristiques d'un signal variant dans le temps.

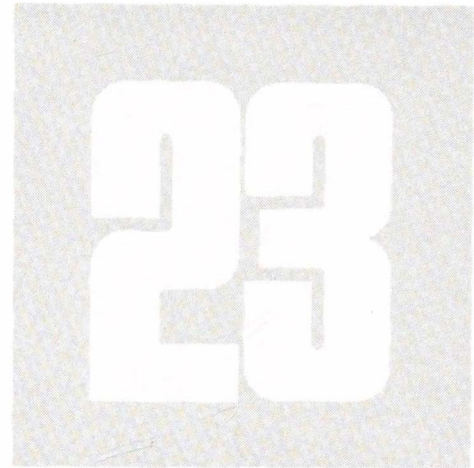
**Pince ampèremétrique** Appareil permettant de mesurer l'intensité du courant sans ouverture du circuit et pouvant aussi servir de voltmètre ou d'ohmmètre.

**Pont d'impédances** Appareil permettant de mesurer les caractéristiques d'une bobine, d'un condensateur ou d'une résistance.

**Voltmètre vectoriel** Appareil donnant la grandeur et la phase d'une tension.

**Wattmètre monophasé** Appareil à équipement électrodynamométrique pouvant mesurer en courant continu ou en courant alternatif la puissance fournie à un réseau monophasé.

# CIRCUITS NON SINUSOÏDAUX



## 23.1 INTRODUCTION

Les ondes sinusoïdales décrites au chapitre 13 sont les seules grandeurs alternatives jusqu'à maintenant utilisées dans notre analyse. Toute onde qui ne répond pas aux caractéristiques fondamentales des ondes sinusoïdales est une onde *non sinusoïdale*. L'exemple le plus connu est la forme d'onde d'une tension ou d'un courant continu. Les phonogrammes illustrés à la figure 23.1 en sont un autre exemple (ces phonogrammes sont les traces des voyelles "A" et "O"). Un coup d'oeil aux formes d'onde permet de constater qu'elles sont presque périodiques, la variation de l'amplitude s'expliquant par la variation du ton de la voix. Les phonogrammes sont caractéristiques des personnes tout comme les empreintes digitales.

Même alimentés par une tension sinusoïdale ou un courant sinusoïdal, de nombreux dispositifs électriques et électroniques fournissent en sortie une grandeur non sinusoïdale. La figure

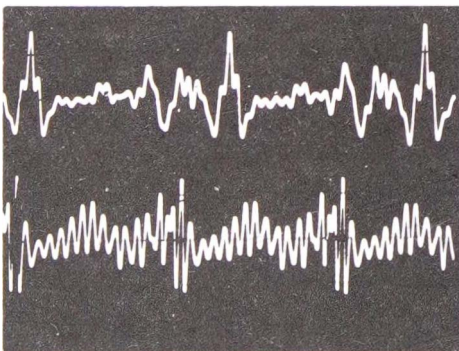
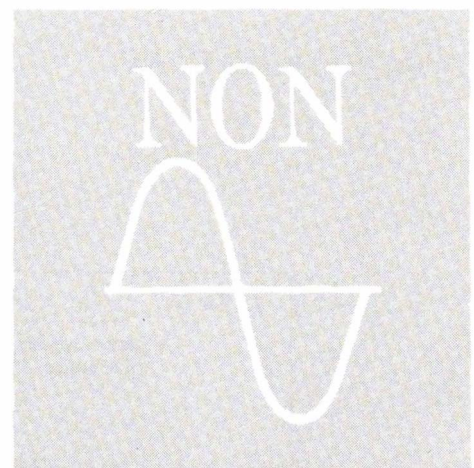


FIG. 23.1 *Phonogrammes.*





23.2a illustre les caractéristiques non linéaires d'une diode à titre d'exemple. La forme d'onde du courant passant dans cette diode (figure 23.2b) n'est pas sinusoïdale, bien que celle de la tension d'alimentation le soit. On notera toutefois que la forme d'onde du courant est périodique, et que sa période est celle de la tension d'entrée. Cette constatation peut être généralisée: tout dispositif non linéaire ne présentant pas d'effets résiduels fournit en sortie une grandeur non sinusoïdale périodique, s'il est attaqué à son entrée par une grandeur sinusoïdale.

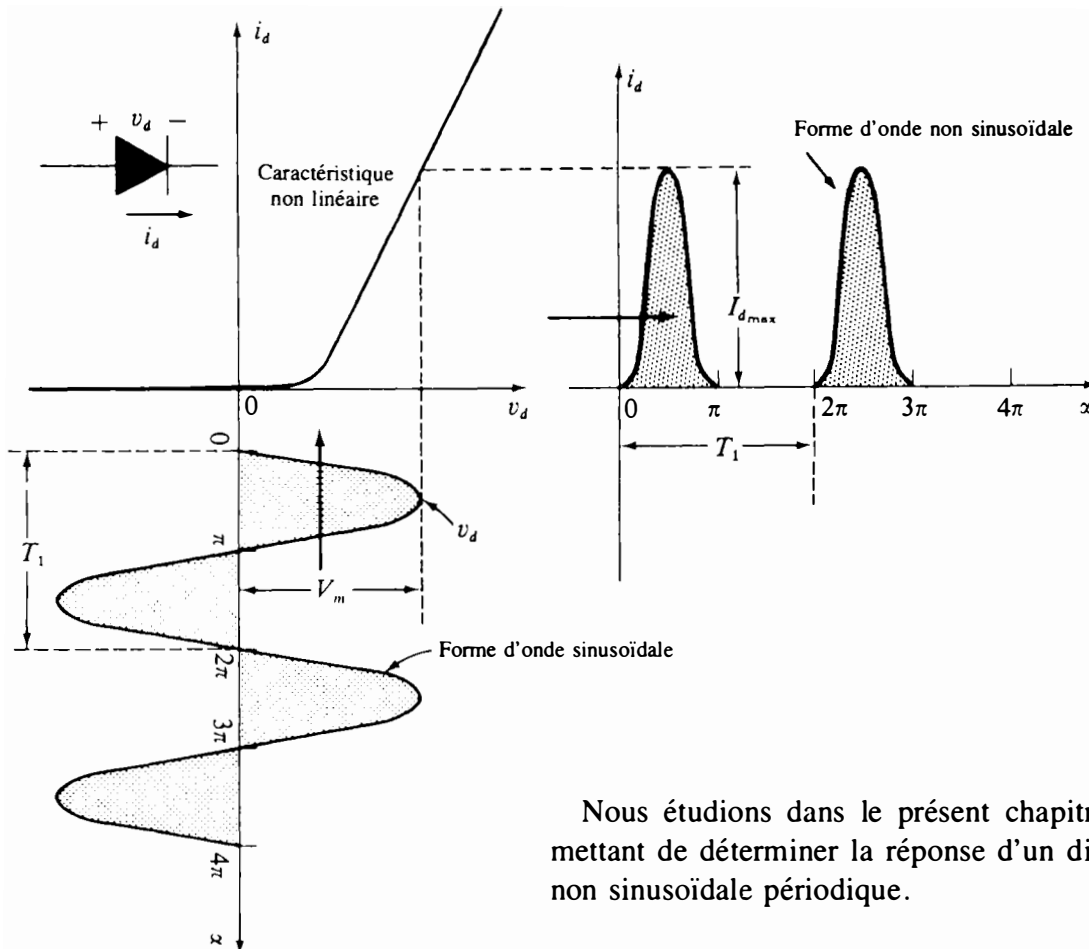


FIG. 23.2

## 23.2 SÉRIES DE FOURIER

Les *séries de Fourier* sont des séries, élaborées en 1826 par le Baron Jean Fourier, qu'on peut utiliser pour représenter des formes d'onde non sinusoïdales. L'analyse de telles formes d'onde nécessite la détermination de chacun des termes des séries représentatives:

$$f(\alpha) = \underbrace{A_0}_{\text{Valeur moyenne ou continue}} + \underbrace{A_1 \cos \alpha + A_2 \cos 2\alpha + A_3 \cos 3\alpha + \dots + A_n \cos n\alpha}_{\text{Termes cosinusoïdaux}} + \underbrace{B_1 \sin \alpha + B_2 \sin 2\alpha + B_3 \sin 3\alpha + \dots + B_n \sin n\alpha}_{\text{Termes sinusoïdaux}} \quad (23.1)$$

Selon la nature de la forme d'onde, il peut falloir un très grand nombre de termes pour que la série s'approche étroitement de l'onde réelle et puisse servir à l'analyse de circuits.

Le premier terme d'une série de Fourier est le coefficient  $A_0$ , égal à la valeur moyenne de l'onde sur un cycle. La série compte aussi des termes cosinusoidaux dont les coefficients  $A_n$  peuvent être d'une valeur *quelconque* mais dont la fréquence est nécessairement un multiple entier de la fréquence du premier terme cosinusoidal de la série. Il y a enfin des termes sinusoidaux dont les coefficients  $B_n$  peuvent aussi être d'une valeur quelconque mais dont la fréquence est un multiple entier de la fréquence du premier terme sinusoidal. Pour certaines formes d'onde, il est même possible que tous les termes sinusoidaux ou cosinusoidaux soient nuls. Ces caractéristiques surprenantes, il est possible de les prévoir par un simple examen de l'allure de la forme d'onde.

Une forme d'onde symétrique de chaque côté de l'axe vertical est une fonction *paire* et est dite à *symétrie axiale* (figure 23.3a). Les coefficients  $B_n$  des séries de Fourier représentatives de fonctions paires sont nuls; les séries ne comportent donc que des *termes cosinusoidaux*, outre le *coefficient*  $A_0$ . À noter que la fonction cosinus est elle-même symétrique autour de l'ordonnée (axe vertical), comme l'illustre la figure 23.3b.

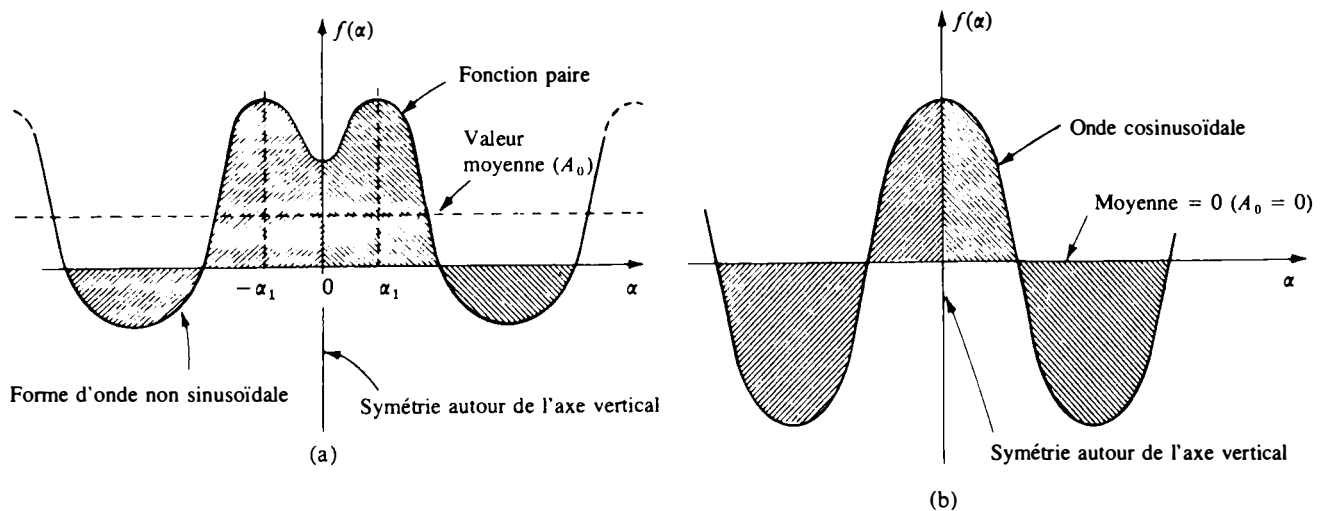


FIG. 23.3 Symétrie axiale.

Les deux formes d'onde de la figure 23.3 sont caractérisées par une relation mathématique du genre:

$$f(\alpha) = f(-\alpha) \quad (\text{fonction paire}) \quad (23.2)$$

En clair, la valeur que prend la fonction est la même au point  $+\alpha$  et au point  $-\alpha$  ( $\alpha_1$  à la figure).

D'autres formes d'onde sont telles que leur valeur au point  $+\alpha$  est égale en grandeur mais de signe opposé à la valeur au point  $-\alpha$  (figure 23.4a). Il s'agit de fonctions *impaires*, dites à *symétrie centrale* (chaque point est projeté à travers l'origine en un point diamétralement opposé). Tous les coefficients  $A_n$  ( $n > 0$ ) des séries représentatives de telles fonctions sont nuls, la série ne comportant que le *coefficient*  $A_0$  et des *termes sinusoidaux*. Évidemment, la fonction sinus est elle-même impaire (figure 23.4b).

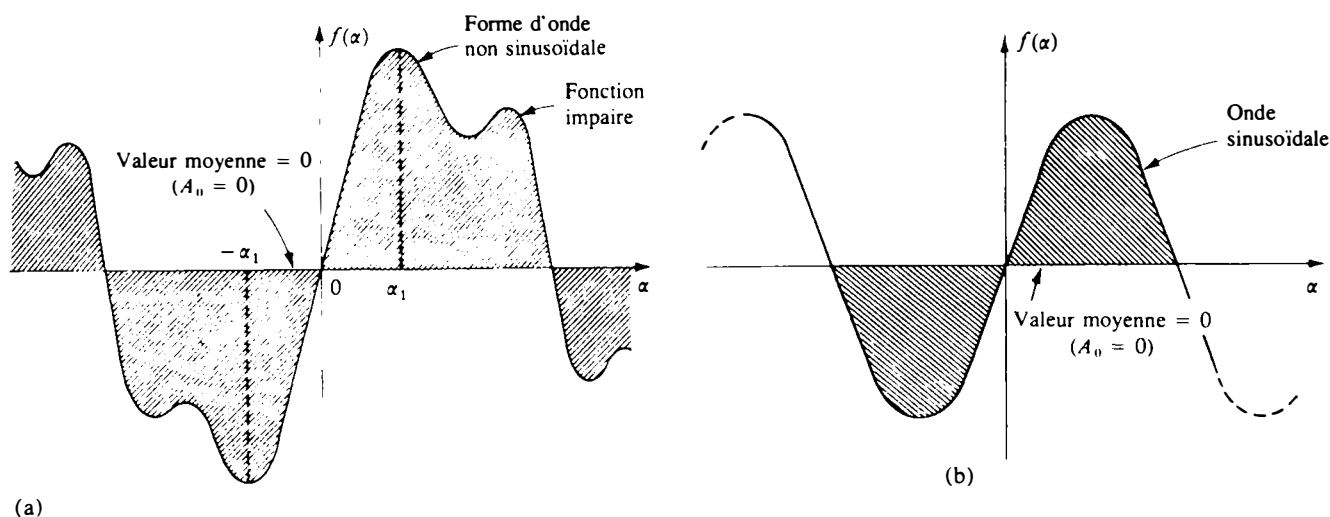


FIG. 23.4 Symétrie centrale.

Les deux formes d'onde illustrées à la figure 23.4 sont caractérisées par une relation mathématique du genre:

$$f(\alpha) = -f(-\alpha) \quad (\text{fonction impaire}) \quad (23.3)$$

En clair, la valeur que prend la fonction au point  $+\alpha$  est égale en grandeur mais de signe opposé à sa valeur au point  $-\alpha$  ( $\alpha_1$  à la figure).

Le premier terme d'une série sinusoidale ou cosinusoidale qui suit le coefficient  $A_0$  est appelé *composante fondamentale* ou plus simplement *fondamentale*. Sa fréquence est la fréquence minimale nécessaire à la représentation de l'onde, et est d'ailleurs égale à la fréquence de cette onde. Toute série de Fourier représentative d'une onde doit donc contenir une fondamentale. Les autres termes de rang plus élevé (leur fréquence est un multiple entier de la fréquence de la fondamentale) sont des *harmoniques*. La fréquence de la deuxième harmonique est le double de celle de la fondamentale, celle de la troisième harmonique, le triple, et ainsi de suite.

Si la forme d'onde est telle que:

$$f(t) = f\left(\frac{T}{2} + t\right) \quad (23.4)$$

les harmoniques impaires sont nulles. La figure 23.5 représente une fonction de ce type.

L'équation (23.4) est celle d'une fonction qui se répète sur un intervalle de  $T/2$  ( $t_1$  à la figure 23.5). La forme d'onde

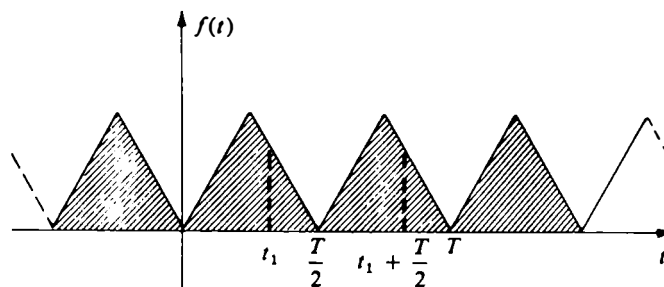


FIG. 23.5

se répète aussi sur un intervalle de  $T$ , bien sûr. Le choix pour de telles fonctions d'une période  $T$  égale au double de l'intervalle  $t_1$ , entraîne, en règle générale, l'annulation de toutes les harmoniques impaires.

Si par ailleurs la forme d'onde est telle que:

$$f(t) = -f\left(\frac{T}{2} + t\right) \tag{23.5}$$

les harmoniques paires sont nulles et la fonction est à symétrie par inversion et translation. La figure 23.6 illustre une fonction de ce type.

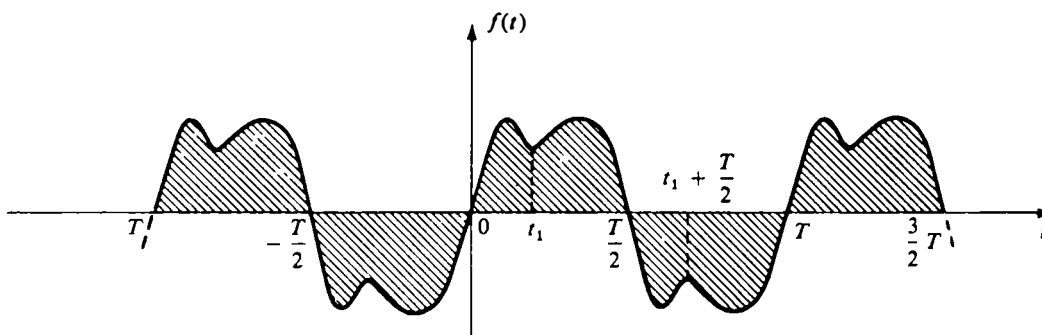


FIG. 23.6 Symétrie par inversion et translation.

L'équation (23.5) est celle d'une fonction qui se répète sur un intervalle de  $T/2$  ( $t_1$  à la figure 23.6) mais dont les valeurs alternent du positif au négatif d'un intervalle à un autre. Ainsi les valeurs de l'onde entre  $T/2$  et  $T$  sont égales en grandeur mais de signe opposé aux valeurs entre  $0$  et  $T$  (figure 23.6).

La figure 23.7 représente un analyseur d'ondes, appareil utilisé pour la mesure des fréquences et des amplitudes des harmoniques.

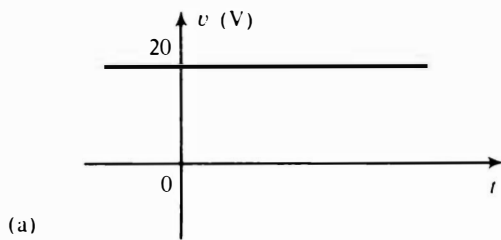
Les coefficients  $A_0$ ,  $A_n$  et  $B_n$  se déterminent au moyen des intégrales suivantes:

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) d\alpha \tag{23.6}$$



Courtoisie de Hewlett Packard Co.

**FIG. 23.7** Analyseur d'ondes.

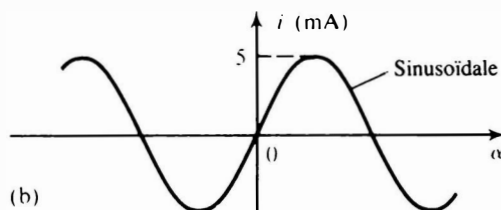


$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \cos n\alpha d\alpha$$

(23.7)

$$B_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \sin n\alpha d\alpha$$

(23.8)



Les exemples qui suivent démontrent l'utilité des équations et des notions présentées jusqu'à maintenant.

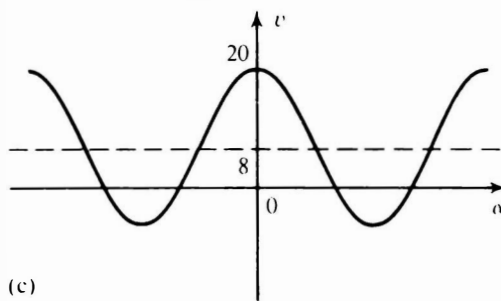
**EXEMPLE 23.1** Écrire la représentation en série de Fourier des formes d'onde illustrées à la figure 23.8.

*Solution:*

a.  $A_0 = 20, A_{1 \rightarrow n} = 0, B_{1 \rightarrow n} = 0$   
 $v = 20$

b.  $A_0 = 0, A_{1 \rightarrow n} = 0, B_1 = 5 \times 10^{-3}, B_{2 \rightarrow n} = 0$   
 $i = 5 \times 10^{-3} \sin \alpha$

c.  $A_0 = 8, A_1 = 12, A_{2 \rightarrow n} = 0, B_{1 \rightarrow n} = 0$   
 $v = 8 + 12 \cos \alpha$



**FIG. 23.8**

**EXEMPLE 23.2** Tracer le graphique de la série de Fourier suivante:

$$v = 2 + 1 \cos \alpha + 2 \sin \alpha$$

Solution: Voir la figure 23.9.

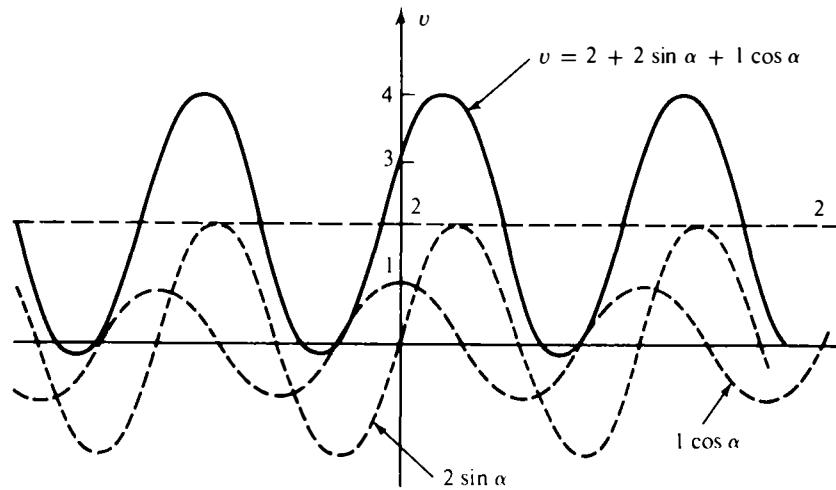


FIG. 23.9

Nous pourrions obtenir cette solution en traçant d'abord toutes les fonctions, puis en les superposant. Il est aussi possible d'avoir recours aux vecteurs de phase, comme suit:

$$\begin{aligned} 1 \cos \alpha + 2 \sin \alpha &= 1 \angle 90^\circ + 2 \angle 0^\circ = j1 + 2 \\ &= 2 + j1 = 2,236 \angle 26,57^\circ \\ &= 2,236 \sin(\alpha + 26,57^\circ) \end{aligned}$$

et:

$$v = 2 + 2,236 \sin(\alpha + 26,57^\circ)$$

ce qui est simplement une onde sinusoïdale superposée à une constante correspondant à la tension continue de 2 V. Autrement dit, le maximum positif de l'onde est  $2 + 2,236 = 4,236$  V et son minimum est  $2 - 2,236 = 0,236$  V.

**EXEMPLE 23.3** Tracer le graphique de la série de Fourier suivante:

$$i = \sin \alpha + \sin 2\alpha$$

Solution: Voir la figure 23.10. On remarquera que dans le présent cas, la somme des deux sinusoïdes de fréquences différentes n'est pas une sinusoïde. La solution s'obtient donc graphiquement, l'algèbre complexe ne pouvant en effet servir que pour des ondes de même fréquence.

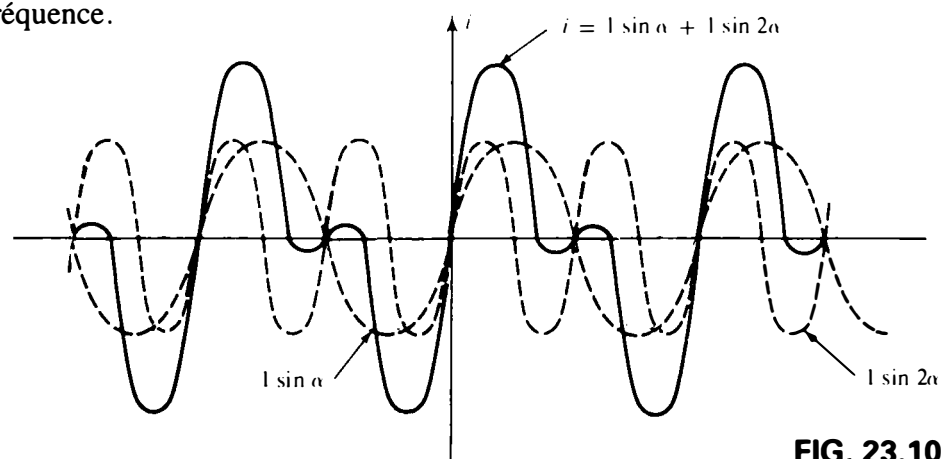


FIG. 23.10

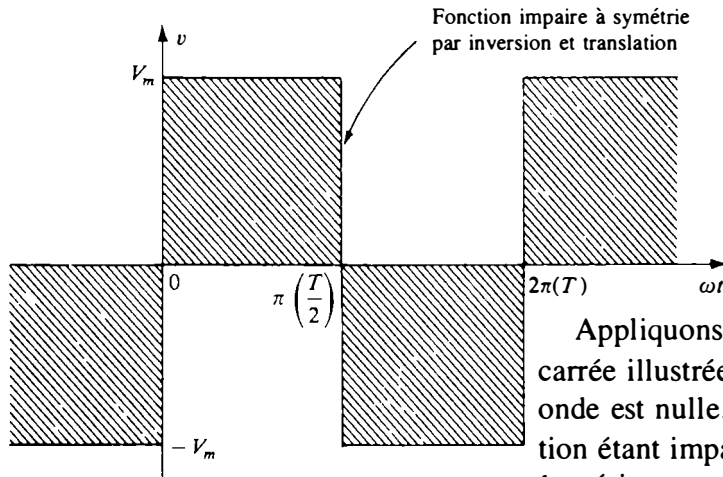


FIG. 23.11 Onde carrée.

Appliquons le développement en série de Fourier à l'onde carrée illustrée à la figure 23.11. La valeur moyenne de cette onde est nulle, ce qui nous permet de poser  $A_0 = 0$ . La fonction étant impaire, les coefficients  $A_n$  ( $n > 0$ ) sont tous nuls et la série ne comprend que des termes sinusoïdaux. L'onde obéissant d'autre part à la relation  $f(t) = -f(T/2 + t)$ , les harmoniques paires sont aussi nulles.

Après détermination des coefficients au moyen de l'équation (23.8), la série devient:

$$v = \frac{4}{\pi} V_m \left[ \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \frac{1}{7} \sin 7\omega t + \dots + \frac{1}{n} \sin n\omega t \right] \quad (23.9)$$

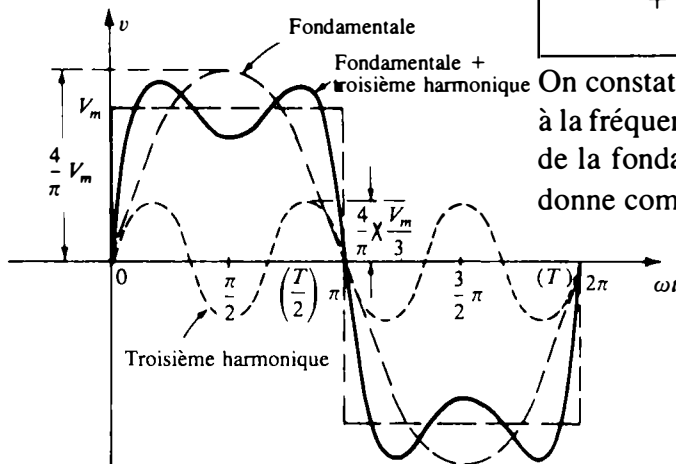


FIG. 23.12

On constate que la fréquence de la fondamentale est bien égale à la fréquence de l'onde carrée. La combinaison (superposition) de la fondamentale et de la troisième harmonique uniquement donne comme résultat l'onde illustrée à la figure 23.12.

Même en ne prenant la somme que des deux premiers termes, on obtient donc une onde qui commence à ressembler à une onde carrée. L'addition des deux termes suivants de la série (figure 23.13) entraîne une augmentation de la durée de l'impulsion ainsi que du nombre de crêtes.

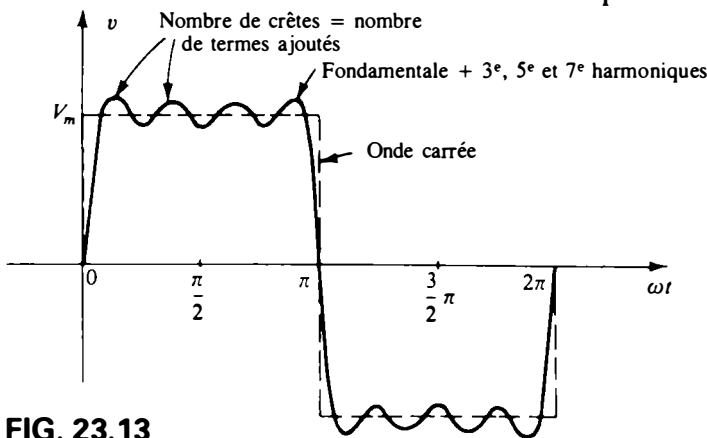


FIG. 23.13

À mesure qu'augmente le nombre de ses termes, la série représente de mieux en mieux l'onde carrée. On aura cependant remarqué que l'amplitude des harmoniques diminue avec le rang; après un certain rang, l'incidence des harmoniques devient négligeable en regard de la contribution des quelques premières harmoniques. Dans le cas de l'onde carrée, une bonne approximation consiste à ne tenir compte que de la fondamentale et des harmoniques, jusqu'à la neuvième inclusivement. Les harmoniques de rang supérieur peuvent être laissées de côté, leur amplitude étant inférieure au dixième de celle de la fondamentale. Soulignons qu'une translation verticale de l'onde carrée n'aurait pour effet que de changer le coefficient  $A_0$  de la série de Fourier. Ainsi, l'onde illustrée à la figure 23.14a est la somme de celles représentées aux figures 23.14b et 23.14c. Ainsi, la série de Fourier qui la représente est:

$$\begin{aligned}
 v_T &= V_m + \text{Eq. (23.9)} \\
 &= V_m + \frac{4}{\pi} V_m \left( \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \frac{1}{7} \sin 7\omega t + \dots \right)
 \end{aligned}$$

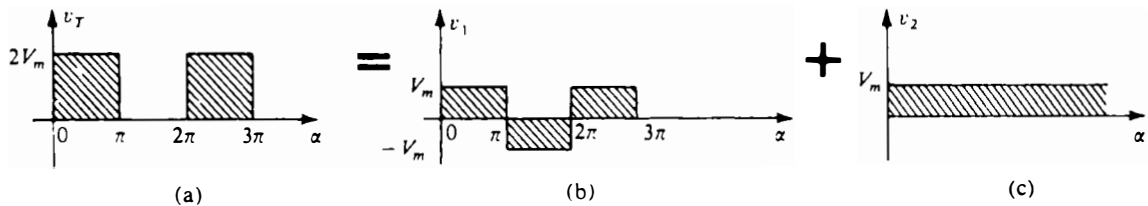


FIG. 23.11

FIG. 23.14

Donnons un autre exemple. La série de Fourier de l'onde pulsée illustrée à la figure 23.15b est:

$$\begin{aligned}
 v &= 0,318 V_m + 0,500 V_m \sin \alpha - 0,212 V_m \cos 2\alpha \\
 &\quad - 0,0424 V_m \cos 4\alpha - \dots
 \end{aligned}
 \tag{23.10}$$

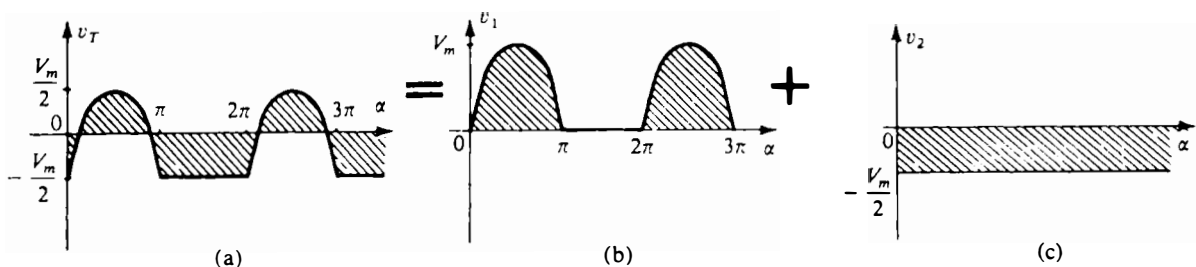


FIG. 23.15

L'onde illustrée à la figure 23.15a est la somme de celles représentées aux figures 23.15b et 23.15c. La série de Fourier représentative est:



$$\begin{aligned}
 v_T &= -\frac{V_m}{2} + \text{Eq. (23.10)} \\
 &= \underbrace{[-0,500 + 0,318]}_{-0,182} V_m + 0,500 V_m \sin \alpha \\
 &\quad - 0,212 V_m \cos 2\alpha - 0,0424 V_m \cos 4\alpha + \dots
 \end{aligned}$$

Une translation horizontale de l'une ou l'autre des deux ondes aurait pour simple effet de faire apparaître un déphasage, positif ou négatif, dans les termes sinusoïdaux et cosinusoidaux. Le coefficient  $A_0$  demeurerait inchangé.

Supposons ainsi que la sinusoïde redressée est traduite de  $90^\circ$  sur la gauche, comme l'illustre la figure 23.16. La série de Fourier s'écrit alors ainsi:

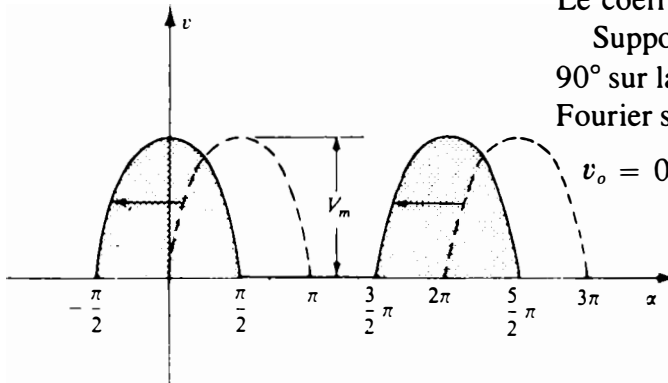


FIG. 23.16

$$v_o = 0,318 V_m + 0,500 V_m \underbrace{\sin(\alpha + 90^\circ)}_{\cos \alpha}$$

$$\begin{aligned}
 &- 0,212 V_m \cos 2(\alpha + 90^\circ) \\
 &- 0,0424 V_m \cos 4(\alpha + 90^\circ) + \dots \\
 &= 0,318 V_m + 0,500 V_m \sin(\alpha + 90^\circ) \\
 &\quad - 0,212 V_m \cos(2\alpha + 180^\circ) \\
 &\quad - 0,0424 V_m \cos(4\alpha + 360^\circ) + \dots \\
 &= 0,318 V_m + 0,500 V_m \cos \alpha \\
 &\quad + 0,212 V_m \cos 2\alpha - 0,0424 V_m \cos 4\alpha + \dots
 \end{aligned}$$

Si c'est sur la droite que se fait la translation, la série de Fourier devient:

$$\begin{aligned}
 v_o &= 0,318 V_m + 0,500 V_m \sin(\alpha - 90^\circ) \\
 &\quad - 0,212 V_m \cos 2(\alpha - 90^\circ) \\
 &\quad - 0,0424 V_m \cos 4(\alpha - 90^\circ) + \dots \\
 &= 0,318 V_m - 0,500 V_m \cos \alpha + 0,212 V_m \cos 2\alpha \\
 &\quad - 0,0424 V_m \cos 4\alpha + \dots
 \end{aligned}$$

### 23.3 RÉPONSE D'UN CIRCUIT À UNE ALIMENTATION NON SINUSOÏDALE

L'analyse de la réponse d'un circuit linéaire à une alimentation non sinusoïdale peut se faire au moyen des séries de Fourier, grâce au principe de superposition. Rappelons que ce principe permet d'étudier indépendamment les effets de chacune des sources que compte un circuit. Nous pouvons donc remplacer l'alimentation non sinusoïdale par une série de sources corres-

pondant aux termes d'une série de Fourier, puis faire ensuite appel au principe de superposition pour déterminer la réponse du circuit à chacune de ces sources (figure 23.17).

$$e = A_0 + A_1 \cos \alpha + \dots + A_n \cos n\alpha + \dots + B_1 \sin \alpha + \dots + B_n \sin n\alpha + \dots$$

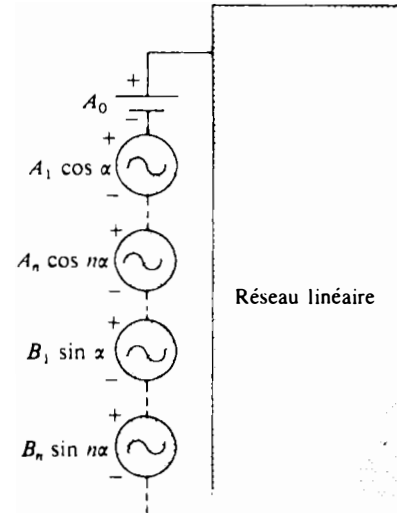
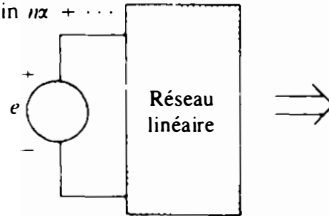


FIG. 23.17

La réponse globale du circuit sera alors tout simplement la somme algébrique des réponses à chacune des sources. Cette technique n'est pas nouvelle; nous l'avons déjà utilisée. La principale différence est que dans le cas d'une alimentation non sinusoïdale, chaque source a une fréquence différente de celle des autres. Par conséquent, les réactances:

$$X_L = 2\pi fL \quad \text{et} \quad X_C = \frac{1}{2\pi fC}$$

varient pour chaque terme de la série représentant le courant ou la tension d'alimentation.

Nous avons déterminé au chapitre 13 que la valeur efficace de toute forme d'onde est:

$$\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [f(t)]^2 dt}$$

L'application de cette relation à la série de Fourier:

$$v(\alpha) = V_o + V_{m_1} \cos \alpha + \dots + V_{m_n} \cos n\alpha + V'_{m_1} \sin \alpha + \dots + V'_{m_n} \sin n\alpha$$

donne:

$$V_{\text{eff}} = \sqrt{V_o^2 + \frac{V_{m_1}^2 + \dots + V_{m_n}^2 + V'^2_{m_1} + \dots + V'^2_{m_n}}{2}} \tag{23.11}$$

Mais, comme:

$$\frac{V_{m_1}}{2} = \left(\frac{V_{m_1}}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{V_{m_1}}{\sqrt{2}}\right) = (V_{1\text{eff}})(V_{1\text{eff}}) = V_{1\text{eff}}^2$$

on a:

$$V_{\text{eff}} = \sqrt{V_o^2 + V_{1\text{eff}}^2 + \dots + V_{n\text{eff}}^2 + V'^2_{1\text{eff}} + \dots + V'^2_{n\text{eff}}} \tag{23.12}$$

De façon semblable, pour la série:

$$i(\alpha) = I_o + I_{m_1} \cos \alpha + \dots + I_{m_n} \cos n\alpha + I'_{m_1} \sin \alpha + \dots + I'_{m_n} \sin n\alpha$$



on a:

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{I_0^2 + \frac{I_{m_1}^2 + \dots + I_{m_n}^2 + I_{m_1}'^2 + \dots + I_{m_n}'^2}{2}}$$

(23.13)

et:

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_{1\text{eff}}^2 + \dots + I_{n\text{eff}}^2 + I_{1\text{eff}}'^2 + \dots + I_{n\text{eff}}'^2}$$

(23.14)

La puissance totale fournie au circuit est la somme des puissances fournies par les termes correspondant à la tension et au courant. Dans les équations qui suivent, toutes les tensions et tous les courants sont efficaces; on a donc:

$$P_T = V_0 I_0 + V_1 I_1 \cos \theta_1 + \dots + V_n I_n \cos \theta_n + \dots$$

(23.15)

$$P_T = I_0^2 R + I_1^2 R + \dots + I_n^2 R + \dots$$

(23.16)

ou encore:

$$P_T = I_{\text{eff}}^2 R$$

(23.17)

dans laquelle  $I_{\text{eff}}$  est défini par l'équation (23.13). De façon semblable, on a:

$$P_T = V_{\text{eff}}^2 / R$$

(23.18)

dans laquelle  $V_{\text{eff}}$  est définie par l'équation (23.11).

**EXEMPLE 23.4** La tension d'alimentation du circuit illustré à la figure 23.18 est la suivante:

$$e = 12 + 10 \sin 2t$$

- a. Calculer le courant  $i$  et les tensions  $v_R$  et  $v_C$ .
- b. Calculer les valeurs efficaces de  $i$ ,  $v_R$  et  $v_C$ .
- c. Calculer la puissance (W) fournie au circuit.

*Solution:*

- a. On redessine d'abord le circuit, comme l'illustre la figure 23.19. On applique ensuite le principe de superposition.

1. Pour la batterie de 12 V,  $I = 0$  puisque le condensateur est en circuit ouvert en continu lorsque  $v_C$  a atteint sa valeur finale (régime permanent).

$$V_R = IR = 0 \text{ V}$$

et:

$$V_C = 12 \text{ V}$$

2. Pour la source alternative, on a:

$$Z = 3 - j4 = 5 \angle -53,13^\circ$$

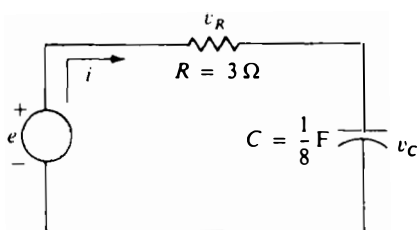


FIG. 23.18

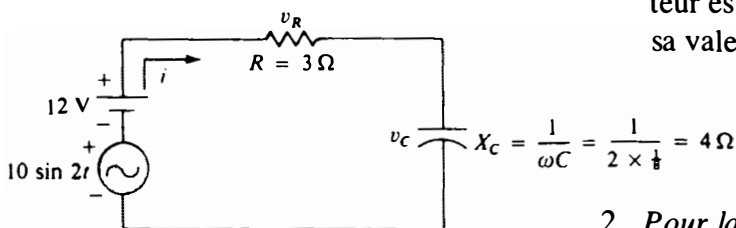


FIG. 23.19

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}} = \frac{\frac{10}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ}{5 \angle -53,13^\circ} = \frac{2}{\sqrt{2}} \angle +53,13^\circ$$

$$\mathbf{V}_R = \mathbf{IR} = \left( \frac{2}{\sqrt{2}} \angle +53,13^\circ \right) (3 \angle 0^\circ) =$$

$$\frac{6}{\sqrt{2}} \angle +53,13^\circ$$

et:

$$\mathbf{V}_C = \mathbf{IX}_C = \left( \frac{2}{\sqrt{2}} \angle +53,13^\circ \right) (4 \angle -90^\circ)$$

$$= \frac{8}{\sqrt{2}} \angle -36,87^\circ$$

Dans la forme analytique, le courant est:

$$i = 0 + 2 \sin(2t + 53^\circ)$$

Soulignons que malgré la présence d'un terme constant dans l'expression de la tension d'alimentation, l'expression du courant passant dans le circuit n'en contient pas (le terme constant est nul):

$$v_R = 0 + 6 \sin(2t + 53,13^\circ)$$

et:

$$v_C = 12 + 8 \sin(2t - 36,87^\circ)$$

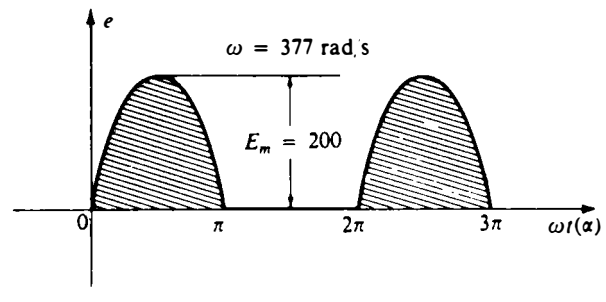
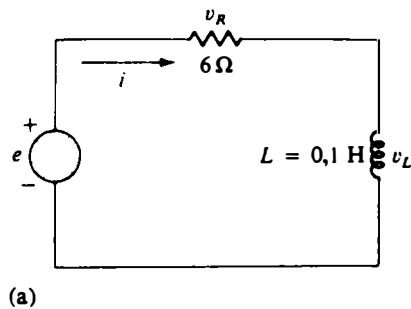
b. Eq. (23.14):  $I_{\text{eff}} = \sqrt{0^2 + \frac{2^2}{2}} = \sqrt{2} = 1,414 \text{ A}$

Eq. (23.12):  $V_{R\text{eff}} = \sqrt{0^2 + \frac{6^2}{2}} = \sqrt{18} = 4,243 \text{ V}$

Eq. (23.12):  $V_{C\text{eff}} = \sqrt{12^2 + \frac{8^2}{2}} = \sqrt{176} = 13,267 \text{ V}$

c.  $P = I_{\text{eff}}^2 R = (\sqrt{2})^2 \cdot 3 = 6 \text{ W}$

**EXEMPLE 23.5** Déterminer la réponse du circuit illustré à la figure 23.20 à l'entrée indiquée.



$$e = 0,318E_m + 0,500E_m \sin \omega t - 0,212E_m \cos 2\omega t$$

$$- 0,0424E_m \cos 4\omega t + \dots$$

FIG. 23.20

*Solution:* Aux fins de notre analyse, nous ne représenterons la tension  $e$  que par les trois premiers termes de la série. Après transformation des termes cosinusoidaux en termes sinusoidaux et après substitution de  $E_m$ , la représentation en série de Fourier devient:

$$e = 63,6 + 100 \sin \omega t - 42,4 \sin(2\omega t + 90^\circ)$$

La figure 23.18 illustre le circuit sur lequel les grandeurs d'intérêt sont notées par des vecteurs de phase. Appliquons le principe de superposition.

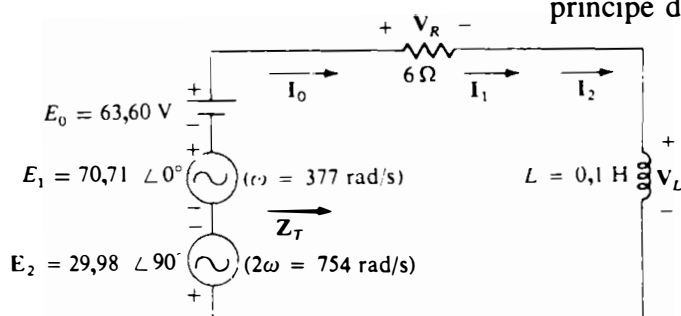


FIG. 23.21

Pour le terme constant ( $E_0 = 63,60$  V), on a:

$$X_L = 0 \quad (\text{court-circuit en courant continu})$$

$$Z_T = 6 \angle 0^\circ = R$$

$$I_0 = \frac{E_0}{R} = \frac{63,6}{6} = 10,60 \text{ A}$$

$$V_{R_0} = I_0 R = E_0 = 63,60 \text{ V}$$

$$V_{L_0} = 0$$

La puissance moyenne est:

$$P_0 = I_0^2 R = (10,60)^2(6) = 675 \text{ W}$$

Pour la fondamentale, ( $E_1 = 70,71 \angle 0^\circ$ ,  $\omega = 377$ ), on a:

$$X_{L_1} = \omega L = (377)(0,1) = 37,7 \Omega$$

$$Z_{T_1} = 6 + j37,7 = 38,17 \angle 80,96^\circ$$

$$I_1 = \frac{E_1}{Z_{T_1}} = \frac{70,71 \angle 0^\circ}{38,17 \angle 80,96^\circ} = 1,85 \angle -80,96^\circ$$

$$V_{R_1} = I_1 R = (1,85 \angle -80,96^\circ)(6 \angle 0^\circ) = 11,10 \angle -80,96^\circ$$

$$V_{L_1} = I_1 X_L = (1,85 \angle -80,96^\circ)(37,7 \angle 90^\circ) = 69,75 \angle 9,04^\circ$$

La puissance moyenne est:

$$P_1 = I_1^2 R = (1,85)^2(6) = 20,54 \text{ W}$$

Pour la deuxième harmonique ( $E_2 = 30 \angle 90^\circ$ ,  $\omega = 754$ ), on a:

$$X_{L_2} = \omega L = (754)(0,1) = 75,4 \Omega$$

$$Z_{T_2} = 6 + j75,4 = 75,64 \angle 85,45^\circ$$



$$I_2 = \frac{E_2}{Z_{T_2}} = \frac{30 \angle -90^\circ}{75,64 \angle 85,45^\circ} = 0,397 \angle -174,45^\circ$$

On a affecté le déphasage de  $E_2$  d'un signe moins ( $-90^\circ$ ) pour que la polarité de cette tension soit la même que celle des tensions d'entrée  $E_0$  et  $E_1$ .

$$V_{R_2} = I_2 R = (0,397 \angle -174,45^\circ)(6 \angle 0^\circ) \\ = 2,38 \angle -174,45^\circ$$

$$V_{L_2} = I_2 X_{L_2} = (0,397 \angle -174,45^\circ)(75,4 \angle 90^\circ) \\ = 29,9 \angle -84,45^\circ$$

La puissance moyenne est:

$$P_2 = I_2^2 R = (0,397)^2(6) = 0,946 \text{ W}$$

Le développement en série de Fourier du courant  $i$  est:

$$i = 10,6 + \sqrt{2}(1,85) \sin(377t - 80,96^\circ) \\ + \sqrt{2}(0,397) \sin(754t - 174,45^\circ)$$

et:

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{10,6^2 + 1,85^2 + 0,397^2} = 10,77 \text{ A}$$

Le développement en série de Fourier de la tension  $v_R$  est

$$v_R = 63,6 + \sqrt{2}(11,10) \sin(377t - 80,96^\circ) \\ + \sqrt{2}(2,38) \sin(754t - 174,45^\circ)$$

et:

$$V_{R_{\text{eff}}} = \sqrt{63,6^2 + 11,10^2 + 2,38^2} = 64,61 \text{ V}$$

Enfin, le développement en série de Fourier de la tension  $v_L$  est:

$$v_L = \sqrt{2}(69,75) \sin(377t + 9,04^\circ) \\ + \sqrt{2}(29,93) \sin(754t - 84,45^\circ)$$

et:

$$V_{L_{\text{eff}}} = \sqrt{69,75^2 + 29,93^2} \\ V_{L_{\text{eff}}} = 75,90 \text{ V}$$

La puissance moyenne totale est:

$$P_T = I_{\text{eff}}^2 R = (10,77)^2(6) = 695,96 \text{ W} = P_0 + P_1 + P_2$$

## 23.4 ADDITION ET SOUSTRACTION DE FORMES D'ONDE NON SINUSOÏDALES

La série de Fourier représentative d'une forme d'onde résultant de l'addition ou de la soustraction de deux formes d'onde non sinusoidales peut être déterminée par la manipulation de



vecteurs exprimés dans la forme polaire, à condition de considérer séparément les termes de même fréquence.

Faisons ainsi la somme ( $V_1 + V_2$ ) des deux formes d'onde non sinusoidales suivantes:

$$v_1 = 30 + 20 \sin 20t + \dots + 5 \sin(60t + 30^\circ)$$

$$v_2 = 60 + 30 \sin 20t + 20 \sin 40t + 10 \cos 60t$$

1. Termes constants:

$$V_{T_0} = 30 + 60 = 90$$

2.  $\omega = 20$

$$V_{T_1(\max)} = 30 + 20 = 50$$

et:

$$V_{T_1} = 50 \sin 20t$$

3.  $\omega = 40$

$$V_{T_2} = 20 \sin 40t$$

4.  $\omega = 60$

$$5 \sin(60t + 30^\circ) = (0,707)(5) \angle 30^\circ = 3,54 \angle 30^\circ$$

$$10 \cos 60t = 10 \sin(60t + 90^\circ) \Rightarrow (0,707)(10) \angle 90^\circ \\ = 7,07 \angle 90^\circ$$

$$\mathbf{V}_{T_3} = 3,54 \angle 30^\circ + 7,07 \angle 90^\circ \\ = 3,07 + j1,77 + j7,07 = 3,07 + j8,84$$

$$\mathbf{V}_{T_3} = 9,36 \angle 70,85^\circ$$

et:

$$\mathbf{V}_{T_3} = 13,24 \sin(60t + 70,85^\circ)$$

et:

$$v_1 + v_2 = v_T = 90 + 50 \sin 20t + 20 \sin 40t \\ + 13,24 \sin(60t + 70,85^\circ)$$

## PROBLÈMES

### Section 23.2

1. Voir les formes d'onde illustrées à la figure 23.22. Déterminez si les termes ci-dessous sont présents dans les séries de Fourier représentatives de ces formes d'onde.
  - a. Le terme constant ( $A_0$ ).
  - b. Les termes cosinusoidaux.
  - c. Les termes sinusoidaux.
  - d. Les harmoniques paires.
  - e. Les harmoniques impaires.

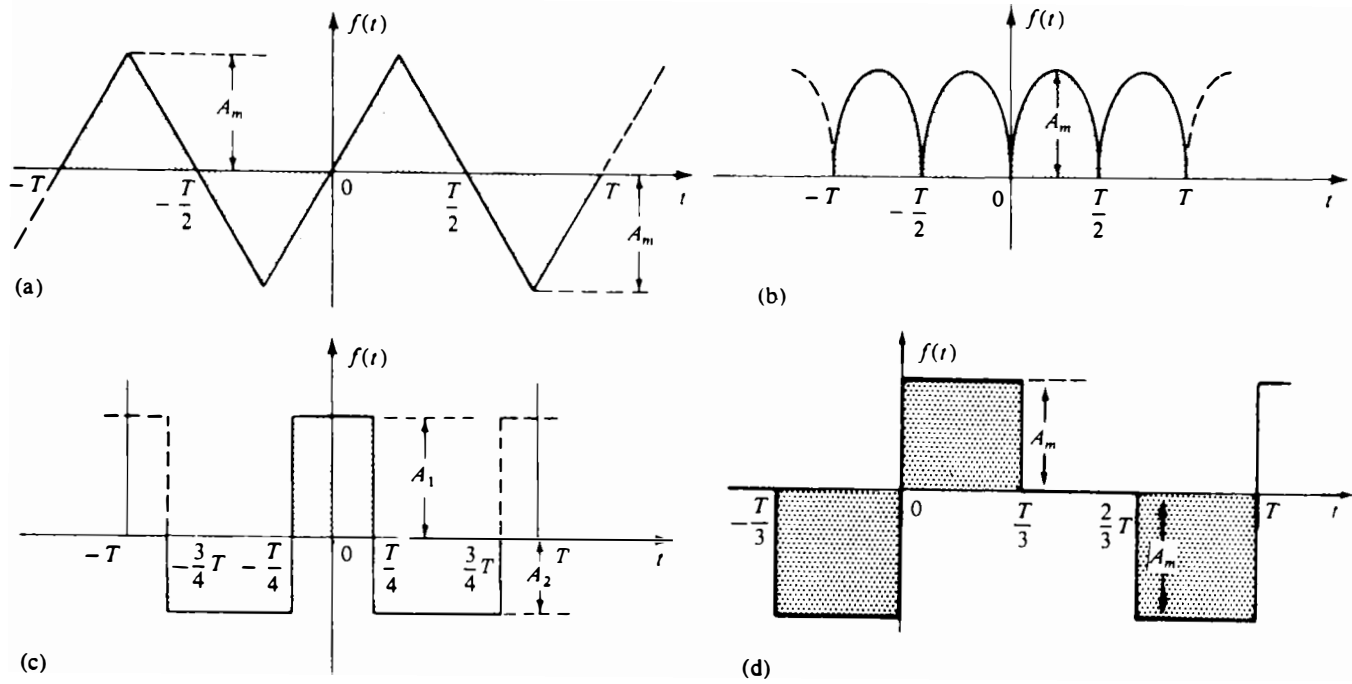


FIG. 23.22

2. Sachant que la série de Fourier représentative de l'onde illustrée à la figure 23.23a est:

$$i = \frac{2I_m}{\pi} \left( 1 + \frac{2}{3} \cos 2\omega t - \frac{2}{15} \cos 4\omega t + \frac{2}{35} \cos 6\omega t \dots \right)$$

déterminez les séries de Fourier représentatives des ondes aux figures 23.23b, 23.23c et 23.23d.

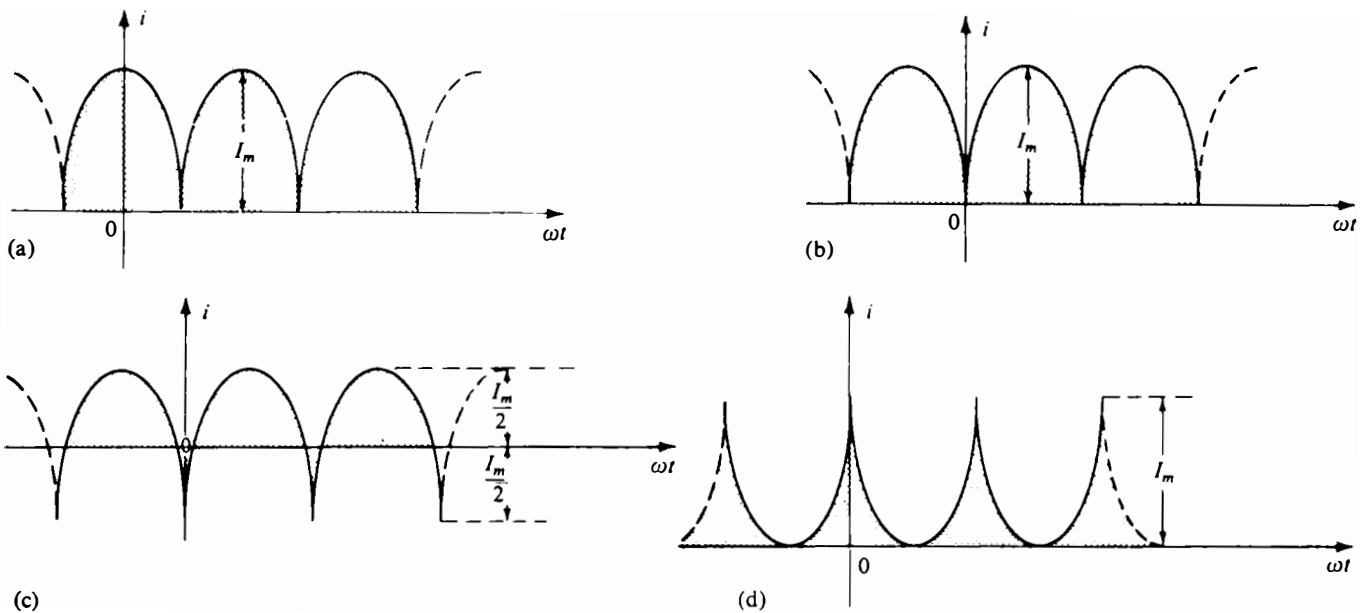


FIG. 23.23

3. Tracez les formes d'onde ci-dessous sur un plan cartésien en choisissant  $\alpha = \omega t$  comme abscisse.

- a.  $v = -4 + 2 \sin \alpha$
- b.  $v = \cos \alpha + \sin \alpha$
- c.  $i = 2 - 2 \cos \alpha$
- d.  $i = 3 \sin \alpha - 6 \sin 2\alpha$
- e.  $v = 2 \cos 2\alpha + \sin 2\alpha$



4. Tracez les formes d'onde ci-dessous sur un plan cartésien en choisissant  $\alpha = \omega t$  comme abscisse.
- $i = 50 \sin \omega t + 25 \sin 3\omega t$
  - $i = 50 \sin \omega t - 25 \sin 3\omega t$
  - $i = 4 + 3 \sin \omega t + 2 \sin 2\omega t - 1 \sin 3\omega t$

## Section 23.3

5. Calculez les valeurs moyenne et efficace des formes d'onde suivantes:
- $v = 100 + 50 \sin \omega t + 25 \sin 2\omega t$
  - $i = 3 + 2 \sin(\omega t - 53^\circ) + 0,8 \sin(2\omega t - 70^\circ)$
6. Calculez les valeurs moyenne et efficace des formes d'onde suivantes:
- $v = 20 \sin \omega t + 15 \sin 2\omega t - 10 \sin 3\omega t$
  - $i = 6 \sin(\omega t + 20^\circ) + 2 \sin(2\omega t + 30^\circ) - 1 \sin(3\omega t + 60^\circ)$
7. Calculez la puissance moyenne totale (W) fournie à un circuit dont la tension et le courant d'alimentation sont ceux des formes d'onde définies au problème 5.
8. Calculez la puissance moyenne totale (W) fournie à un circuit dont la tension et le courant d'alimentation sont ceux des formes d'onde définies au problème 6.
9. La série de Fourier représentative de la tension d'alimentation du circuit illustré à la figure 23.24 est:

$$e = 18 + 30 \sin 400t$$

- Déterminez l'expression non sinusoïdale du courant  $i$ .
- Calculez la valeur efficace du courant.
- Déterminez l'expression de la tension aux bornes de la résistance.
- Calculez la valeur efficace de cette tension.
- Déterminez l'expression de la tension aux bornes de la bobine.
- Calculez la valeur efficace de cette tension.
- Calculez la puissance moyenne fournie à la résistance.

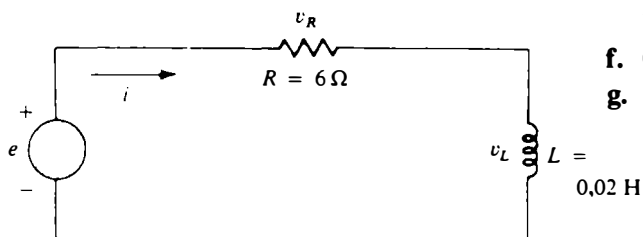


FIG. 23.24

10. Refaites le problème 9 pour la tension:

$$e = 24 + 30 \sin 400t + 10 \sin 800t.$$

11. Refaites le problème 9 pour la tension:

$$e = -60 + 20 \sin 300t - 10 \sin 600t$$

12. Refaites le problème 9 pour le circuit illustré à la figure 23.25.

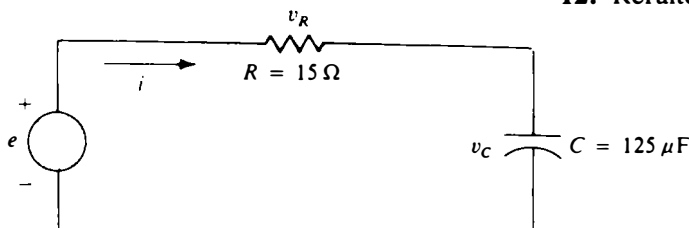


FIG. 23.25

\*13. La tension d'alimentation du circuit illustré à la figure 23.26 est un signal redressé biphase dont la série de Fourier est:

$$e = \frac{200}{\pi} \left( 1 + \frac{2}{3} \cos 2\omega t - \frac{2}{15} \cos 4\omega t + \frac{2}{53} \cos 6\omega t \dots \right)$$

où  $\omega = 377$ .

- Déterminez la série de Fourier de la tension  $v_o$  jusqu'au troisième terme.
- Calculez la valeur efficace de  $v_o$ .
- Calculez la puissance moyenne fournie à la résistance de  $1 \text{ k}\Omega$ .

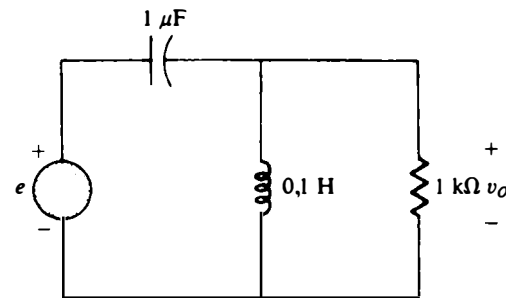
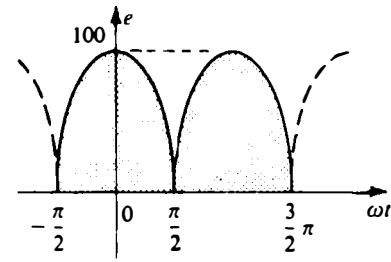


FIG. 23.26

\*14. Déterminez la série de Fourier de la tension  $v_o$  illustrée à la figure 23.27.

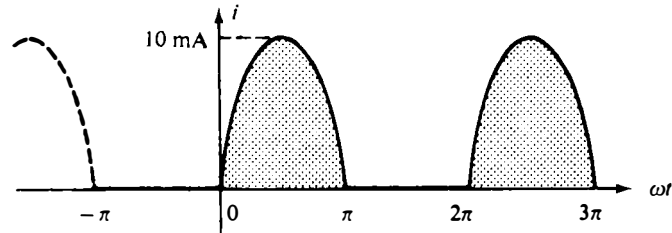
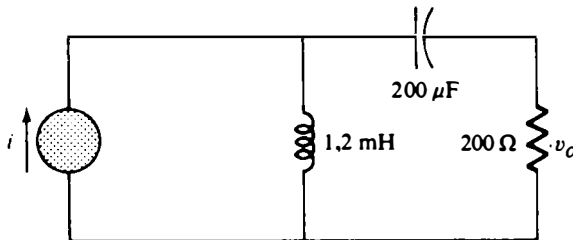


FIG. 23.27

Section 23.4

15. Simplifiez les expressions suivantes:

- $[60 + 70 \sin \omega t + 20 \sin(2\omega t + 90^\circ) + 10 \sin(3\omega t + 60^\circ)] + [20 + 30 \sin \omega t - 20 \cos 2\omega t + 5 \cos 3\omega t]$
- $[20 + 60 \sin \omega t + 10 \sin(2\omega t - 180^\circ) + 5 \cos(3\omega t + 90^\circ)] - [5 - 10 \sin \omega t + 4 \sin(3\omega t - 30^\circ)]$

16. Déterminez l'expression du courant  $i_r$  (figure 23.28) si:

$$i_2 = 10 + 30 \sin 20t - 0,5 \sin(40t + 90^\circ)$$

$$i_1 = 20 + 4 \sin(20t + 90^\circ) + 0,5 \sin(40t + 30^\circ)$$

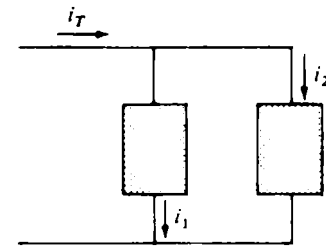


FIG. 23.28

17. Déterminez l'expression de la tension  $e$  (figure 23.29) si:

$$v_1 = 20 - 200 \sin 600t + 100 \cos 1200t + 75 \sin 1800t$$

$$v_2 = -10 + 150 \sin(600t + 30^\circ) + 50 \sin(1800t + 60^\circ)$$

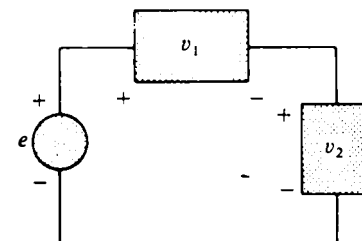


FIG. 23.29

## GLOSSAIRE

**Fondamentale** Terme de fréquence minimale de la série de Fourier représentant une forme d'onde.

**Forme d'onde non sinusoïdale** Toute forme d'onde différente de la fonction sinusoïdale fondamentale.

**Harmoniques** Termes d'une série de Fourier dont les fréquences sont des multiples entiers de celle de la fondamentale.

**Harmoniques impaires** Termes d'une série de Fourier dont les fréquences sont des multiples impairs de celle de la fondamentale.

**Harmoniques paires** Termes d'une série de Fourier dont les fréquences sont des multiples pairs de celle de la fondamentale.

**Séries de Fourier** Séries de termes, créées par le Baron Jean Fourier, qu'on peut utiliser pour représenter les fonctions non sinusoïdales.

**Symétrie axiale** Fonction sinusoïdale ou non sinusoïdale symétrique par rapport à l'axe vertical.

**Symétrie centrale** Fonction sinusoïdale ou non sinusoïdale satisfaisant la relation  $f(\alpha) = -f(-\alpha)$ .

**Symétrie par inversion et translation** Fonction sinusoïdale ou non sinusoïdale satisfaisant la relation  $f(t) = -f\left(\frac{T}{2} + t\right)$ .

# TRANSFORMATEURS

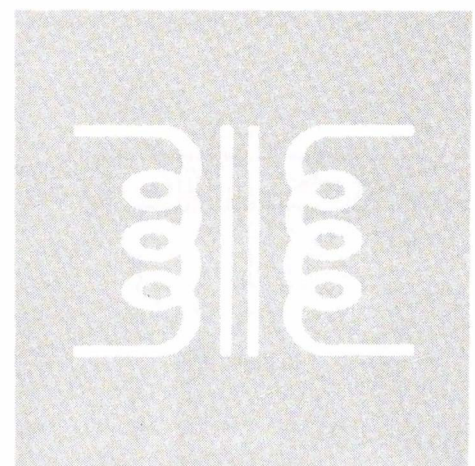


## 24.1 INTRODUCTION

Nous avons étudié au chapitre 11 le phénomène d'*induction propre* d'une bobine. Dans le présent chapitre, notre étude portera sur le phénomène d'*induction mutuelle* qui existe entre des bobines de dimensions identiques ou différentes. Ce phénomène est à la base du fonctionnement du transformateur, dispositif électrique aujourd'hui utilisé dans presque tous les domaines du génie électrique. Le transformateur joue un rôle très important dans les systèmes de distribution d'électricité et fait partie par ailleurs de nombreux circuits électroniques et appareils de mesure. Nous étudierons trois applications fondamentales du transformateur: abaissement et élévation d'une tension ou d'un courant, adaptation d'impédance et isolement (c'est-à-dire raccordement sans connexion physique) d'une partie d'un circuit à une autre. Nous présenterons en outre la convention des points et analyserons le circuit équivalent du transformateur. Nous concluons enfin le chapitre par une courte discussion de l'effet de l'induction mutuelle sur les équations de boucle d'un réseau.

## 24.2 INDUCTANCE MUTUELLE

Le transformateur est constitué de deux bobines positionnées de telle sorte que le flux variable produit par une embrasse les





spires de l'autre, comme l'illustre la figure 24.1. Il s'induit ainsi une tension dans chaque bobine. Pour repérer ces dernières, nous appellerons *primaire* la bobine alimentée par la source et *secondaire*, la bobine raccordée à la charge. L'application de la loi de Faraday (équation (11.1)) au primaire du transformateur illustré à la figure 24.1 donne:

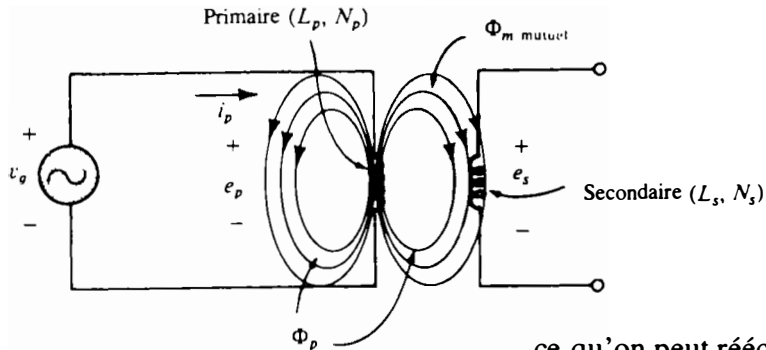


FIG. 24.1

$$e_p = N_p \frac{d\phi_p}{dt}$$

ce qu'on peut réécrire, grâce à l'équation (11.4), ainsi:

$$e_p = L_p \frac{di_p}{dt}$$

La grandeur de la tension induite  $e_s$  dans le secondaire est déterminée par:

$$e_s = N_s \frac{d\phi_m}{dt} \tag{24.1a}$$

dans laquelle  $\phi_m$  est la partie du flux primaire  $\phi_p$ , qui embrasse le secondaire.

Si tout le flux primaire embrasse le secondaire, on a:

$$\phi_p = \phi_m$$

de sorte que:

$$e_s = N_s \frac{d\phi_p}{dt} \tag{24.1b}$$

Le coefficient de couplage entre deux bobines se définit par la relation:

$$k \text{ (coefficient de couplage)} = \frac{\phi_m}{\phi_p} \tag{24.2}$$

Le flux variable maximal pouvant embrasser le secondaire étant  $\phi_p$ , le coefficient de couplage entre deux bobines ne peut jamais être supérieur à un. La figure 24.2 donne la valeur du coefficient de couplage pour diverses paires de bobines. À noter que  $k = 1$  pour un noyau de fer, et qu'il est considérablement moindre pour un noyau d'air. Les bobines dont le coefficient de couplage est petit sont dites à *couplage lâche*.

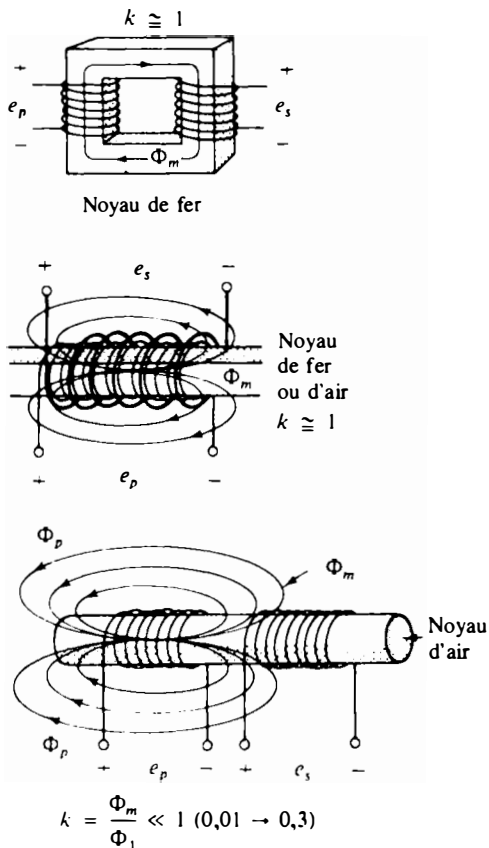


FIG. 24.2

Pour le secondaire, on a:

$$e_s = N_s \frac{d\phi_m}{dt} = N_s \frac{dk\phi_p}{dt}$$

de sorte que:

$$e_s = kN_s \frac{d\phi_p}{dt} \quad (24.3)$$

L'inductance mutuelle entre les deux bobines illustrées à la figure 24.1 est donnée par la relation:

$$M = N_s \frac{d\phi_m}{di_p} \quad (\text{henrys, H}) \quad (24.4a)$$

ou encore:

$$M = N_p \frac{d\phi_m}{di_s} \quad (\text{H}) \quad (24.4b)$$

Soulignons que le symbole de l'inductance mutuelle employé dans les équations ci-dessus est la lettre majuscule  $M$  et que son unité de mesure est le *henry*, qui est aussi l'unité de l'inductance propre. Traduites en clair, les équations (24.4a) et (24.4b) énoncent que l'inductance mutuelle entre deux bobines est proportionnelle à la variation instantanée du flux embrassant une bobine causée par une variation instantanée du courant parcourant l'autre bobine.

L'inductance mutuelle est aussi liée à l'inductance de chaque bobine et au coefficient de couplage entre les bobines par la relation:

$$M = k\sqrt{L_p L_s} \quad (\text{H}) \quad (24.5)$$

Plus grand est le coefficient de couplage (c'est-à-dire plus grand est le nombre de lignes de force communes aux deux bobines) ou plus grande est l'inductance de chaque bobine, plus grande est l'inductance mutuelle entre les bobines. Dans le cas des montages illustrés à la figure 24.2, l'inductance mutuelle  $M$  dépend directement du coefficient de couplage.

La tension du secondaire  $e_s$  peut également s'exprimer en fonction de l'inductance mutuelle; écrite sous une forme différente, l'équation (24.1) donne en effet:

$$e_s = N_s \left( \frac{d\phi_m}{di_p} \right) \left( \frac{di_p}{dt} \right)$$

et, puisque  $M = N_s(d\phi_m/di_p)$ , elle s'écrit ainsi:

$$e_s = M \frac{di_p}{dt} \quad (24.6a)$$

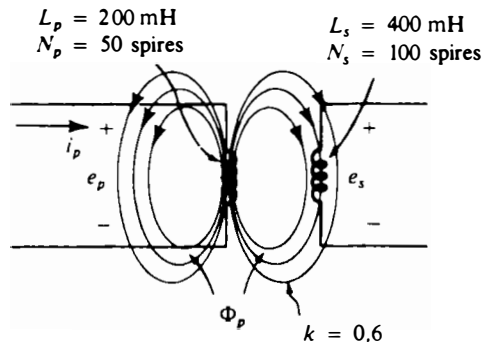


FIG. 24.3

De façon semblable:

$$e_p = M \frac{di_s}{dt} \quad (24.6b)$$

**EXEMPLE 24.1** Voir le transformateur illustré à la figure 24.3.

- Calculer l'inductance mutuelle  $M$ .
- Calculer la tension induite  $e_p$ , si le flux varie à la vitesse de 450 mWb/s.
- Calculer la tension induite  $e_s$  pour un flux variant à la même vitesse que ci-dessus.
- Calculer les tensions induites  $e_p$  et  $e_s$ , si le courant  $i_p$  varie à la vitesse de 2 A/s.

*Solution:*

$$\begin{aligned} a. \quad M &= k \sqrt{L_p L_s} = 0,6 \sqrt{(200 \times 10^{-3})(400 \times 10^{-3})} \\ &= 0,6 \sqrt{8 \times 10^{-2}} = (0,6)(2,828 \times 10^{-1}) = \mathbf{169,7 \text{ mH}} \end{aligned}$$

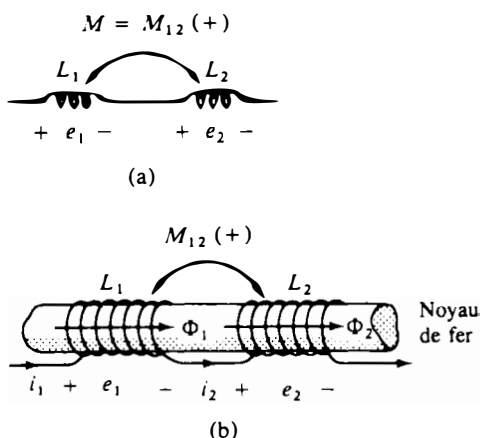
$$b. \quad e_p = N_p \frac{d\phi_p}{dt} = (50)(450 \times 10^{-3}) = \mathbf{22,5 \text{ V}}$$

$$c. \quad e_s = k N_s \frac{d\phi_p}{dt} = (0,6)(100)(450 \times 10^{-3}) = \mathbf{27 \text{ V}}$$

$$d. \quad e_p = L_p \frac{di_p}{dt} = (200 \times 10^{-3})(2) = \mathbf{400 \text{ mV}}$$

$$e_s = M \frac{di_p}{dt} = (170 \times 10^{-3})(2) = \mathbf{340 \text{ mV}}$$

## 24.3 RACCORDEMENT SÉRIE DE BOBINES À COUPLAGE MUTUEL



**FIG. 24.4** Bobines à couplage mutuel raccordées en série.

Au chapitre 11, nous avons établi que l'inductance totale de bobines isolées montées en série était simplement la somme des inductances des bobines. Lorsque deux bobines sont montées en série et qu'elles sont embrassées par des mêmes flux, comme à la figure 24.4a, l'apparition d'un terme mutuel fait que l'inductance totale n'est plus simplement la somme des inductances des bobines. La figure 24.4b illustre comment les bobines sont raccordées en réalité. Dans le présent cas, les bobines sont réalisées sur un noyau de fer, mais les équations que nous élaborerons seront valables pour toute paire de bobines, peu importe la valeur du coefficient de couplage  $k$ . Adoptons dès maintenant la convention de représenter par  $L_1$  (ou  $L_2$ ) l'inductance propre qui induit une tension dans la première (deuxième) bobine, et de représenter par  $M_{12}$  l'inductance mutuelle. Cette convention nous sera particulièrement utile lorsque nous serons en présence de plusieurs termes mutuels.

En raison de la présence du terme mutuel, la tension induite  $e_1$  se compose de la tension générée par l'inductance propre  $L_1$  et de la tension générée par l'inductance mutuelle  $M_{12}$ , c'est-à-dire:

$$e_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{12} \frac{di_2}{dt}$$

Mais puisque:

$$e_1 = L_1 \frac{di}{dt} + M_{12} \frac{di}{dt}$$

$$e_1 = (L_1 + M_{12}) \frac{di}{dt} \quad (24.7a)$$

De façon semblable:

$$e_2 = (L_2 + M_{12}) \frac{di}{dt} \quad (24.7b)$$

La tension totale induite dans les deux bobines montées en série, tension représentée par  $e_T$ , est:

$$e_T = e_1 + e_2 = (L_1 + M_{12}) \frac{di}{dt} + (L_2 + M_{12}) \frac{di}{dt}$$

ou encore:

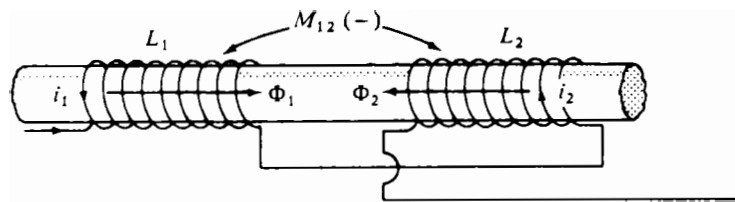
$$e_T = (L_1 + L_2 + M_{12} + M_{12}) \frac{di}{dt}$$

et l'inductance totale est:

$$L_{T(+)} = L_1 + L_2 + 2M_{12} \quad (H) \quad (24.8a)$$

L'apparition du symbole (+) dans l'indice inférieur indique que les termes mutuels sont positifs. Si les bobines étaient par contre réalisées de la façon illustrée à la figure 24.5, c'est-à-dire de telle sorte que  $\phi_1$  et  $\phi_2$  soient en opposition, la tension induite résultant du terme mutuel serait opposée à la tension résultant de l'inductance propre des bobines, et l'inductance totale serait déterminée par la relation:

$$L_{T(-)} = L_1 + L_2 - 2M_{12} \quad (H) \quad (24.8b)$$

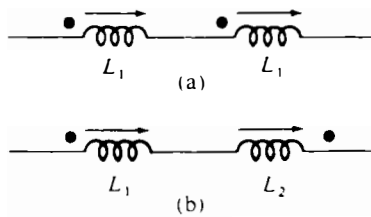


**FIG. 24.5** Bobines à couplage mutuel raccordées en série dont l'inductance mutuelle est négative.

Les deux équations ci-dessus permettent d'écrire pour l'inductance mutuelle:

$$M = \frac{1}{4} (L_{T(+)} - L_{T(-)}) \quad (H) \quad (24.9)$$





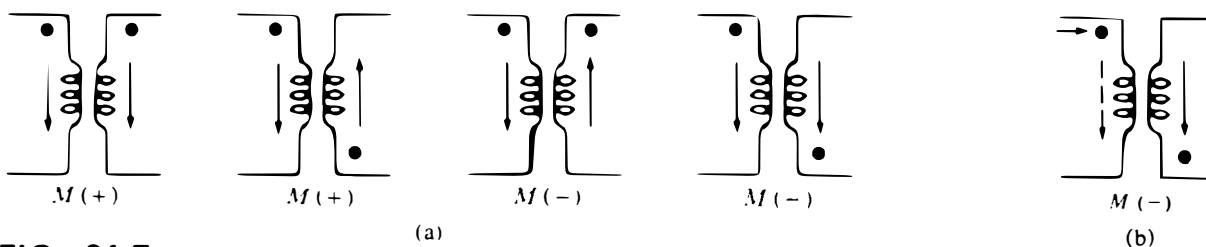
**FIG. 24.6** Convention des points: a) pour les bobines en série illustrées à la figure 24.4 et b) pour les bobines en série illustrées à la figure 24.5.

L'équation (24.9) permet de déterminer avec efficacité l'inductance mutuelle entre deux bobines. Cette équation énonce que l'inductance mutuelle est égale au quart de la différence entre l'inductance totale résultant d'une inductance mutuelle positive et l'inductance totale résultant d'une inductance mutuelle négative.

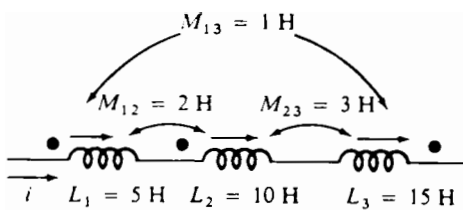
Il devrait maintenant apparaître clairement que l'inductance mutuelle influe directement sur la grandeur de la tension induite dans une bobine, puisqu'elle détermine l'inductance nette de cette bobine. Une analyse un peu plus poussée révèle en outre que le signe affectant le terme mutuel de chaque bobine d'une paire couplée est le même. Les deux termes de l'inductance  $L_{T(+)}$  étaient en effet positifs alors que les deux termes de l'inductance  $L_{T(-)}$  étaient tous deux négatifs. Il est parfois peu commode de dessiner les enroulements et les trajets des flux sur le schéma d'un réseau; on utilise alors des points pour indiquer si les termes mutuels sont positifs ou négatifs. La convention des points est représentée à la figure 24.6 dans le cas des bobines montées en série illustrées aux figures 24.4 et 24.5.

Le terme mutuel est positif si pour les deux bobines à couplage mutuel le courant passe dans les bobines avant (ou après) être passé par le point (figure 24.6a). Si au contraire le courant passe dans une bobine après être passé par le point et passe dans l'autre bobine avant d'être passé par le point, ou vice versa, le terme mutuel est négatif (figure 24.6b).

La figure 24.7a illustre quelques façons de coupler mutuellement deux bobines de transformateur. Le signe de  $M$  est indiqué pour chacune.



**FIG. 24.7**



**FIG. 24.8**

**EXEMPLE 24.2** Calculer l'inductance totale des bobines montées en série illustrées à la figure 24.8.

*Solution:*

Les deux courants passent dans les bobines après être passés par le point.

Bobine 1:  $L_1 + M_{12} - M_{13}$

Un courant passe dans la bobine après être passé dans le point, l'autre avant

Bobine 2:  $L_2 + M_{12} - M_{23}$

Bobine 3:  $L_3 - M_{23} - M_{13}$

À noter que le signe de chaque terme est le même que dans les deux équations ci-dessus.

Alors:

$$L_T = (L_1 + M_{12} - M_{13}) + (L_2 + M_{12} - M_{23}) + (L_3 - M_{23} - M_{13})$$

$$L_T = L_1 + L_2 + L_3 + 2M_{12} - 2M_{23} - 2M_{13}$$

et, par substitution:

$$L_T = 5 + 10 + 15 + 2(2) - 2(3) - 2(1)$$

$$L_T = 34 - 8 = 26 \text{ H}$$

**EXEMPLE 24.3** Écrire les équations de boucle pour le réseau à transformateur illustré à la figure 24.9.

*Solution:* Pour chaque bobine, le terme mutuel est positif et le signe de  $M$  dans  $\mathbf{X}_m = \omega M \angle 90^\circ$  est positif (bien regarder le sens des courants  $\mathbf{I}_1$  et  $\mathbf{I}_2$ ), de telle sorte que:

$$E_1 - I_1 R_1 - I_1 X_{L_1} - I_2 X_m = 0$$

ou encore:

$$E_1 - I_1 (R_1 + X_{L_1}) - I_2 X_m = 0$$

Dans l'autre boucle, on a:

$$-I_2 X_{L_2} - I_1 X_m - I_2 R_C = 0$$

ou encore:

$$I_2 (X_{L_2} + R_C) + I_1 X_m = 0$$

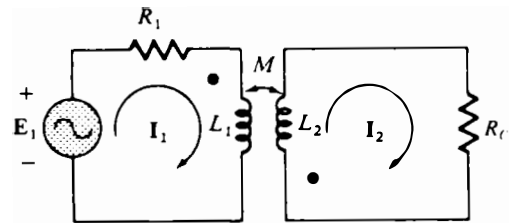
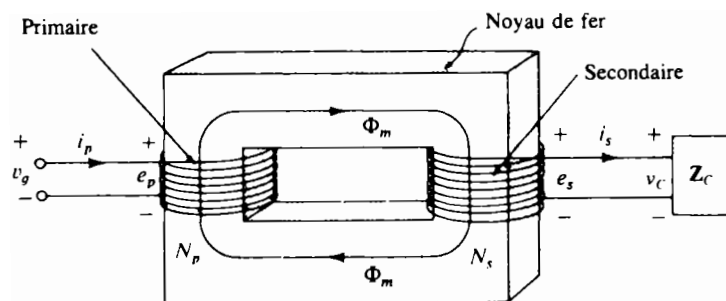


FIG. 24.9

## 24.4 TRANSFORMATEUR À NOYAU DE FER

La figure 24.10 illustre un transformateur à noyau de fer en circuit. Le noyau de fer a pour rôle d'augmenter le coefficient de couplage entre les bobines par accroissement du flux mutuel  $\Phi_m$ . Le noyau de fer constitue en effet le trajet de moindre réluctance qu'empruntent infailliblement les lignes de force magnétiques, comme nous l'avons appris au chapitre 11.



Nous supposons dans l'analyse qui suit que tout le flux embrassant la bobine 1 embrasse également la bobine 2, c'est-

FIG. 24.10 Transformateur à noyau de fer.



à-dire que le coefficient de couplage est maximal, égal à un, et que  $\phi_m = \phi_1$ . En outre, nous analyserons d'abord le transformateur parfait. En d'autres termes, nous négligerons les pertes qu'entraînent les caractéristiques géométriques et la résistance en courant continu des bobines, la réactance de fuite causée par le flux embrassant les deux bobines et n'étant pas partie de  $\phi_m$  ainsi que les pertes par hystérésis et les pertes de Foucault. Soulignons toutefois que cette hypothèse ne nous éloigne pas vraiment du fonctionnement réel d'un transformateur, la plupart des transformateurs fabriqués aujourd'hui étant presque parfaits. Les équations que nous élaborerons pour des conditions idéales seront, en règle générale, une première approximation de la réponse réelle et n'en différeront jamais de plus de quelques pour cent. Nous approfondirons l'étude des pertes à la section 24.6.

Lorsque le courant  $i_1$  passant dans le primaire du transformateur à noyau de fer est maximal, le flux  $\phi_m$  embrassant les deux bobines est également maximal. De fait, la grandeur du flux est directement proportionnelle à l'intensité du courant passant dans le primaire. Le flux et le courant sont donc en phase et la grandeur du flux varie comme une sinusoïde si le courant alimentant le primaire est sinusoïdal, c'est-à-dire que:

$$i_p = \sqrt{2}I_p \sin \omega t$$

de sorte que:

$$\phi_m = \Phi_{m(\max)} \sin \omega t$$

La tension induite dans le primaire par une alimentation sinusoïdale peut se déterminer au moyen de la loi de Faraday:

$$e_p = N_p \frac{d\phi_p}{dt} = N_p \frac{d\phi_m}{dt}$$

Par substitution de  $\phi_m$  par son expression, on a:

$$e_p = N_p \frac{d}{dt} (\Phi_{m(\max)} \sin \omega t)$$

ce qui donne, une fois faite la dérivée:

$$e_p = \omega N_p \Phi_{m(\max)} \cos \omega t$$

ou encore:

$$e_p = \omega N_p \Phi_{m(\max)} \sin(\omega t + 90^\circ)$$

relation qui indique que la tension induite  $e_p$  est en avance de  $90^\circ$  sur le courant du primaire.

La valeur efficace de  $e_p$  est:

$$E_p = \frac{\omega N_p \Phi_{m(\max)}}{\sqrt{2}} = \frac{2\pi f N_p \Phi_{m(\max)}}{\sqrt{2}}$$

et:

$$E_p = 4,44f N_p \Phi_{m(\max)}$$

(24.10a)

Cette dernière équation lie donc la valeur efficace de la tension aux bornes du primaire à la fréquence du courant ou de la tension d'alimentation, au nombre de spires du primaire et à la valeur maximale du flux magnétique embrassant le primaire.

Dans le cas qui nous préoccupe, le flux embrassant le secondaire est égal au flux embrassant le primaire. En répétant les étapes ci-dessus pour la tension induite dans le secondaire, nous obtenons la relation:

$$E_s = 4,44fN_s\Phi_{m(\max)} \quad (24.10b)$$

Divisons maintenant l'équation (24.10a) par l'équation (24.10b):

$$\frac{E_p}{E_s} = \frac{4,44fN_p\Phi_{m(\max)}}{4,44fN_s\Phi_{m(\max)}}$$

$$\frac{E_p}{E_s} = \frac{N_p}{N_s} \quad (24.11)$$

À noter que le rapport des grandeurs de tension induites est égal au rapport des spires du primaire et du secondaire.

Compte tenu maintenant du fait que:

$$e_p = N_p \frac{d\phi_m}{dt}$$

et du fait que:

$$e_s = N_s \frac{d\phi_m}{dt}$$

et, après division des deux relations suivantes:

$$\frac{e_p}{e_s} = \frac{N_p (d\phi_m/dt)}{N_s (d\phi_m/dt)}$$

on obtient:

$$\frac{e_p}{e_s} = \frac{N_p}{N_s}$$

Les valeurs *instantanées* de  $e_1$  et de  $e_2$  sont par conséquent liées par une constante égale au rapport des spires. Puisque leurs grandeurs instantanées sont liées par une constante, les tensions induites sont en phase et l'équation (24.11) peut s'écrire sous la même forme avec des vecteurs, c'est-à-dire:

$$\frac{\mathbf{E}_p}{\mathbf{E}_s} = \frac{N_p}{N_s} \quad (24.12)$$

ou encore, puisque  $\mathbf{V}_g = \mathbf{E}_1$  et  $\mathbf{V}_c = \mathbf{E}_2$  pour le transformateur parfait:

$$\frac{\mathbf{V}_g}{\mathbf{V}_c} = \frac{N_p}{N_s} \quad (24.13)$$



Le rapport  $N_p/N_s$ , habituellement représenté par la lettre minuscule  $a$ , est appelé *rapport de transformation*:

$$a = \frac{N_p}{N_s} \quad (24.14)$$

Si  $a < 1$ , le transformateur est appelé *transformateur élévateur*, puisque la tension  $E_s > E_p$ :

$$\frac{E_p}{E_s} = \frac{N_p}{N_s} = a$$

de sorte que:

$$E_s = \frac{E_p}{a}$$

et, si  $a < 1$ :

$$E_s > E_p$$

Si par contre  $a > 1$ , le transformateur est appelé *transformateur abaisseur* puisque  $E_s < E_p$ :

$$E_p = aE_s$$

et, si  $a > 1$ :

$$E_p > E_s$$

**EXEMPLE 24.4** Voir le transformateur à noyau de fer illustré à la figure 24.11.

- Calculer le flux maximal  $\Phi_{m(\max)}$ .
- Calculer le nombre de spires  $N_s$ .

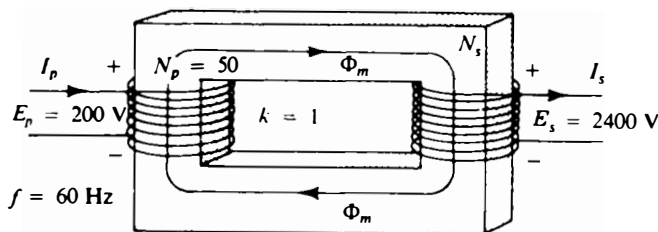


FIG. 24.11

*Solution:*

$$a. E_p = 4,44N_p f \Phi_{m(\max)}$$

Par conséquent:

$$\Phi_{m(\max)} = \frac{E_p}{4,44N_p f} = \frac{200}{(4,44)(50)(60)}$$

et

$$\Phi_{m(\max)} = \mathbf{15,02 \text{ mWb}}$$

$$b. \frac{E_p}{E_s} = \frac{N_p}{N_s}$$

Par conséquent:

$$N_s = \frac{N_p E_s}{E_p} = \frac{(50)(2400)}{200}$$

$$N_s = \mathbf{600 \text{ spires}}$$

La tension induite dans le secondaire du transformateur illustré à la figure 24.10 établit un courant  $i_s$  dans la charge  $Z_C$  et dans le secondaire. Ce courant génère une f.é.m.  $N_s i_s$ , qui n'existerait pas si le transformateur n'était pas raccordé à une charge, car alors  $i_s = 0$  et  $N_s i_s = 0$ . Mais que le transformateur soit raccordé ou non à une charge, la force magnétomotrice nette dans le noyau produite par le primaire et le secondaire doit demeurer constante pour qu'un flux  $\phi_m$  constant soit établi dans le noyau. Ce flux  $\phi_m$  doit demeurer constant pour qu'une tension constante soit induite dans le primaire pour équilibrer la tension d'alimentation du primaire. Pour contrebalancer la f.é.m. du secondaire, qui tend à faire varier le flux  $\phi_m$ , il doit passer un courant supplémentaire dans le primaire. Ce courant est la *composante de charge du courant primaire*, et est désigné par  $i'_p$ .

À l'équilibre:

$$N_p i'_p = N_s i_s$$

Le courant total passant dans le primaire lorsque le transformateur est raccordé à une charge est:

$$i_p = i'_p + i_{\phi_m}$$

où  $i_{\phi_m}$  est le courant devant exister dans le primaire pour que le flux  $\phi_m$  soit établi. Dans la plupart des applications réelles,  $i'_p > i_{\phi_m}$ . Aux fins de notre analyse, nous supposons  $i_p \cong i'_p$ , de sorte que:

$$N_p i_p = N_s i_s$$

Puisque les valeurs instantanées de  $i_p$  et  $i_s$  sont liées par le rapport de transformation, les vecteurs  $\mathbf{I}_p$  et  $\mathbf{I}_s$  sont également liés par ce rapport:

$$N_p \mathbf{I}_p = N_s \mathbf{I}_s$$

ou encore:

$$\boxed{\frac{\mathbf{I}_p}{\mathbf{I}_s} = \frac{N_s}{N_p}} \quad (24.15)$$

Rappelons que l'équation (24.15) n'est vraie que si on néglige les effets de  $i_{\phi_m}$ . Si ce n'est pas le cas, les grandeurs de  $\mathbf{I}_p$  et de  $\mathbf{I}_s$  ne sont pas liées par le rapport de transformation, et les deux vecteurs ne sont pas en phase.

Dans le transformateur élévateur,  $a < 1$  et le courant secondaire ( $I_s = a I_p$ ) est inférieur en grandeur à celui du primaire. Dans le transformateur abaisseur, c'est l'inverse qui est vrai.



## 24.5 IMPÉDANCE IMAGE ET PUISSANCE

Nous avons déjà établi que:

$$\frac{V_g}{V_C} = \frac{N_p}{N_s} \quad \text{et} \quad \frac{I_p}{I_s} = \frac{N_s}{N_p}$$

Par division, nous avons:

$$\frac{V_g/V_C}{I_p/I_s} = \frac{N_p/N_s}{N_s/N_p} = a$$

ou encore:

$$\frac{V_g/I_p}{V_C/I_s} = a^2$$

Mais, puisque:

$$Z_C = \frac{V_C}{I_s} \quad \text{et} \quad Z_p = \frac{V_g}{I_p}$$

nous avons:

$$Z_p = a^2 Z_C \quad (24.16)$$

Cette relation précise que l'impédance du primaire d'un transformateur parfait est égale au produit du carré du rapport de transformation par l'impédance de la charge. L'impédance d'une charge apparaît donc plus grande si cette dernière est raccordée au secondaire d'un transformateur abaisseur ( $a > 1$ ), et plus petite si cette dernière est raccordée au secondaire d'un transformateur élévateur ( $a < 1$ ). À noter que l'impédance image est capacitive si la charge est capacitive et qu'elle est inductive si la charge est inductive.

Dans le transformateur parfait à noyau de fer, nous avons:

$$\frac{E_p}{E_s} = a = \frac{I_s}{I_p}$$

ou encore:

$$E_p I_p = E_s I_s \quad (24.17)$$

et:

$$P_{\text{entrée}} = P_{\text{sortie}} \quad (\text{transformateur parfait}) \quad (24.18)$$

**EXEMPLE 24.5** Voir le transformateur à noyau de fer illustré à la figure 24.12.

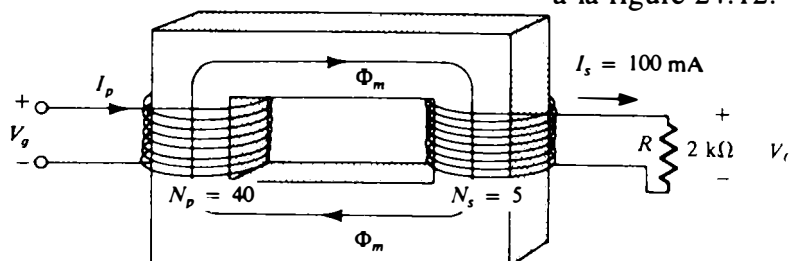


FIG. 24.12



- Calculer la grandeur du courant primaire ainsi que la tension appliquée aux bornes du primaire.
- Calculer la résistance d'entrée du transformateur.

Solution:

$$\text{a. } \frac{I_p}{I_s} = \frac{N_s}{N_p}$$

$$I_p = \frac{N_s}{N_p} I_s = \left(\frac{5}{40}\right) (0,1)$$

$$I_p = 12,5 \text{ mA}$$

$$V_c = I_s Z_L = (0,1)(2 \times 10^3)$$

$$V_c = 200 \text{ V}$$

$$\frac{V_p}{V_c} = \frac{N_p}{N_s}$$

$$V_p = \frac{N_p}{N_s} V_c = \left(\frac{40}{5}\right) (200)$$

$$V_p = 1600 \text{ V}$$

$$\text{b. } Z_p = a^2 Z_c \quad a = \frac{N_p}{N_s} = 8$$

$$Z_p = (8)^2 (2 \times 10^3)$$

$$Z_p = R_p = 128 \text{ k}\Omega$$

**EXEMPLE 24.6** Voir la figure 24.13. Pour que le circuit fournisse au haut-parleur une puissance maximale, la résistance interne de ce dernier doit être de  $540 \Omega$ . On utilise un transformateur pour raccorder le circuit au haut-parleur, pour que la résistance de  $15 \Omega$  de ce dernier apparaisse ainsi être de  $540 \Omega$ . Calculer le rapport de transformation nécessaire ainsi que le nombre de spires du primaire, si le secondaire compte 40 spires.

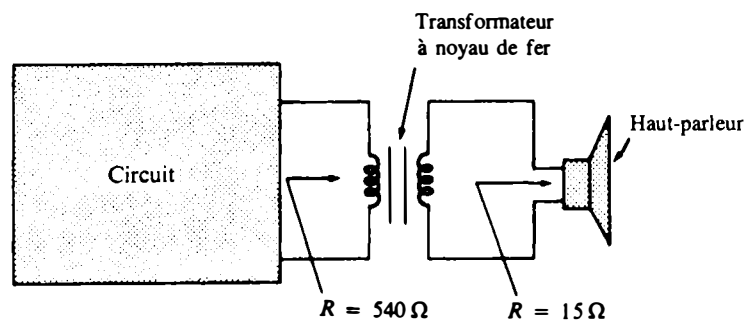


FIG. 24.13

Solution:

$$Z_p = a^2 Z_c$$





$$a = \sqrt{\frac{Z_p}{Z_c}} = \sqrt{\frac{540}{15}} = \sqrt{36} = 6$$

On a par conséquent:

$$a = 6 = \frac{N_p}{N_s}$$

ou encore:

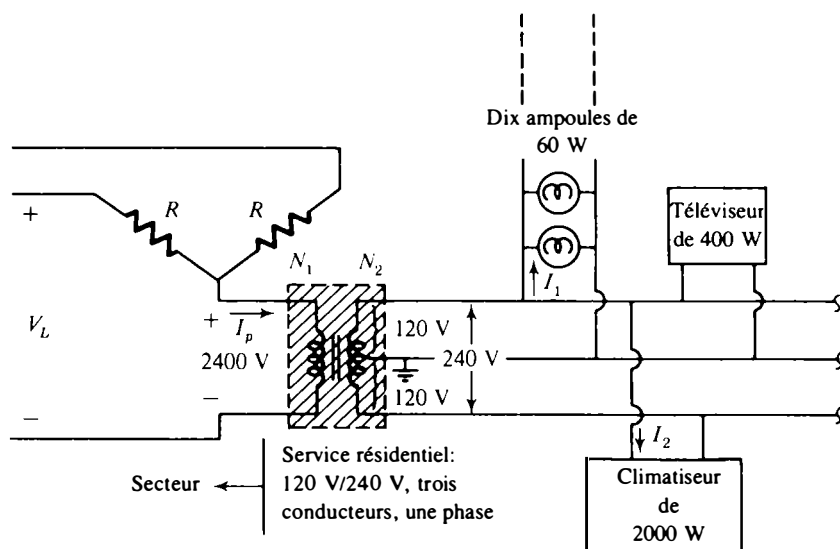
$$N_p = 6N_s$$

$$N_p = 6(40)$$

$$N_p = \mathbf{240 \text{ spires}}$$

**EXEMPLE 24.7** Le circuit illustré à la figure 24.14 est alimenté par le secteur. Si on suppose que la charge est purement résistive, déterminer:

- la valeur de  $R$  pour que la charge soit équilibrée;
- les grandeurs de  $I_1$  et de  $I_2$ ;
- la tension de ligne  $V_L$ ;
- la puissance totale fournie;
- le rapport  $N_1/N_2$ .



**FIG. 24.14**

*Solution:*

- La puissance totale est:

$$P_T = 600 + 400 + 2000 = 3000 \text{ W}$$

$$P_{\text{entrée}} = P_{\text{sortie}}$$

$$V_p I_p = V_s I_s = 3000 \text{ W (charge purement résistive)}$$

$$2400 I_p = 3000$$

$$I_p = 1,25 \text{ A}$$

$$R = \frac{V}{I} = \frac{2400}{1,25} = \mathbf{1920 \Omega}$$

b.  $P = (10)(60) = 600 \text{ W} = VI_1 = 120I_1$

et  $I_1 = 5 \text{ A}$

$P = 2000 \text{ W} = VI_2 = 240I_2$

et  $I_2 = 8\frac{1}{3} \text{ A}$

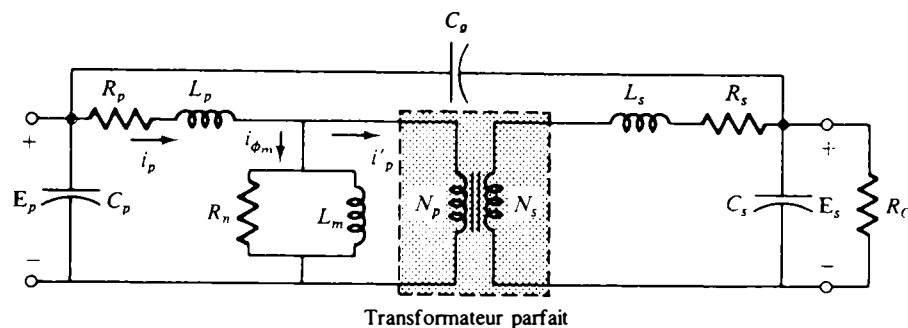
c.  $V_L = \sqrt{3}V_\phi = 1,73(2400) = 4152 \text{ V}$

d.  $P_T = 3P_\phi = 3(3000) = 9 \text{ kW}$

e.  $\frac{N_1}{N_2} = \frac{V_p}{V_s} = \frac{2400}{240} = 10$

## 24.6 CIRCUIT ÉQUIVALENT (TRANSFORMATEUR À NOYAU DE FER)

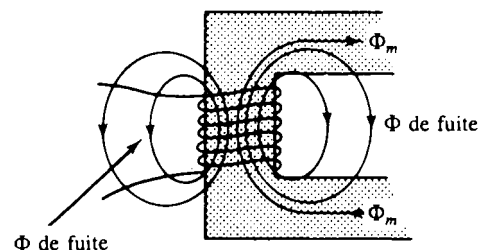
Le circuit équivalent du transformateur réel à noyau de fer est illustré à la figure 24.15. Comme on peut l'observer, il



**FIG. 24.15** Circuit équivalent d'un transformateur à noyau de fer réel.

comporte un transformateur parfait. Les autres éléments du circuit illustré à la figure sont ceux qui reproduisent les caractéristiques réelles du transformateur. Les résistances  $R_p$  et  $R_s$  représentent la résistance continue du primaire et du secondaire respectivement. Par ailleurs, dans tout transformateur réel, une certaine partie du flux embrassant chacune des bobines ne passe pas par le noyau. C'est ce qu'illustre la figure 24.16. Ce *flux de fuite*, qui représente une perte nette puisqu'il ne joue aucun rôle utile mais nécessite tout de même une certaine quantité d'énergie pour être établi, est symbolisé dans le circuit équivalent par une inductance  $L_p$  dans le circuit primaire et une inductance  $L_s$  dans le circuit secondaire. On emploie une bobine pour le représenter en raison de l'avance de  $90^\circ$  de la tension  $v$  sur le courant  $i$  (ou  $\phi$ ).

La résistance  $R_n$  représente les pertes par hystérésis et les pertes de Foucault (pertes dans le fer) qu'entraîne le passage d'un flux alternatif dans le noyau. L'inductance  $L_m$  (inductance d'aimantation) est l'inductance associée à l'aimantation du

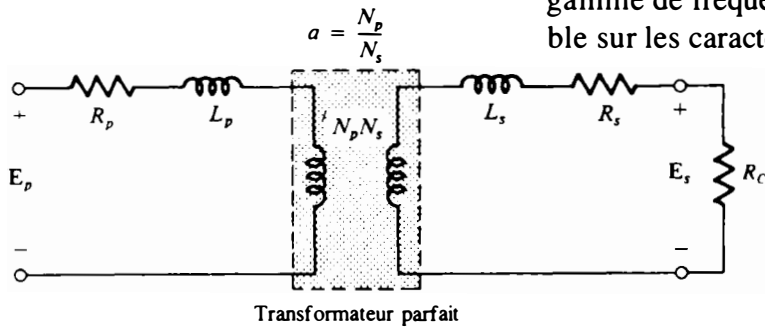


**FIG. 24.16**



noyau, c'est-à-dire à l'établissement du flux  $\phi_m$  dans le noyau. Les capacités  $C_p$  et  $C_s$  sont les capacités globales du primaire et du secondaire respectivement, et la capacité  $C_g$  est la capacité globale équivalente existant entre les enroulements du transformateur.

Puisque  $i'_p$  est habituellement beaucoup plus grand que  $i_{\phi m}$ , nous ne tiendrons pas compte de ce dernier courant pour l'instant (nous le supposons nul), ce qui explique l'absence de  $R_n$  et  $L_m$  dans le circuit équivalent simplifié illustré à la figure 24.17. En outre, les capacités  $C_p$ ,  $C_g$  et  $C_s$  n'apparaissent pas dans ce circuit étant donné que leur réactance dans la gamme de fréquences d'intérêt n'influe pas de façon appréciable sur les caractéristiques de transfert du transformateur.



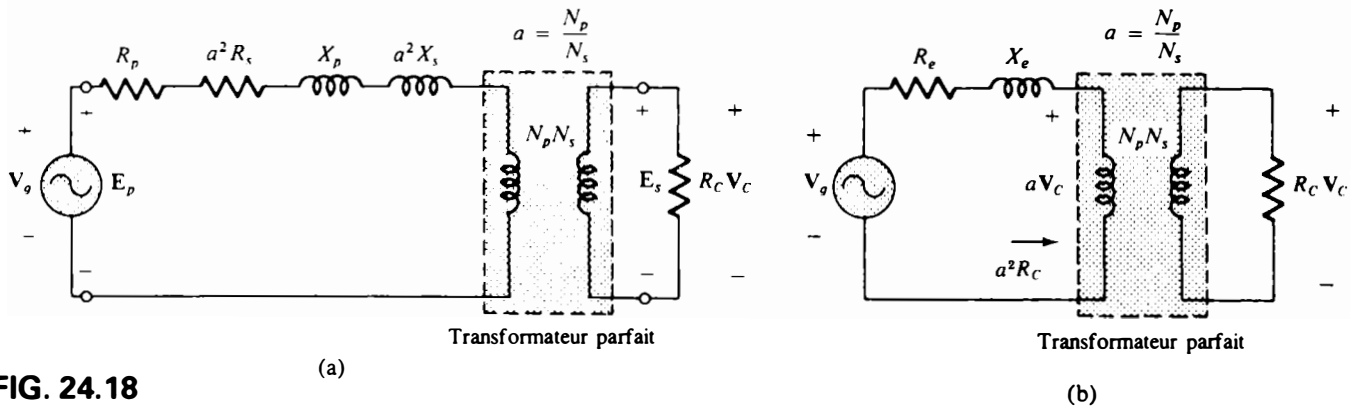
**FIG. 24.17** Circuit équivalent réduit du transformateur à noyau de fer non parfait.

Ramenons maintenant dans le primaire les images de la résistance et de l'inductance du secondaire, comme l'illustre la figure 24.18a. Nous obtenons ainsi dans un même circuit physique la tension aux bornes de la charge et la tension du générateur. La résistance totale ainsi que la réactance inductive totale sont déterminées par les relations:

$$R_{\text{équivalente}} = R_e = R_p + a^2 R_s \quad (24.19a)$$

et:

$$X_{\text{équivalente}} = X_e = X_p + a^2 X_s \quad (24.19b)$$

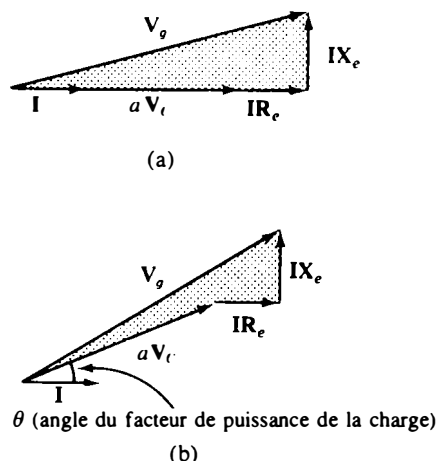


**FIG. 24.18**

Ces relations permettent de tracer le circuit équivalent illustré à la figure 24.18b. La tension aux bornes de la charge peut se déterminer directement à partir de ce circuit et à l'aide de la règle du diviseur de tension:

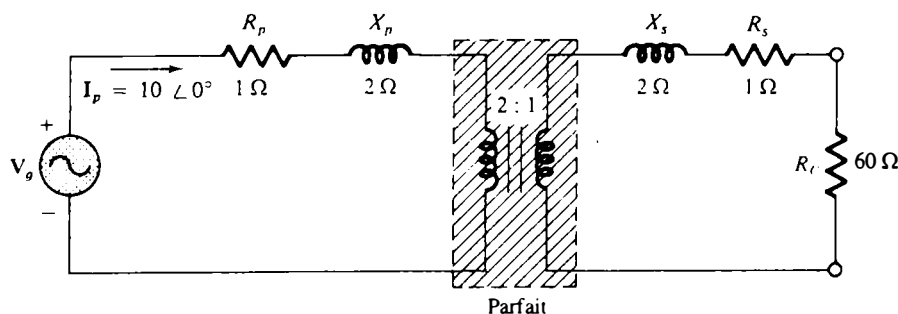
$$a V_c = \frac{a^2 R_c V_g}{(R_e + a^2 R_c) + jX_e} \quad (24.20)$$

La tension que doit fournir le générateur pour établir une tension donnée aux bornes de la charge peut ainsi être déterminée au moyen de l'équation (24.20). Les tensions aux bornes des éléments du circuit illustré à la figure 20.18b sont représentées vectoriellement à la figure 20.19a. Soulignons que le courant joue sur ce diagramme le rôle de vecteur de référence. Les tensions aux bornes des éléments résistifs sont donc *en phase* avec le courant, alors que la tension aux bornes de l'inductance équivalente est en avance de 90° sur le courant. La tension du primaire est, de par la loi des tensions, la somme vectorielle de ces tensions, comme l'illustre la figure 24.19a. La figure 24.19b représente le diagramme de phase obtenu quand la charge est inductive. On y voit que l'avance de phase de  $aV_c$  sur  $I$  est égale à l'angle du facteur de puissance de la charge. Le reste du diagramme est par ailleurs semblable à celui qu'on obtient pour une charge résistive. (Nous laissons au lecteur la tâche d'établir le diagramme de phase pour une charge capacitive.)



**FIG. 24.19** Diagramme de phase pour le transformateur à noyau de fer avec (a) une charge dont le facteur de puissance est égal à l'unité (purement résistive) et (b) une charge dont le facteur de puissance est inductif.

L'équation (24.20) et la figure 24.19 montrent bien l'incidence de  $R_e$  et de  $X_e$  sur la grandeur de  $V_g$  pour une tension  $V_c$  donnée. Ainsi il faut que  $V_g$  augmente pour que la tension aux bornes de la charge demeure la même si  $R_e$  ou  $X_e$  augmente. Soulignons enfin que  $V_c$  et  $V_g$  sont liées par le rapport de transformation quand  $R_e$  et  $X_e$  sont nulles.



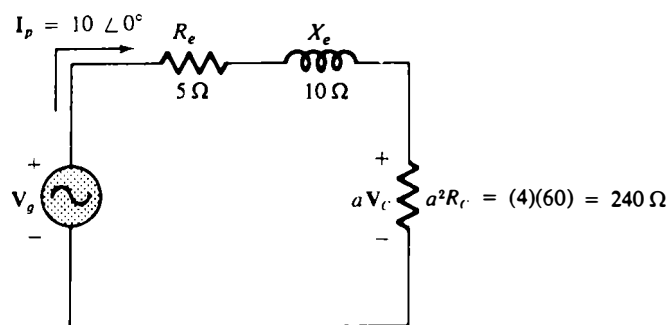
**FIG. 24.20**

**EXEMPLE 24.8** La figure 24.20 illustre le circuit équivalent d'un transformateur. Déterminer:

- a.  $R_e$  et  $X_e$ ;
- b.  $V_g$ .

*Solution:*

- a.  $R_e = R_p + a^2 R_s = 1 + (2)^2 1 = 5 \Omega$   
 $X_e = X_p + a^2 X_s = 2 + (2)^2 2 = 10 \Omega$



**FIG. 24.21**

- b. Le circuit équivalent simplifié est illustré à la figure 24.21.



$$aV_C = (I_p)(a^2R_C) = 2400 \text{ V}$$

de sorte que:

$$V_C = \frac{2400}{a} = \frac{2400}{2} = 1200 \text{ V}$$

et:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_g &= \mathbf{I}_p(R_e + a^2R_C + jX_e) \\ &= 10(5 + 240 + j10) = 10(245 + j10) \end{aligned}$$

$$\mathbf{V}_g = 2450 + j100$$

$$V_g = 2452,04 \text{ V}$$

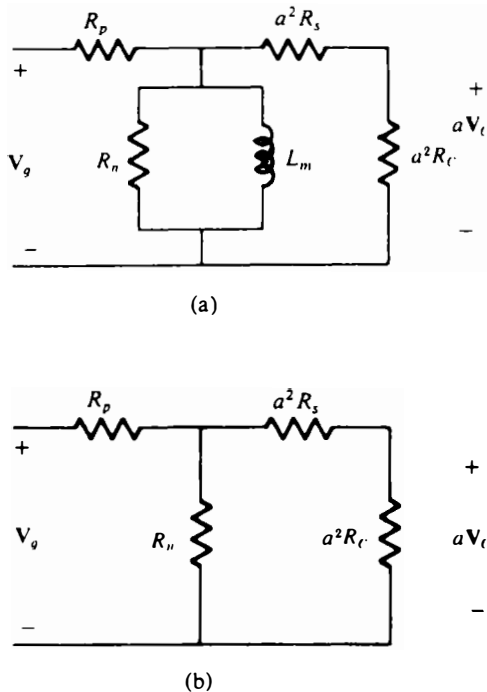
Si  $R_e$  et  $X_e = 0$ ,  $V_g = aV_C = 2400$ . Il est par conséquent nécessaire d'augmenter la tension du générateur de 50 V, pour que la tension aux bornes de la charge demeure la même.

## 24.7 INCIDENCE DE LA FRÉQUENCE

Dans certaines gammes de fréquences, on peut négliger les effets de certains paramètres du circuit équivalent du transformateur à noyau de fer illustré à la figure 24.15. Dans les lignes qui suivent, nous allons considérer les circuits équivalents du transformateur dans la région des basses, moyennes et hautes fréquences, et examiner rapidement les caractéristiques de chacun.

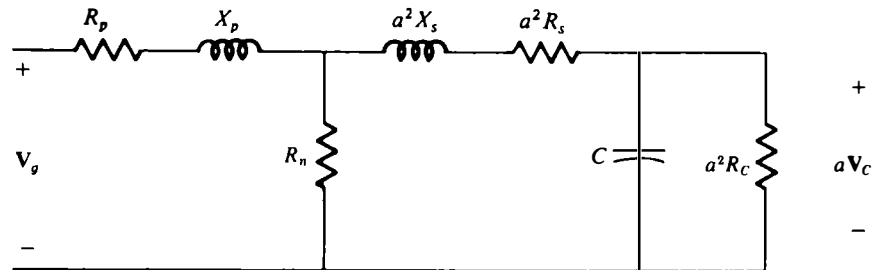
Dans la région des basses fréquences, la réactance ( $2\pi fL$ ) du primaire et les réactances de fuite du secondaire peuvent être négligées, le circuit équivalent image résultant étant illustré à la figure 24.22a. L'inductance d'aimantation doit toutefois être incluse, puisqu'elle est en parallèle avec le secondaire image. Lorsque la fréquence s'approche de zéro, la réactance de l'inductance d'aimantation chute en grandeur et entraîne une baisse de la tension aux bornes du secondaire. Quand  $f = 0 \text{ Hz}$ ,  $L_m$  constitue idéalement un court-circuit et  $V_C = 0$ . Lorsque la fréquence augmente, la réactance de  $L_m$  devient à un moment donné suffisamment grande comparativement à l'impédance du secondaire image pour être négligée. Le circuit équivalent image aux moyennes fréquences est alors celui illustré à la figure 24.22b. On y constate l'absence de tout élément réactif, étant donné que la tension du générateur et la tension aux bornes de la charge sont *en phase*.

Aux fréquences plus élevées, il faut tenir compte des réactances de fuite du primaire et du secondaire ainsi que des éléments capacitifs (figure 24.23). Aux fins de notre analyse, nous avons représenté  $C_p$  et  $C_s$  par un seul condensateur  $C$



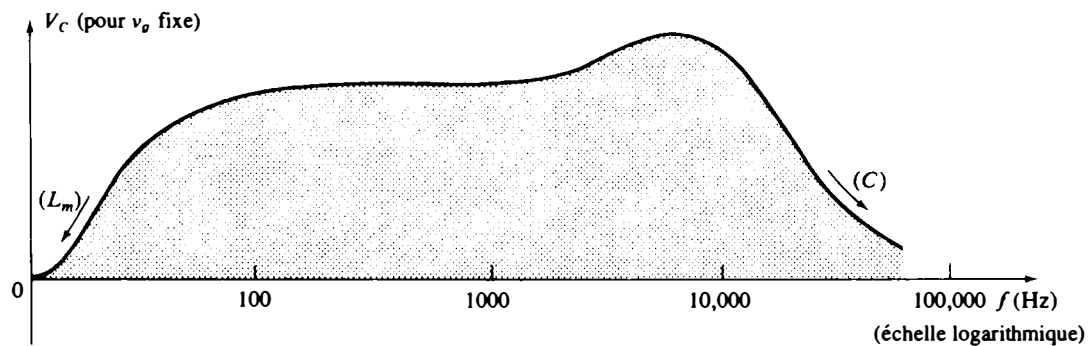
**FIG. 24.22** (a) Circuit équivalent image aux basses fréquences. (b) Circuit image aux fréquences moyennes.

dans le réseau image illustré à cette figure;  $C_p$  n'y apparaît par contre pas puisque c'est l'effet de  $C$  qui est prédominant. À mesure que la fréquence augmente, la réactance capacitive ( $X_C = 1/2\pi fC$ ) décroît au point qu'elle court-circuite le secondaire du transformateur, ce qui entraîne une chute de  $V_C$ .



**FIG. 24.23** Circuit équivalent image aux hautes fréquences.

La courbe de réponse fréquentielle d'un transformateur typique est illustrée à la figure 24.24. On y a indiqué le principal élément responsable de la chute de la courbe dans les régions des basses et hautes fréquences. La valeur maximale atteinte par la courbe se produit dans la région des hautes fréquences et elle est due au circuit résonant série composé de  $R_e$ ,  $X_e(L)$  et  $C$ . Le circuit résonant est en effet à la résonance ou presque dans le voisinage immédiat de cette valeur maximale.

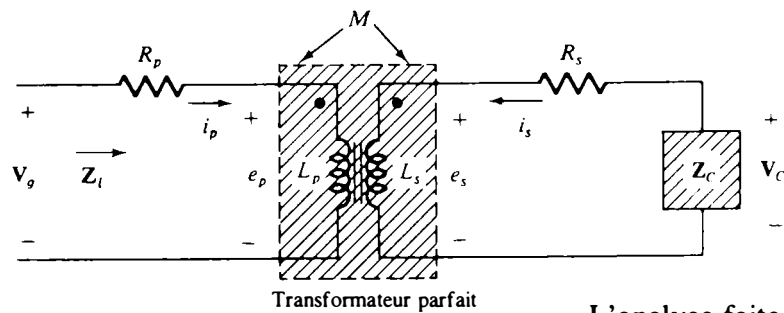


**FIG. 24.24** Courbe de réponse fréquentielle du transformateur.

Le réseau que nous avons étudié en détail antérieurement dans le chapitre fonctionnait dans la partie supérieure de la région des moyennes fréquences.

## 24.8 TRANSFORMATEUR À NOYAU D'AIR

Comme son nom l'indique, le transformateur à noyau d'air ne possède pas de noyau ferromagnétique liant le primaire et le secondaire. C'est plutôt le rapprochement des bobinages qui crée une inductance mutuelle établissant l'action transformatrice. Nous indiquons à la figure 24.25 le sens des courants et la polarité des tensions pour un transformateur à noyau d'air. La convention des points nous permet de déterminer que le terme d'inductance mutuelle  $M$  est positif.



**FIG. 24.25** Circuit équivalent du transformateur à noyau d'air.

L'analyse faite antérieurement dans le chapitre nous permet d'écrire pour le primaire:

$$e_p = L_p \frac{di_p}{dt} + M \frac{di_s}{dt} \quad (24.21)$$

Dans le cas d'une bobine pure, ne donnant lieu à aucune inductance mutuelle, nous avons appris au chapitre 11 que la relation mathématique:

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt}$$

permet d'exprimer la tension aux bornes d'une bobine sous la forme utile suivante:

$$V_1 = I_1 X_{L_1} \quad \text{ou} \quad X_{L_1} = \omega L_1 \angle 90^\circ = j\omega L_1$$

De façon semblable, on peut démontrer, pour une inductance mutuelle, que:

$$v_1 = M \frac{di_2}{dt}$$

ce qui permet d'écrire:

$$V_1 = I_2 X_m \quad \text{où} \quad X_m = \omega M \angle 90^\circ = j\omega M$$

(24.22)

L'équation (24.21) peut alors se réécrire (avec des vecteurs):

$$E_p = I_p X_{L_p} + I_s X_m \quad (24.23)$$

et:

$$V_g = I_p R_p + I_p X_{L_p} + I_s X_m$$

ou encore:

$$V_g = I_p (R_p + X_{L_p}) + I_s X_m \quad (24.24)$$

Pour le secondaire, nous avons:

$$E_s = I_s X_{L_s} + I_p X_m \quad (24.25)$$

et:

$$V_C = I_s R_s + I_s X_{L_s} + I_p X_m$$

ou encore:

$$V_C = I_s (R_s + X_{L_s}) + I_p X_m \quad (24.26)$$

Par substitution, nous obtenons:

$$V_C = -I_s Z_C$$

et, enfin:

$$0 = I_s(R_s + X_{L_s} + Z_C) + I_p X_m$$

L'expression de  $I_s$  est:

$$I_s = \frac{-I_p X_m}{R_s + X_{L_s} + Z_C}$$

et, par substitution dans l'équation (24.24), nous obtenons:

$$V_\theta = I_p(R_p + X_{L_p}) + \left( \frac{-I_p X_m}{R_s + X_{L_s} + Z_C} \right) X_m$$

de telle sorte que l'impédance d'entrée est:

$$Z_i = \frac{V_\theta}{I_p} = R_p + X_{L_p} - \frac{X_m^2}{R_s + X_{L_s} + Z_C}$$

Définissons maintenant:

$$Z_p = R_p + X_{L_p} \quad \text{et} \quad Z_s = R_s + X_{L_s}$$

Nous obtenons alors par substitution:

$$X_m = j\omega M$$

$$Z_i = Z_p - \frac{(+j\omega M)^2}{Z_s + Z_C}$$

et:

$$Z_i = Z_p + \frac{(\omega M)^2}{Z_s + Z_C} \quad (24.27)$$

Le terme  $(\omega M)^2 / (Z_s + Z_C)$  est l'impédance couplée. On notera qu'il est indépendant du signe de  $M$ . On constatera aussi que le numérateur  $(\omega M)^2$  est une constante à déphasage nul. Si  $Z_2$  est résistive, l'impédance couplée résultante apparaît donc capacitive, en raison de la division de  $(\omega M)^2$  par  $R_C + Z_s$ . Cette réactance capacitive résultante s'oppose à l'inductance  $L_p$  du primaire en série, ce qui entraîne une diminution de  $Z_i$ . La figure 24.26 illustre comment apparaît alors l'impédance d'entrée du réseau, incluant l'effet du terme mutuel.

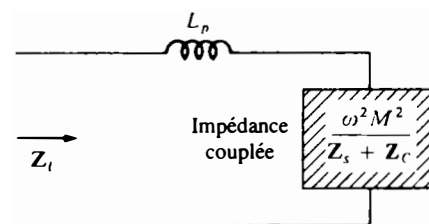


FIG. 24.26 Caractéristiques d'entrée du transformateur à noyau d'air.

**EXEMPLE 24.9** Déterminer l'impédance d'entrée du transformateur à noyau d'air illustré à la figure 24.27.

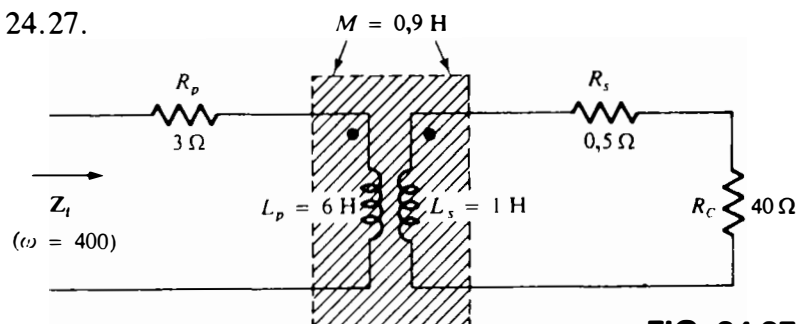


FIG. 24.27





Solution:

$$\begin{aligned}
 Z_i &= Z_p + \frac{(\omega M)^2}{Z_s + Z_c} \\
 &= R_p + jX_{L_p} + \frac{(\omega M)^2}{R_s + jX_{L_s} + R_c} \\
 &= 3 + j2,4 \times 10^3 + \frac{(360)^2}{0,5 + j400 + 40} \\
 &\cong j2,4 \times 10^3 + \frac{129,6 \times 10^3}{40,5 + j400} \\
 &= j2,4 \times 10^3 + \frac{129,6 \times 10^3}{402,05 \angle 84,22^\circ} \\
 &= j2,4 \times 10^3 + 322,4 \angle -84,22^\circ = j2,4 \times 10^3 \\
 &\quad + \underbrace{(0,0325 \times 10^3 - j0,3208 \times 10^3)}_{\text{capacitive}} \\
 &= 0,0325 \times 10^3 + j(2,40 \times 10^3 - 0,3208 \times 10^3) \\
 Z_i &= 32,5 + j2079 = R_i + jX_{L_i} = 2079,25 \angle 89,10^\circ
 \end{aligned}$$

## 24.9 LE TRANSFORMATEUR, DISPOSITIF D'ISOLEMENT

Le transformateur est fréquemment utilisé pour isoler une partie d'un circuit électrique d'une autre. Par *isoler*, nous entendons l'absence de toute connexion physique directe. Nous donnons comme premier exemple de cet emploi du transformateur la mesure de tensions de ligne de l'ordre des 40 000 V (figure 24.28).

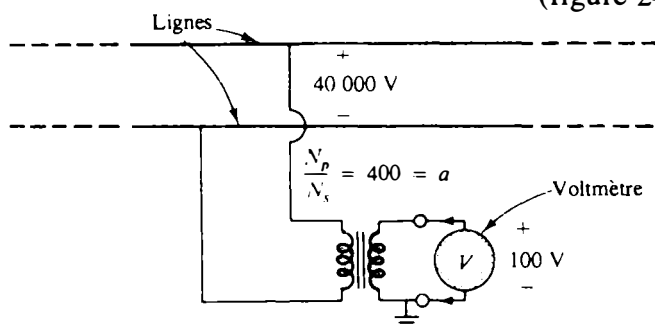


FIG. 24.28

Il serait évidemment dangereux d'utiliser un voltmètre pour mesurer directement une tension de 40 000 V, car en faisant les connexions nécessaires on pourrait toucher aux conducteurs. Mais en dotant au départ le système de distribution d'un transformateur, on amène la tension à un niveau ne présentant aucun danger pendant la mesure, la tension réelle étant déterminée compte tenu du rapport de transformation. Le transformateur sert donc de dispositif d'isolement en abaissant la tension de ligne.

Comme deuxième exemple, considérons l'application de la tension  $v_x$  à l'entrée verticale d'un oscilloscope (figure 24.29).

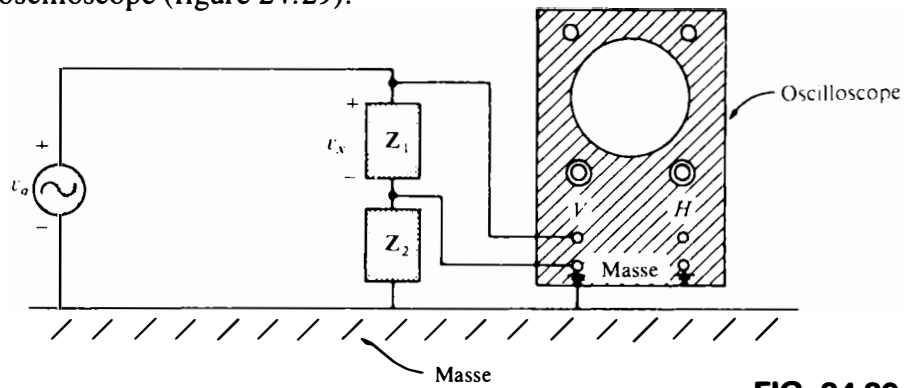


FIG. 24.29

Si les connexions sont établies comme l'illustre la figure et si le générateur et l'oscilloscope ont une masse commune, l'impédance  $Z_2$  est de fait court-circuitée à la masse. La tension appliquée à l'entrée de l'oscilloscope n'a donc aucun sens physique et n'est pas représentative de la tension  $v_x$ . En outre, si  $Z_2$  est l'impédance qui limite le courant dans le circuit, il est possible que le courant passant dans l'appareil augmente suffisamment pour l'endommager. Si par contre on utilise un transformateur comme à la figure 24.30, on surmonte ce problème et la tension appliquée à l'entrée de l'oscilloscope est bien représentative de la tension  $v_x$ .

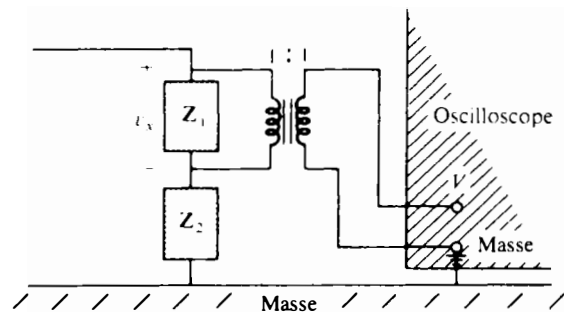


FIG. 24.30

## 24.10 DONNÉES DE LA PLAQUE SIGNALÉTIQUE

Voici ce que pourraient être les caractéristiques nominales d'un transformateur de puissance typique:

$$5 \text{ kVA}, \quad 2000/100 \text{ V}, \quad 60 \text{ Hz}$$

Soulignons que les tensions nominales données ci-dessus peuvent être celles du primaire ou du secondaire, c'est-à-dire que si la tension du primaire est de 2000 V, celle du secondaire est de 100 V et vice versa. La caractéristique 5 kVA est la puissance apparente nominale ( $S = VI$ ) du transformateur. Par conséquent, pour une tension du secondaire de 100 V, le courant de charge maximal est:

$$I_c = \frac{S}{V_c} = \frac{5000}{100} = 50 \text{ A}$$

et pour une tension du secondaire de 2000 V, il est:

$$I_c = \frac{S}{V_c} = \frac{5000}{2000} = 2.5 \text{ A}$$



La figure 24.31 laisse deviner pourquoi on donne habituellement la puissance apparente nominale d'un transformateur plutôt que sa puissance moyenne: c'est qu'elle permet de calculer le courant admissible.

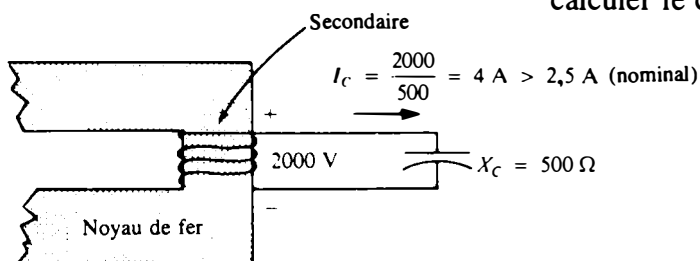


FIG. 24.31

Ainsi, le transformateur illustré à la figure risque d'être endommagé de façon permanente, car le courant qui traverse la charge est supérieur au courant admissible. À cet égard, la puissance moyenne ne renseigne pas, puisqu'elle est nulle dans le cas présent, la charge étant purement capacitive.

Le transformateur illustré a deux rapports de transformation. Si la tension du secondaire est de 2000 V, le rapport de transformation est  $a = N_p/N_s = V_g/V_C = 100/2000 = 1/20$ , le transformateur étant un élévateur. Si par contre la tension du secondaire est de 100 V, le rapport de transformation est  $a = N_p/N_s = V_g/V_C = (2000/100) = 20$ , le transformateur étant un abaisseur.

Le courant nominal du primaire peut être déterminé par la simple application de l'équation (24.15); on obtient ainsi:

$$I_1 = \frac{I_2}{a}$$

ce qui est égal à  $[2,5/(1/20)] = 50 \text{ A}$  si la tension du secondaire est de 2000 V, et à  $(50/20) = 2,5 \text{ A}$  si elle est de 100 V.

Il est d'autre part indispensable de préciser la fréquence sur la plaque signalétique. Pour s'en convaincre, voyons l'équation (24.10a):

$$E_p = 4,44f_p N_p \Phi_{m(\max)}$$

ainsi que la courbe  $B-H$  du noyau de fer du transformateur (figure 24.32).

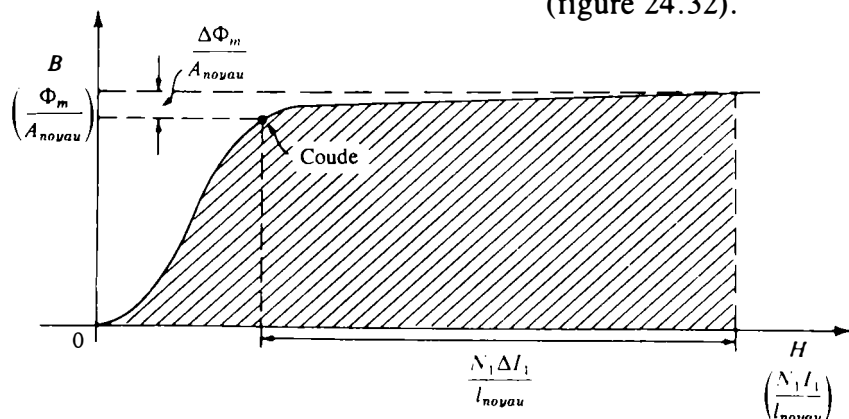


FIG. 24.32

Le point de fonctionnement sur la courbe  $B-H$  de la plupart des transformateurs se situe sur le coude. Si la fréquence de l'alimentation chute, et que par ailleurs  $N_p$  et  $E_p$  demeurent constants, le flux  $\Phi_{m(\max)}$  doit augmenter en grandeur, comme l'indique l'équation (24.10a):

$$\Phi_{m(\max)} \uparrow = \frac{E_p}{4,44 f_p \downarrow N_p}$$

Au moyen de la courbe  $B-H$ , on constate que cette augmentation du flux  $\Phi_{m(\max)}$  entraîne le passage d'un courant très intense dans le primaire, ce qui risque d'endommager le transformateur.

## 24.11 TYPES DE TRANSFORMATEURS

Les transformateurs se présentent sous de nombreuses formes et sont de dimensions variées. Les plus communs sont notamment le transformateur de puissance, le transformateur audio-fréquences, le transformateur FI (fréquences intermédiaires) et le transformateur RF (radiofréquences). Chacun est conçu pour jouer un rôle particulier. La figure 24.33 illustre les symboles de certains types fondamentaux de transformateurs.

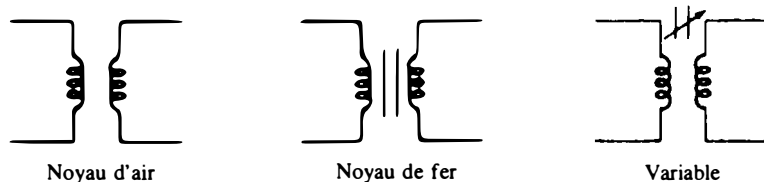


FIG. 24.33

La fabrication des transformateurs varie également. La figure 24.34 illustre deux des nombreuses façons d'enrouler le primaire et le secondaire sur un noyau de fer. Dans les deux cas, le noyau est constitué de feuilles d'un matériau ferromagnétique séparées par un isolant qui réduit les pertes de Foucault. Le matériau ferromagnétique contient lui-même un faible pourcentage de silicium, dopage qui a pour but de réduire les pertes par hystérésis.

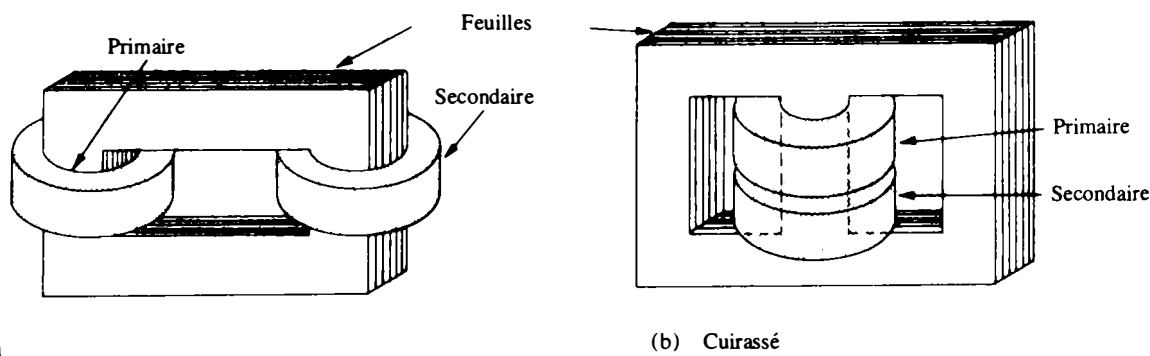
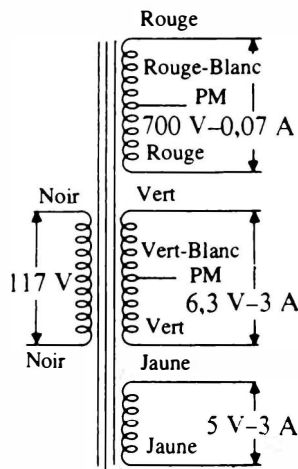


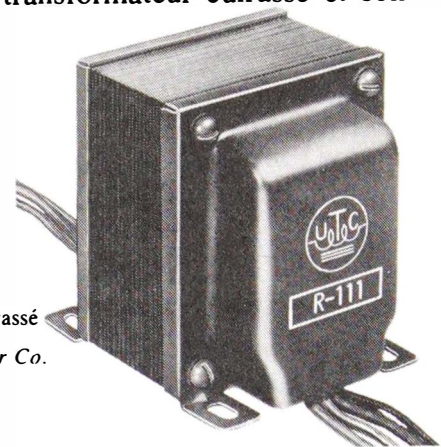
FIG. 24.34



(b) Schéma

FIG. 24.35

La figure 24.35 illustre un transformateur cuirassé et son schéma.



Transformateur de puissance cuirassé  
 Courtoisie de United Transformer Co.

L'autotransformateur (figure 24.36b) est un transformateur de puissance qui, plutôt que de faire appel à deux circuits (isolement complet entre les bobines), a un seul enroulement commun à l'entrée et à la sortie. Le rapport des tensions induites est égal au rapport de transformation, tout comme dans le cas d'un transformateur à deux circuits indépendants. Raccordé de la façon voulue, le transformateur de puissance à deux circuits peut aussi servir d'autotransformateur. Le principal avantage de cette utilisation est qu'elle permet la transformation d'une plus grande puissance apparente. Cette possibilité peut se démontrer à l'aide du transformateur à deux circuits illustrés à la figure 20.36a, qui est raccordé en autotransformateur à la figure 20.36b.

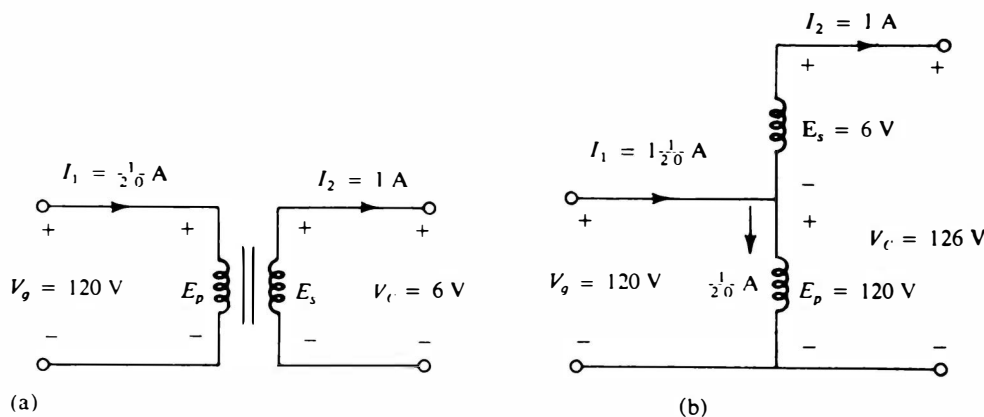


FIG. 24.36 Autotransformateur.

Dans le transformateur à deux circuits, on note que  $S = (1/20) \times (120) = 6 \text{ VA}$ , alors que pour l'autotransformateur  $S = (1 \frac{1}{20}) \times (120) = 126 \text{ VA}$ , soit de nombreuses fois la puissance apparente du transformateur à deux circuits. On constatera également que le courant et la tension de chaque enroulement sont les mêmes que dans le cas du montage à deux circuits.

L'inconvénient de l'autotransformateur est évident: suppression de l'isolement entre le primaire et le secondaire.

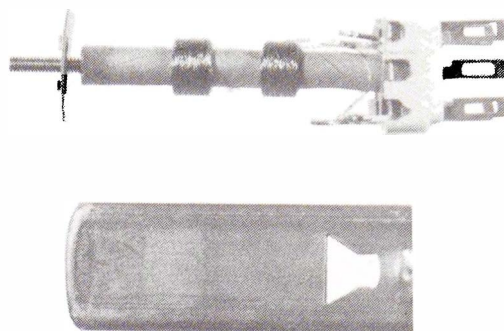
Les transformateurs RF et FI sont d'emploi courant dans les émetteurs et récepteurs de radio et de télévision. Leur fabrication est quelque peu différente des transformateurs que nous



avons décrit. La figure 24.37 représente des transformateurs RF et FI caractéristiques. Les deux types sont vendus avec ou sans blindage. Les transformateurs illustrés sont accordables, c'est-à-dire qu'il est possible de faire varier le flux  $\phi_m$  et, par conséquent, le coefficient de couplage  $k$  par déplacement du noyau ferromagnétique dans les enroulements du primaire et du secondaire.



(a) Transformateur RF

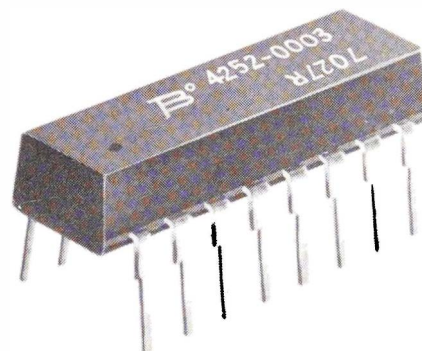
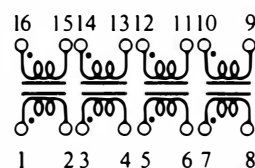


(b) Transformateur FI

FIG. 24.37

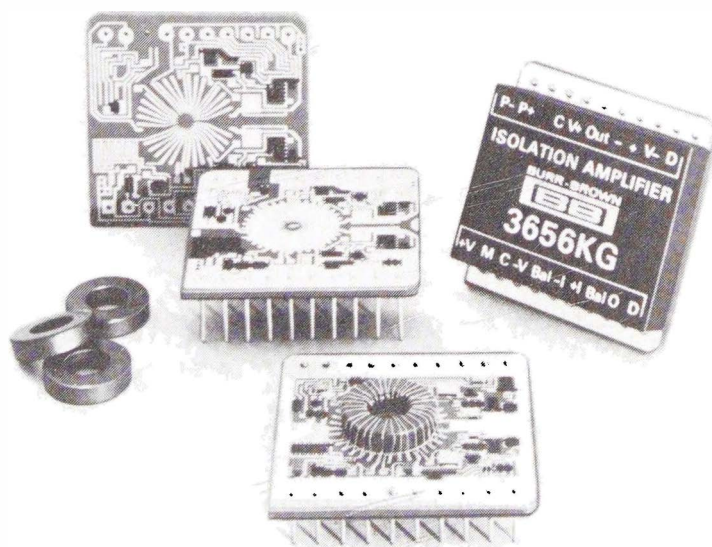
La figure 24.38 représente des transformateurs d'impulsions sous boîtier à double rangée de broches; ce boîtier se monte aussi bien sur les circuits intégrés que sur les circuits imprimés. Le schéma indique qu'il y a quatre transformateurs identifiés à l'aide de la convention des points. Les données de l'un de ces transformateurs sont les suivantes: rapport de transformation 2/1; inductance de fuite de 0,50  $\mu\text{H}$ ; capacité de couplage de 7 pF; résistance continue du primaire de 0,19  $\Omega$ ; résistance du secondaire de 0,13  $\Omega$ .

Un transformateur compatible hybride est illustré à la figure 24.39. L'ensemble illustré permet d'obtenir un transformateur pré-assemblé ainsi qu'un circuit intégré hybride standard sur lequel d'autres composants peuvent être montés.



Courtoisie de Bourns®, Inc.

FIG. 24.38 Transformateurs d'impulsions sous boîtier à double rangée de broches.



Courtoisie de Burr-Brown Research Corp., Inc.

FIG. 24.39 Transformateur compatible hybride.

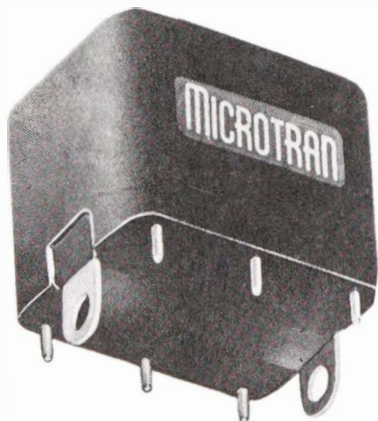


Courtoisie de TRW/UTC Transformers.

**FIG. 24.40** Transformateur d'impulsions.

La figure 24.40 représente un transformateur d'impulsions conçu pour produire ou transférer une impulsion d'énergie électrique. Les transformateurs de ce genre peuvent ne mesurer qu'un demi-centimètre de diamètre.

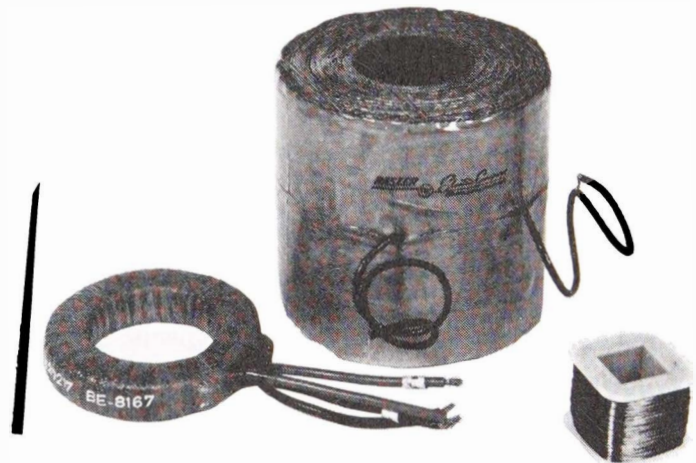
Enfin, la figure 24.41 représente un transformateur miniature de radio, enfichable sur carte imprimée, ainsi qu'un transformateur variable, c'est-à-dire que son coefficient de couplage entre les enroulements est variable.



(a) Transformateur miniature de radio, enfichable sur une carte imprimée.

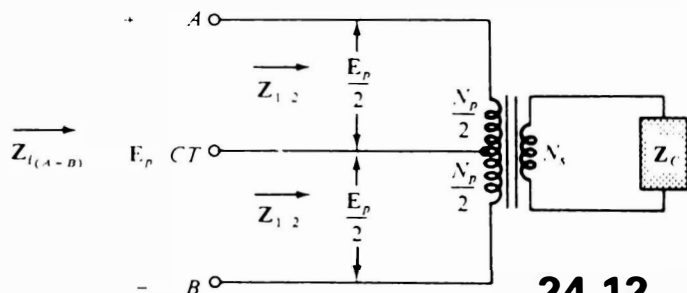
Courtoisie de Microtran Company Inc.

**FIG. 24.41**



(b) Transformateur variable

Courtoisie de Basler Electric Co.



**FIG. 24.42** Transformateur parfait à prise médiane sur le primaire.

## 24.12 TRANSFORMATEURS À PRISE MÉDIANE ET À PLUSIEURS SECONDAIRES

La figure 24.42 représente un transformateur à prise médiane (sur le primaire). La tension entre la prise médiane et l'une ou l'autre des deux entrées est  $E_p/2$ , la relation entre  $E_p$  et  $E_s$  étant

$$\boxed{\frac{E_p}{E_s} = \frac{N_p}{N_s}} \quad (24.28)$$

Pour chaque moitié du primaire on a:

$$Z_{1/2} = \left(\frac{N_p/2}{N_s}\right)^2 Z_c$$

$$Z_{1/2} = \frac{1}{4} \left(\frac{N_p}{N_s}\right)^2 Z_c$$

de sorte que:

$$\boxed{Z_{1/2} = \frac{1}{4} Z_i} \quad (24.29)$$

comme il est indiqué à la figure 24.42.

Dans le transformateur à plusieurs secondaires illustré à la figure 24.43, les relations sont les suivantes:

$$\boxed{\frac{E_1}{E_2} = \frac{N_1}{N_2}, \quad \frac{E_1}{E_3} = \frac{N_1}{N_3}, \quad \frac{E_2}{E_3} = \frac{N_2}{N_3}} \quad (24.30)$$

L'impédance totale de l'entrée peut être déterminée à partir du fait que dans le transformateur parfait la puissance fournie au primaire est égale à la puissance utilisée par la charge, c'est-à-dire que:

$$P_1 = P_{C_2} + P_{C_3}$$

soit:

$$\frac{E_1^2}{Z_1} = \frac{E_2^2}{Z_2} + \frac{E_3^2}{Z_3}$$

Puisque:

$$E_2 = \frac{N_2}{N_1} E_1 \quad \text{et} \quad E_3 = \frac{N_3}{N_1} E_1$$

on a par ailleurs:

$$\frac{E_1^2}{Z_1} = \frac{[(N_2/N_1)E_1]^2}{Z_2} + \frac{[(N_3/N_1)E_1]^2}{Z_3}$$

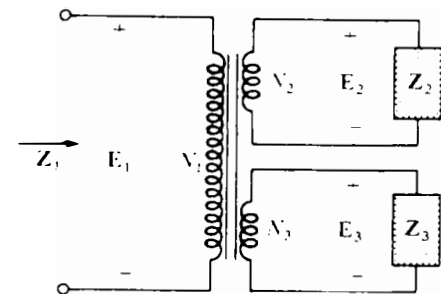
et:

$$\frac{E_1^2}{Z_1} = \frac{E_1^2}{(N_1/N_2)^2 Z_2} + \frac{E_1^2}{(N_1/N_3)^2 Z_3}$$

de sorte que:

$$\boxed{\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{(N_1/N_2)^2 Z_2} + \frac{1}{(N_1/N_3)^2 Z_3}} \quad (24.31)$$

Cette relation indique que les impédances des charges sont réfléchies en parallèle.



**FIG. 24.43** Transformateur parfait à charges multiples.



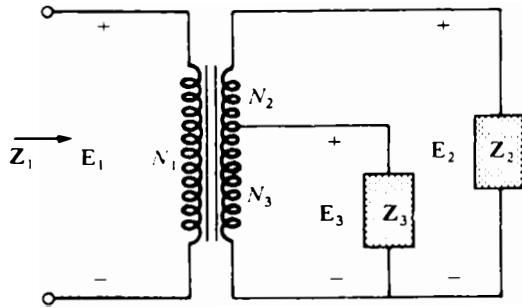


FIG. 24.44 Transformateur parfait à charges multiples et à prise sur le secondaire.

### 24.13 RÉSEAUX COMPORTANT DES BOBINES À COUPLAGE MAGNÉTIQUE

Les équations (24.30) et (24.31) sont aussi valables pour le montage illustré à la figure 20.44, à condition de définir  $E_2$  et  $E_3$  comme il est indiqué.

Le plus souvent, c'est l'analyse par mailles qu'on utilise pour l'étude des réseaux à plusieurs boucles comportant des bobines à couplage magnétique. Une bonne compréhension de la convention des points établie antérieurement dans le chapitre devrait permettre d'écrire directement et sans erreur les équations. Mais avant de passer à cette étape, il faut d'abord déterminer si le terme mutuel est positif ou négatif (une seule détermination suffit puisque le signe est le même pour toutes les bobines). Ainsi dans le réseau à deux boucles illustré à la figure 24.45, le terme mutuel est positif puisque, pour les deux bobines, le courant passe d'abord par le point. Dans la boucle du primaire, on a :

$$E_1 - I_1 Z_1 - I_1 Z_{L_1} - I_2 Z_m - Z_2(I_1 - I_2) = 0$$

où  $M$  de  $Z_m = \omega M \angle 90^\circ$  est positif et :

$$I_1(Z_1 + Z_{L_1} + Z_2) - I_2(Z_2 - Z_m) = E_1$$

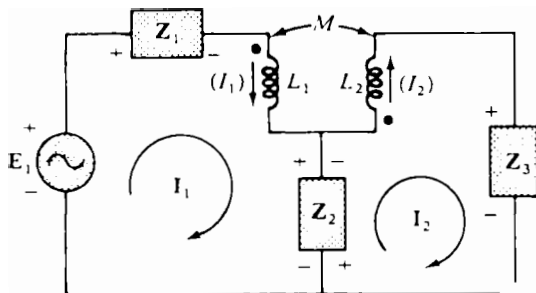


FIG. 24.45

On remarquera dans les équations ci-dessus qu'on a traité l'impédance mutuelle comme s'il s'agissait d'une inductance supplémentaire en série avec l'inductance  $L_1$ , dont le signe a

été déterminé à l'aide de la convention des points et dont la tension aux bornes a été déterminée à partir du courant passant dans la boucle à couplage magnétique.

Dans le secondaire, on a :

$$-Z_2(I_2 - I_1) - I_2 Z_{L_2} - I_1 Z_m - I_2 Z_3 = 0$$

ou :

$$I_2(Z_2 + Z_{L_2} + Z_3) - I_1(Z_2 - Z_m) = 0$$

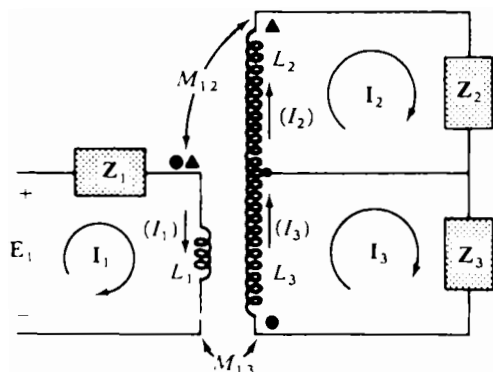


FIG. 24.46

Dans le montage illustré à la figure 24.46, il existe un terme mutuel entre  $L_1$  et  $L_2$  ( $M_{12}$ ) ainsi que entre  $L_1$  et  $L_3$  ( $M_{13}$ ).

Dans le cas de  $L_1$  et  $L_3$ , le courant entre dans la bobine après être passé par le point, et  $M_{13}$  est donc positif pour les sens montrés de  $I_1$  et  $I_3$ . Cependant, puisque le courant  $I_1$  passe dans  $L_1$  après être passé par le point et puisque  $I_2$  passe dans la bobine  $L_2$  avant de passer par le point,  $M_{12}$  est négatif. Nous avons par conséquent dans le circuit d'entrée

$$E_1 - I_1 Z_1 - I_1 Z_{L_1} - I_2(-Z_{m_{12}}) - I_3 Z_{m_{13}} = 0$$



ou:

$$E_1 - I_1(Z_1 + Z_{L_1}) + I_2 Z_{m_{12}} - I_3 Z_{m_{13}} = 0$$

Pour la boucle 2, on a:

$$-I_2 Z_2 - I_2 Z_{L_2} - I_1(-Z_{m_{12}}) = 0$$

$$-I_1 Z_{m_{12}} + I_2(Z_2 + Z_{L_2}) = 0$$

et, pour la boucle 3:

$$-I_3 Z_3 - I_3 Z_{L_3} - I_1 Z_{m_{13}} = 0$$

soit:

$$I_1 Z_{m_{13}} + I_3(Z_3 + Z_{L_3}) = 0$$

Le déterminant résultant est:

$$\begin{array}{rclcl} I_1(Z_1 + Z_{L_1}) - I_2 Z_{m_{12}} & + & I_3 Z_{m_{13}} & = & E_1 \\ -I_1 Z_{m_{12}} & + & I_2(Z_2 + Z_{L_2}) & + & 0 = 0 \\ I_1 Z_{m_{13}} & + & 0 & + & I_3(Z_3 + Z_{L_3}) = 0 \end{array}$$

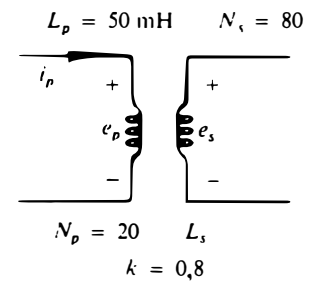


FIG. 24.47

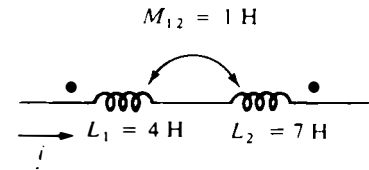


FIG. 24.48

## PROBLÈMES

### Section 24.2

1. Voir le transformateur à noyau d'air illustré à la figure 24.47.
  - a. Calculez la valeur de  $L_2$  si l'inductance mutuelle  $M$  est de 80 mH.
  - b. Calculez les tensions induites  $e_p$  et  $e_s$  si le flux embrassant le primaire varie à la vitesse de 0,08 Wb/s.
  - c. Calculez les tensions induites  $e_p$  et  $e_s$  si le courant  $i_1$  varie à la vitesse de 0,3 A/ms.

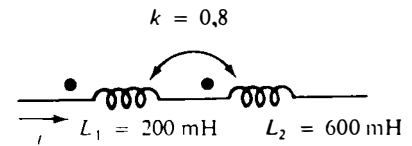


FIG. 24.49

2. a. Refaites le problème 1 avec  $k = 1$ .
- b. Refaites le problème 1 avec  $k = 0,2$ .
- c. Comparez les résultats obtenus en a et en b.
3. Refaites le problème 1 avec  $k = 0,9$ ,  $N_p = 300$  spires et  $N_s = 25$  spires.

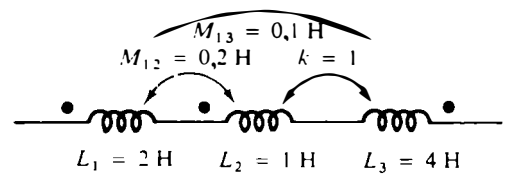


FIG. 24.50

### Section 24.3

4. Déterminez l'inductance totale des bobines montées en série à la figure 24.48.
5. Déterminez l'inductance totale des bobines montées en série à la figure 24.49.
6. Déterminez l'inductance totale des bobines montées en série à la figure 24.50.
7. Écrivez les équations de boucle du réseau illustré à la figure 24.51.

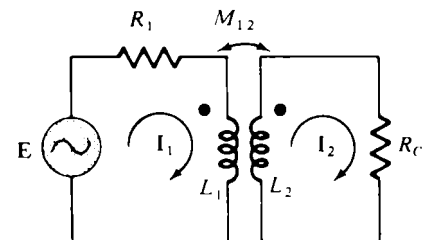


FIG. 24.51



Section 24.4

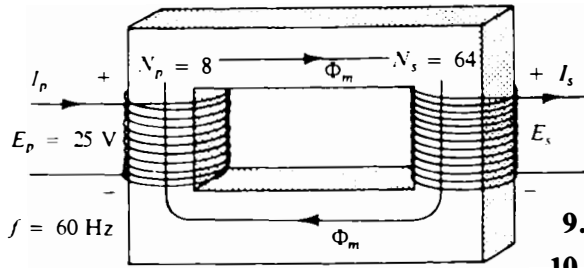


FIG. 24.52

8. Voir le transformateur à noyau de fer ( $k = 1$ ) illustré à la figure 24.52.

- a. Calculez la grandeur de la tension induite  $E_s$ .
- b. Calculez le flux maximal  $\Phi_{m(max)}$ .

9. Refaites le problème 8 avec  $N_p = 240$  et  $N_s = 30$ .

10. Calculez la tension d'entrée d'un transformateur à noyau de fer dont la tension du secondaire est de 240 V,  $N_p = 60$  et  $N_s = 120$ .

11. Calculez la fréquence de la tension d'alimentation du transformateur décrit au problème 8, si le flux maximal passant dans le noyau est de 12,5 mWb.

Section 24.5

12. Voir le transformateur à noyau de fer illustré à la figure 24.53.

- a. Calculez la grandeur de courant  $I_c$  et de la tension  $V_c$ , si  $a = 1/5$ ,  $I_p = 2$  A et  $Z_c = 2 \Omega$  (résistance pure).
- b. Calculez la résistance d'entrée pour les données précisées ci-dessus.

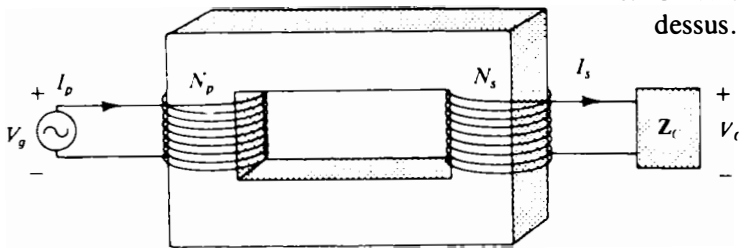


FIG. 24.53

13. Calculez l'impédance d'entrée du transformateur à noyau de fer décrit au problème 12, si  $a = 2$ ,  $I_p = 4$  A et  $V_g = 1600$  V.

14. Déterminez le courant  $I_p$  et la tension  $V_g$  si la tension d'entrée du transformateur à noyau de fer décrit au problème 12 est de 4  $\Omega$  et que  $V_c = 1200$  V avec  $a = 1/4$ .

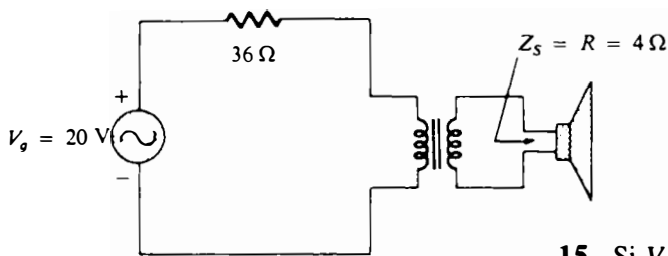


FIG. 24.54

15. Si  $V_c = 240$  V,  $Z_c = 20 \Omega$  (résistance pure),  $I_p = 0,05$  A et que  $N_s = 50$ , calculez le nombre de spires du primaire du transformateur à noyau de fer décrit au problème 12.

16. a. Si  $N_p = 400$ ,  $N_s = 1200$  et  $V_g = 100$  V, calculez l'intensité du courant  $I_p$  pour le transformateur à noyau de fer décrit au problème 12 ( $Z_c = 9 + j12$ ).

b. Calculez la grandeur de la tension  $V_c$  et l'intensité du courant  $I_c$  pour les données précisées ci-dessus.

17. a. Voir le circuit illustré à la figure 24.54. Calculez le rapport de transformation nécessaire pour que la puissance fournie au haut-parleur soit maximale.

b. Calculez la puissance maximale fournie au haut-parleur.

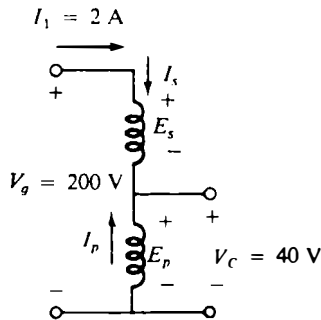


FIG. 24.57

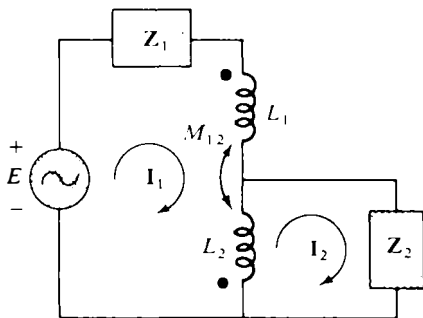


FIG. 24.58

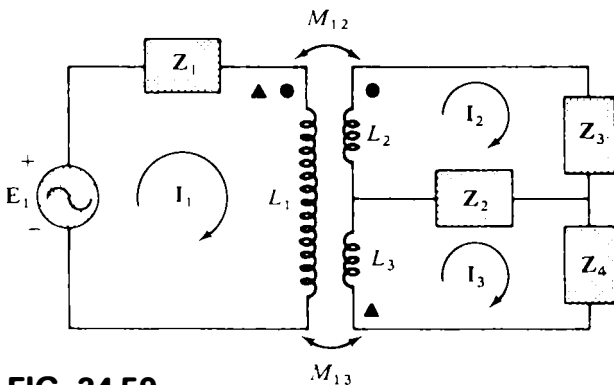


FIG. 24.59

Section 24.10

23. Les caractéristiques nominales d'un transformateur parfait sont: 10 kVA, 2400/120 V et 60 Hz.
  - a. Calculez le rapport de transformation si la tension du secondaire est de 120 V.
  - b. Calculez le courant nominal du secondaire si la tension du secondaire est de 120 V.
  - c. Calculez le courant nominal du primaire si la tension du secondaire est de 120 V.
  - d. Refaites les trois parties ci-dessus avec une tension du secondaire de 2400 V.

Section 24.11

24. Déterminez les tensions et les courants du secondaire et du primaire de l'autotransformateur illustré à la figure 24.57.

Section 24.12

25. Dans le transformateur à prise médiane illustré à la figure 24.42,  $N_p = 100$ ,  $N_s = 25$ ,  $Z_c = R = 5 \angle 0^\circ$ ,  $E_p = 100 \angle 0^\circ$ . Déterminez:
  - a. la tension aux bornes de la charge et le courant qui y passe;
  - b. l'impédance  $Z_i$ ;
  - c. l'impédance  $Z_{1/2}$ .
26. Dans le transformateur à deux secondaires illustré à la figure 24.43,  $N_1 = 90$ ,  $N_2 = 15$ ,  $N_3 = 45$ ,  $Z_2 = R = 8 \angle 0^\circ$ ,  $Z_3 = X_c = 5 \angle 90^\circ$ ,  $E_1 = 60 \angle 0^\circ$ .
  - a. Déterminez les tensions aux bornes des charges et les courants qui y passent.
  - b. Calculez  $Z_1$ .
27. Dans le transformateur à deux secondaires illustré à la figure 24.44,  $N_1 = 120$ ,  $N_2 = 40$ ,  $N_3 = 30$ ,  $Z_2 = R = 12 \angle 0^\circ$ ,  $Z_3 = X_c = 10 \angle -90^\circ$ ,  $E_1 = 120 \angle 60^\circ$ .
  - a. Déterminez les tensions aux bornes des charges et les courants qui y passent.
  - b. Calculez  $Z_1$ .

Section 24.13

28. Écrivez les équations de boucle du réseau illustré à la figure 24.58.
29. Écrivez les équations de boucle du réseau illustré à la figure 24.59.

Section 24.6

18. Voir le transformateur illustré à la figure 24.55. Déterminez:
- la résistance équivalente  $R_e$ ;
  - la réactance équivalente  $X_e$ ;
  - le circuit équivalent réfléchi dans le primaire;
  - le courant primaire si  $V_g = 50 \angle 0^\circ$ ;
  - la tension  $V_c$  aux bornes de la charge;
  - le diagramme de phase du circuit primaire image;
  - la nouvelle tension aux bornes de la charge si on suppose que le transformateur est parfait et que son rapport de transformation soit de 4. Comparez cette tension à celle qui a été calculée à la partie (e).

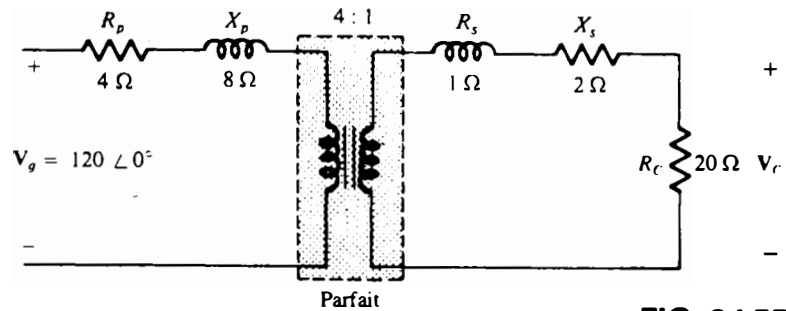


FIG. 24.55

19. On remplace la charge résistive du transformateur illustré à la figure 24.55 par une réactance inductive de  $20 \Omega$ .
- Déterminez l'impédance image totale du primaire.
  - Calculez le courant qui passe dans le primaire.
  - Déterminez la tension aux bornes de  $R_e$ ,  $X_e$  et de la charge image.
  - Tracez le diagramme de phase.
20. Refaites le problème 19 avec une charge capacitive dont la réactance est de  $20 \Omega$ .

Section 24.7

21. Décrivez en vos propres termes le comportement en fréquence du transformateur. Employez le circuit équivalent et les caractéristiques fréquentielles voulues décrits dans le présent chapitre.

Section 24.8

22. Déterminez l'impédance d'entrée du transformateur à noyau d'air illustré à la figure 24.56. Dessinez le réseau primaire image.

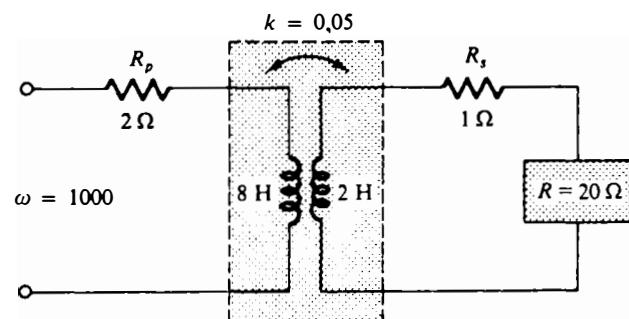


FIG. 24.56

## GLOSSAIRE

**Autotransformateur** Transformateur possédant un enroulement commun au primaire et au secondaire. La perte de l'isolement est compensée par une augmentation de la puissance apparente nominale.

**Coefficient de couplage ( $k$ )** Mesure du couplage magnétique de deux bobines se situant entre les valeurs 0 et 1.

**Convention des points** Méthode d'indication de l'effet de l'inductance mutuelle sur l'inductance nette d'un réseau.

**Couplage lâche** Couplage faible de deux bobines.

**Données de la plaque signalétique** Données telles que la puissance apparente nominale, le rapport de transformation et la plage des fréquences d'utilisation, qui sont d'une importance capitale dans le choix du transformateur en fonction d'une utilisation particulière.

**Flux de fuite** Flux embrassant la bobine qui ne passe pas par le trajet ferromagnétique du circuit magnétique.

**Impédance image** Impédance apparaissant dans le primaire d'un transformateur à cause du raccordement d'une charge à son secondaire. Son importance est fonction du rapport de transformation.

**Inductance mutuelle** Inductance existant entre deux bobines couplées magnétiquement.

**Primaire** Enroulement habituellement raccordé à la source d'énergie.

**Rapport de transformation ( $a$ )** Rapport du nombre des spires du primaire à celui des spires du secondaire d'un transformateur.

**Secondaire** Enroulement habituellement raccordé à la charge.

**Transformateur abaisseur** Transformateur dont la tension au secondaire est moindre que la tension au primaire. Son rapport de transformation  $a$  est supérieur à 1.

**Transformateur à plusieurs secondaires** Transformateur au secondaire duquel on peut raccorder plus d'une charge.

**Transformateur à prise médiane** Transformateur possédant une prise supplémentaire se trouvant entre les bornes du primaire et du secondaire.

**Transformateur élévateur** Transformateur dont la tension au secondaire est plus grande que la tension au primaire. Son rapport de transformation  $a$  est inférieur à 1.



# PARAMÈTRES DES QUADRIPOLES ( $z$ , $y$ ET $h$ )



## 25.1 INTRODUCTION

Dans les futurs cours que vous suivrez, il sera de plus en plus nécessaire de savoir représenter les dispositifs et les systèmes étudiés par des *modèles* et de pouvoir utiliser ces modèles pour faire l'analyse et la synthèse de systèmes complexes et combinés.

Nous étudions dans le présent chapitre le réseau le plus fréquemment représenté par un modèle, le quadripôle ou réseau à quatre bornes (figure 25.1).

À la figure, les bornes ont été regroupées en paires constituant une entrée et une sortie. Pour certains dispositifs tels que le transistor et la triode à tube sous vide, le schéma du quadripôle peut se présenter comme à la figure 25.2a: celui-ci indique tout simplement que deux bornes sont communes ou reliées ensemble, cas particulier du quadripôle général. La figure 25.2b illustre un dipôle et un multidipôle. Nous avons étudié le premier tout au long du présent manuel. Quant au second, il fait l'objet de cours plus avancés.

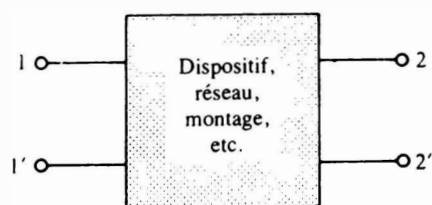
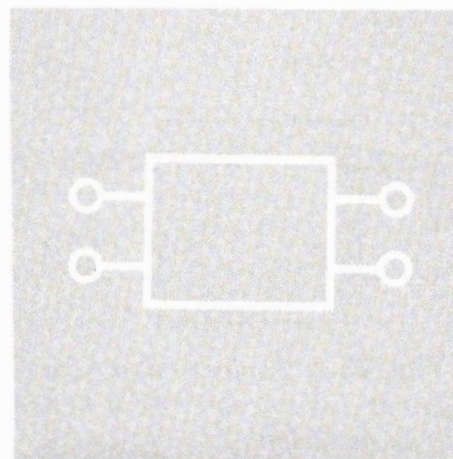


FIG. 25.1 *Le quadripôle.*





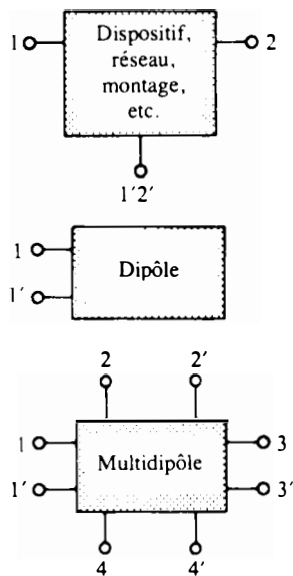


FIG. 25.2

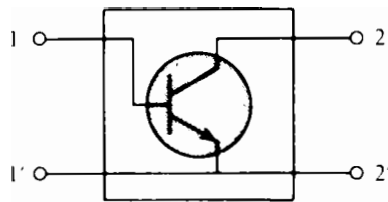


FIG. 25.3

Nous avons pour but principal dans le présent chapitre d'élaborer un ensemble d'équations (et, par conséquent, de réseaux) qui nous permettront de représenter par un modèle le dispositif ou le système contenu dans la boîte noire illustrée à la figure 25.1. Autrement dit, nous serons en mesure d'établir un réseau dont les caractéristiques aux bornes seront identiques à celles du réseau ou dispositif originels, etc. À la figure 25.3, le transistor est représenté entre quatre bornes externes. Dans l'analyse qui suit, nous trouverons une combinaison d'éléments qui nous permettra de remplacer le transistor par un réseau présentant sensiblement les mêmes caractéristiques pour des conditions de service précises. Diverses méthodes, telles que les analyses par mailles et par noeuds, pourront alors servir à déterminer toutes les grandeurs inconnues. Les modèles, une fois réduits à leur plus simple expression, permettent aussi d'évaluer rapidement le comportement d'un réseau, sans nécessiter de longs calculs mathématiques. En d'autres termes, quiconque est familier avec l'utilisation de modèles peut analyser en très peu de temps le fonctionnement de grands et complexes systèmes. Les résultats de cette analyse sont approximatifs dans la plupart des cas; ils sont quand même utiles, compte tenu du peu d'effort avec lequel ils sont obtenus.

L'analyse qui suit peut, à prime abord, sembler extrêmement mathématique et dénuée de tout intérêt pratique. On remarquera toutefois que les paramètres sont déterminés en fonction de rapports de grandeurs électriques pour des conditions très précises. La terminologie utilisée est très employée en électronique. Nous limiterons notre étude aux systèmes bilatéraux linéaires (à valeur fixe). Nous utiliserons trois ensembles de paramètres pour caractériser le quadripôle: les paramètres d'impédance ( $z$ ), les paramètres d'admittance ( $y$ ) et les paramètres hybrides ( $h$ ). Un tableau donné à la fin du chapitre établit la relation entre ces trois ensembles de paramètres.

## 25.2 PARAMÈTRES D'IMPÉDANCE ( $z$ )

Le quadripôle illustré à la figure 25.4 est caractérisé par quatre grandeurs. Deux grandeurs sont habituellement connues; les deux autres doivent être déterminées. Les quatre peuvent être liées par les relations suivantes:

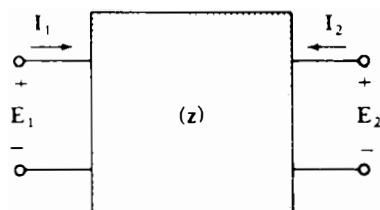


FIG. 25.4 Configuration pour déterminer les paramètres d'impédance d'un quadripôle.

$$E_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \quad (25.1a)$$

$$E_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2 \quad (25.1b)$$

Les paramètres d'impédance  $z_{11}$ ,  $z_{12}$ ,  $z_{21}$  et  $z_{22}$  se mesurent en ohms.

Pour que la boîte noire puisse être représentée par un modèle, il faut que tous les paramètres d'impédance soient déterminés.



Leur détermination s'obtient par l'attribution de la valeur zéro à des grandeurs judicieusement choisies.

**z<sub>11</sub>**

Attribuons au courant **I<sub>2</sub>** la valeur zéro. L'équation (25.1a) devient alors:

$$E_1 = z_{11}I_1 + z_{12}(0)$$

$$\boxed{z_{11} = \frac{E_1}{I_1}}_{I_2=0} \quad (\Omega) \quad (25.2)$$

Cette équation indique que si le courant **I<sub>2</sub>** est nul, le paramètre d'impédance est égal au quotient de **E<sub>1</sub>** par **I<sub>1</sub>**. Puisque ces dernières sont des grandeurs d'entrée et que **I<sub>2</sub>** est nul, ce paramètre est défini ainsi:

*z<sub>11</sub> = paramètre d'impédance d'entrée en circuit ouvert*

**z<sub>12</sub>**

Attribuons au courant **I<sub>1</sub>** la valeur zéro (figure 25.5). L'équation (25.1a) devient alors:

$$\boxed{z_{12} = \frac{E_1}{I_2}}_{I_1=0} \quad (\Omega) \quad (25.3)$$

Dans la plupart des systèmes pour lesquels on veut comparer les grandeurs d'entrée et de sortie, le quotient cherché est habituellement celui de la grandeur de sortie par la grandeur d'entrée. Dans le présent cas, c'est l'*inverse* qui est vrai; c'est pourquoi ce paramètre est défini ainsi:

*z<sub>12</sub> = paramètre d'impédance de transfert inverse en circuit ouvert*

La présence du terme *transfert* indique que **z<sub>12</sub>** lie une grandeur de sortie à une grandeur d'entrée (pour la condition **I<sub>1</sub> = 0**). La configuration nécessaire à la détermination de **z<sub>12</sub>** est représentée à la figure 25.6.

Pour une source de tension **E<sub>2</sub>**, c'est le quotient **E<sub>1</sub>/I<sub>2</sub>** qui détermine **z<sub>12</sub>** lorsque **I<sub>1</sub>** est nul.

**z<sub>21</sub>**

Attribuons au courant **I<sub>2</sub>** la valeur zéro et calculons le quotient **E<sub>2</sub>/I<sub>1</sub>** comme l'indique l'équation (25.1b). On obtient ainsi:

$$\boxed{z_{21} = \frac{E_2}{I_1}}_{I_2=0} \quad (\Omega) \quad (25.4)$$

Dans ce cas, les grandeurs d'entrée et de sortie sont encore les grandeurs déterminantes. Nous emploierons donc le terme *transfert* dans notre nomenclature. Mais cette fois le quotient

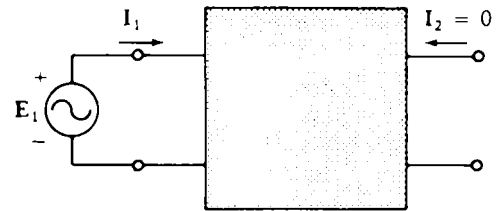


FIG. 25.5 Détermination de **z<sub>11</sub>**.

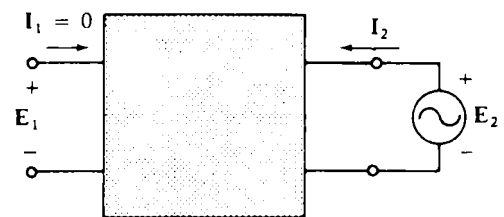


FIG. 25.6 Détermination de **z<sub>12</sub>**.

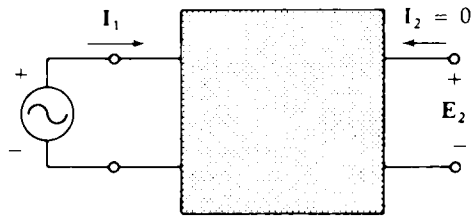


FIG. 25.7 Détermination de  $z_{21}$ .

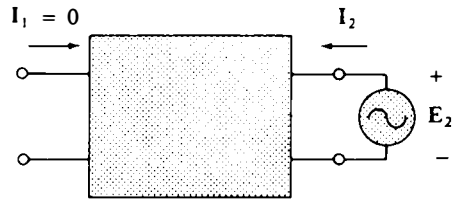


FIG. 25.8 Détermination de  $z_{22}$ .

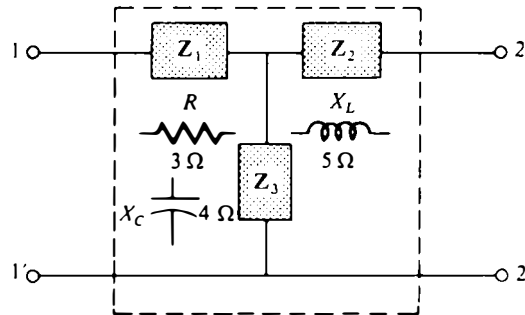


FIG. 25.9 Réseau en T.

cherché est celui d'une grandeur de sortie par une grandeur d'entrée, c'est-à-dire qu'il est *direct*:

$z_{21}$  = paramètre d'impédance de transfert direct en circuit ouvert

La figure 25.7 représente la configuration nécessaire à la détermination du paramètre. Pour une source de tension  $E_1$ , c'est le quotient  $E_2/I_1$  qui détermine  $z_{21}$  lorsque  $I_2$  est nul.

**$z_{22}$**

Le dernier paramètre,  $z_{22}$ , est déterminé par la relation:

$$z_{22} = \frac{E_2}{I_2} \quad (I_1 = 0) \quad (25.5)$$

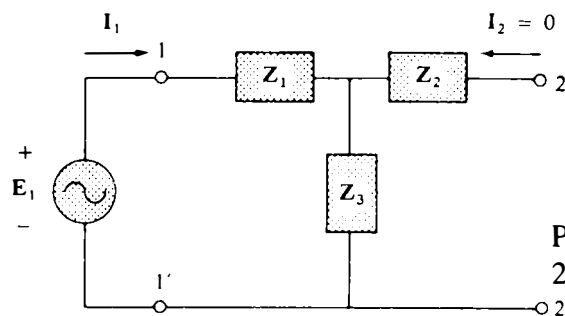
obtenue de l'équation (25.1b) par l'attribution au courant  $I_1$  de la valeur zéro. Puisqu'il est déterminé par le quotient de la tension de sortie par le courant de sortie lorsque  $I_1$  est nul, ce paramètre est défini ainsi:

$z_{22}$  = paramètre d'impédance de sortie en circuit ouvert

La figure 25.8 illustre la configuration nécessaire à la détermination du paramètre. Pour une source de tension  $E_2$ , c'est le quotient  $E_2/I_2$  qui détermine  $z_{22}$  lorsque  $I_1$  est nul.

**EXEMPLE 25.1** Déterminer les paramètres d'impédance (z) du réseau en T illustré à la figure 25.9.

*Solution:* Pour  $z_{11}$ , le réseau apparaît de la façon illustrée à la figure 25.10.



$$I_1 = \frac{E_1}{Z_1 + Z_3}$$

$$z_{11} = \frac{E_1}{I_1} \Big|_{I_2=0} = Z_1 + Z_3 \quad (25.6)$$

Pour  $z_{12}$ , le réseau apparaît de la façon illustrée à la figure 25.11.

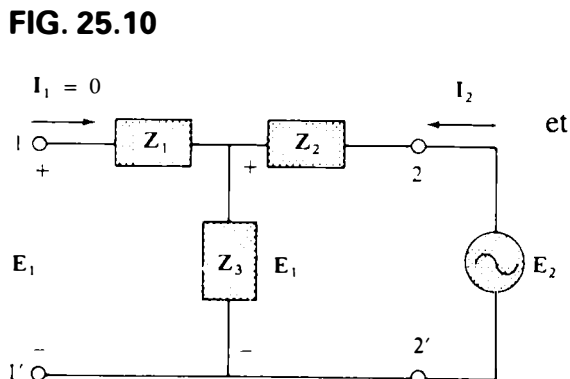


FIG. 25.11

$$E_1 = I_2 Z_3$$

$$z_{12} = \frac{E_1}{I_2} \Big|_{I_1=0} = \frac{I_2 Z_3}{I_2} = Z_3 \quad (25.7)$$



Pour  $z_{21}$ , le réseau apparaît de la façon illustrée à la figure 25.12.

$$E_2 = I_1 Z_3$$

et

$$z_{21} = \left. \frac{E_2}{I_1} \right|_{I_2=0} = \frac{I_1 Z_3}{I_1} = \boxed{Z_3} \quad (25.8)$$

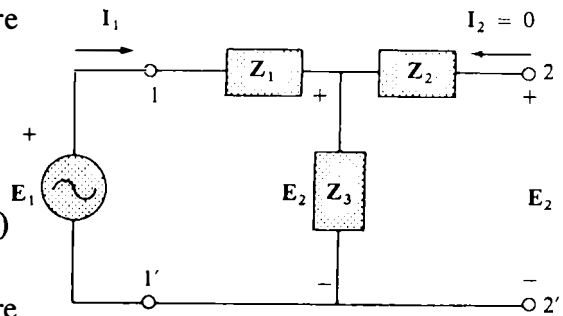


FIG. 25.12

Pour  $z_{22}$ , le réseau apparaît de la façon illustrée à la figure 25.13.

$$I_2 = \frac{E_2}{Z_2 + Z_3}$$

$$z_{22} = \left. \frac{E_2}{I_2} \right|_{I_1=0} = \frac{I_2(Z_2 + Z_3)}{I_2} = \boxed{Z_2 + Z_3} \quad (25.9)$$

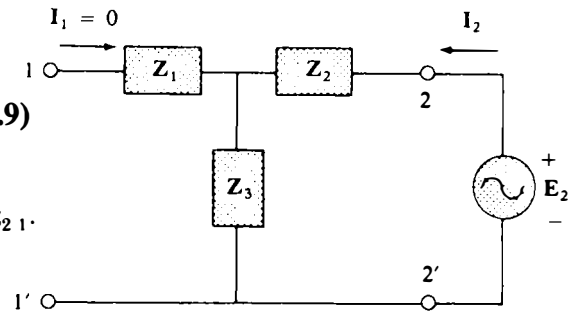


FIG. 25.13

On a sans doute remarqué que dans un réseau en T,  $z_{12} = z_{21}$ .  
Si  $Z_1 = 3 \angle 0^\circ$ ,  $Z_2 = 5 \angle 90^\circ$  et  $Z_3 = 4 \angle -90^\circ$ , on a:

$$z_{11} = Z_1 + Z_3 = 3 - j4$$

$$z_{12} = z_{21} = Z_3 = 4 \angle -90^\circ = -j4$$

$$z_{22} = Z_2 + Z_3 = 5 \angle 90^\circ + 4 \angle -90^\circ = 1 \angle 90^\circ = j1$$

Vu de l'extérieur (mesuré à ses bornes), le comportement du quadripôle contenu dans la boîte noire est donc déterminé du moment que sont connus ses paramètres d'impédance. Grâce à ces derniers et aux équations (25.1a) et (25.1b) il est alors possible d'élaborer le *circuit équivalent* de la boîte noire. Dans le présent cas, il existe deux circuits possibles; ils sont illustrés à la figure 25.14.

L'application de la loi des tensions aux boucles d'entrée et de sortie du réseau illustré à la figure 25.14a donne:

$$E_1 - z_{11}I_1 - z_{12}I_2 = 0$$

et:

$$E_2 - z_{22}I_2 - z_{21}I_1 = 0$$

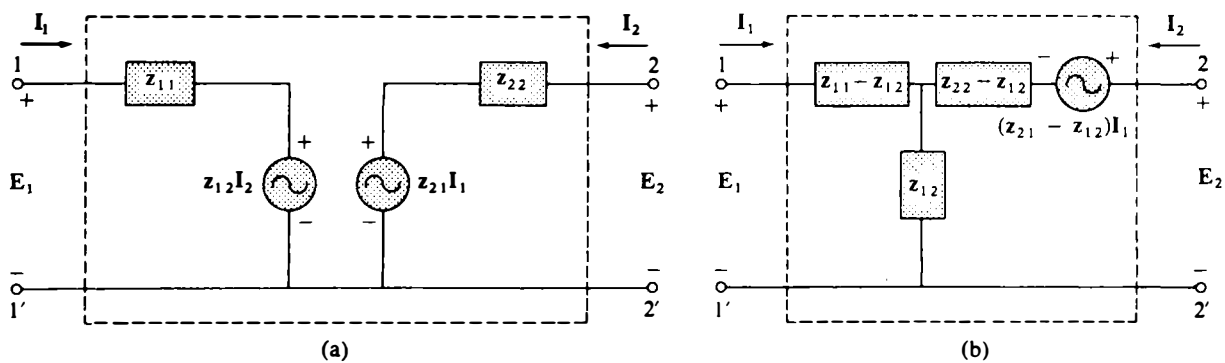


FIG. 25.14 Quadripôles équivalents en z.



Ces équations peuvent se réécrire ainsi:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{z}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{12}\mathbf{I}_2$$

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{z}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{22}\mathbf{I}_2$$

Ils correspondent donc exactement aux équations (25.1a) et (25.1b).

Pour le réseau illustré à la figure 25.14b, on a:

$$\mathbf{E}_1 - \mathbf{I}_1(\mathbf{z}_{11} - \mathbf{z}_{12}) - \mathbf{z}_{12}(\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2) = 0$$

$$\mathbf{E}_2 - \mathbf{I}_1(\mathbf{z}_{21} - \mathbf{z}_{12}) - \mathbf{I}_2(\mathbf{z}_{22} - \mathbf{z}_{12}) - \mathbf{z}_{12}(\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2) = 0$$

Ces équations peuvent se réécrire ainsi:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{I}_1(\mathbf{z}_{11} - \mathbf{z}_{12} + \mathbf{z}_{12}) + \mathbf{I}_2\mathbf{z}_{12}$$

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{I}_1(\mathbf{z}_{21} - \mathbf{z}_{12} + \mathbf{z}_{12}) + \mathbf{I}_2(\mathbf{z}_{22} - \mathbf{z}_{12} + \mathbf{z}_{12})$$

et:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{z}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{12}\mathbf{I}_2$$

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{z}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{22}\mathbf{I}_2$$

Soulignons que chacun des réseaux doit nécessairement comporter une source de tension commandée par courant, autrement dit une source de tension dont la grandeur de la sortie dépend d'un courant du réseau.

L'utilité des paramètres d'impédance et des circuits équivalents qu'ils permettent d'établir est évidente lorsque l'on considère le système de la figure 25.15a, qui contient un dispositif dont les paramètres d'impédance ont été déterminés. On peut donc substituer un circuit équivalent à ce système, comme l'illustre la figure 25.15b, puis utiliser l'analyse par mailles, l'analyse par noeuds, etc., pour déterminer les grandeurs inconnues cherchées. Cette technique sera extrêmement utile pour l'étude des réseaux contenant des transistors ou des tubes. Ceux-ci pourront en effet être remplacés par des circuits équivalents qui se prêteront à des solutions plus directes et moins laborieuses.

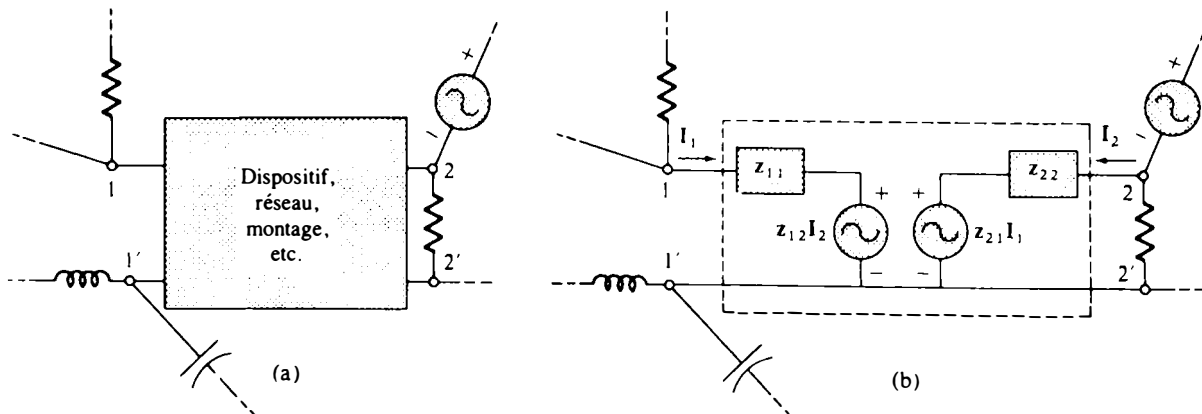


FIG. 25.15



**EXEMPLE 25.2** Dessiner le circuit équivalent sous la forme représentée à la figure 25.14a en utilisant les paramètres d'impédance déterminés à l'exemple 25.1.

*Solution:* Le circuit équivalent est illustré à la figure 25.16.

### 25.3 PARAMÈTRES D'ADMITTANCE (y)

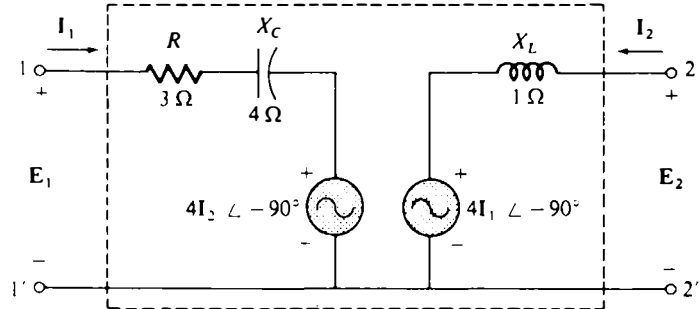


FIG. 25.16

Les équations liant les quatre grandeurs du quadripôle illustré à la figure 25.1 peuvent aussi s'écrire sous la forme:

$$\boxed{I_1 = y_{11}E_1 + y_{12}E_2} \quad (25.10a)$$

$$\boxed{I_2 = y_{21}E_1 + y_{22}E_2} \quad (25.10b)$$

Soulignons que chaque terme des deux équations ci-dessus représente un courant alors que ceux des équations (25.1a) et (25.1b) représentaient des tensions. Notons en outre que les coefficients se mesurent en siemens, alors que les paramètres d'impédance se mesurent en ohms.

Les paramètres d'impédance ont été déterminés à partir de l'hypothèse d'un courant donné nul (condition de circuit ouvert). Les paramètres d'admittance des équations (25.10a) et (25.10b) supposent nulle une tension donnée (condition de court-circuit).

La terminologie des paramètres d'admittance sera calquée sur celle des paramètres d'impédance. Les équations permettant de les déterminer découleront par ailleurs des équations (25.10a) et (25.10b) et de l'hypothèse qu'une tension donnée soit nulle.

$$y_{11} = \frac{I_1}{E_1} \quad (S) \quad (25.11) \quad E_2 = 0$$

$y_{11}$  = paramètre d'admittance d'entrée en court-circuit

La configuration à utiliser est illustrée à la figure 25.17.

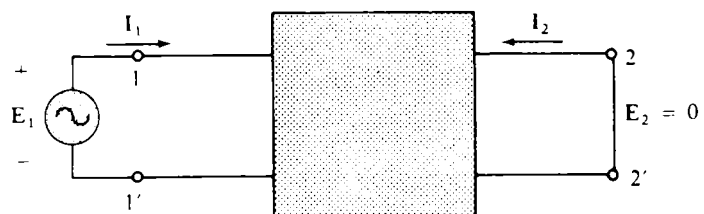


FIG. 25.17 Détermination de  $y_{11}$ .



$Y_{12}$

$$y_{12} = \frac{I_1}{E_2} \quad (S) \quad (25.12)$$

$E_1 = 0$

$y_{12}$  = paramètre d'admittance de transfert inverse en court-circuit

La configuration à utiliser est illustrée à la figure 25.18.

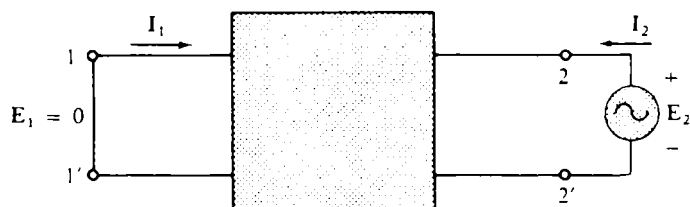


FIG. 25.18 Détermination de  $y_{12}$ .

$Y_{21}$

$$y_{21} = \frac{I_2}{E_1} \quad (S) \quad (25.13)$$

$E_2 = 0$

$y_{21}$  = paramètre d'admittance de transfert direct en court-circuit

La configuration à utiliser est illustrée à la figure 25.19.

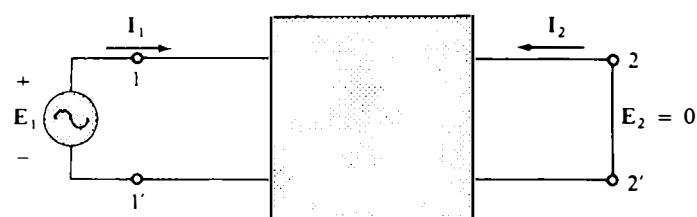


FIG. 25.19 Détermination de  $y_{21}$ .

$Y_{22}$

$$y_{22} = \frac{I_2}{E_2} \quad (S) \quad (25.14)$$

$E_1 = 0$

$y_{22}$  = paramètre d'admittance de sortie en court-circuit

La configuration à utiliser est illustrée à la figure 25.20.

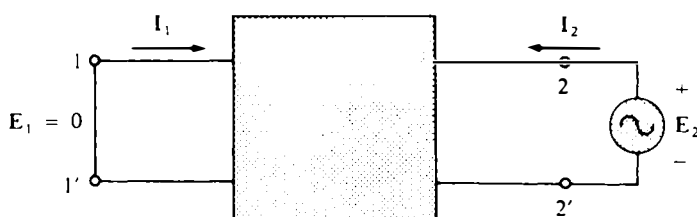


FIG. 25.20 Détermination de  $y_{22}$ .

**EXEMPLE 25.3** Déterminer les paramètres d'admittance du réseau en pi illustré à la figure 25.21.

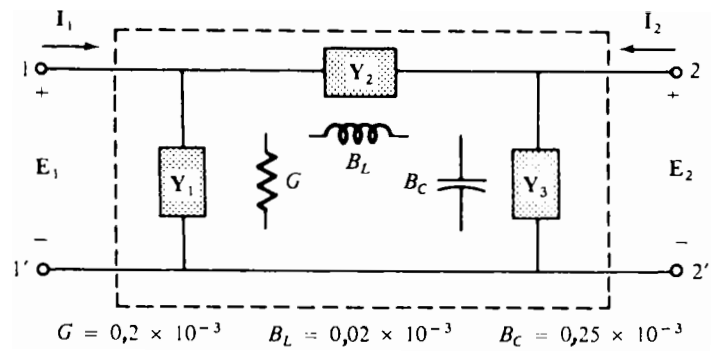


FIG. 25.21 Réseau en pi.

Solution: La figure 25.22 représente la configuration à utiliser pour déterminer  $y_{11}$ . On a:

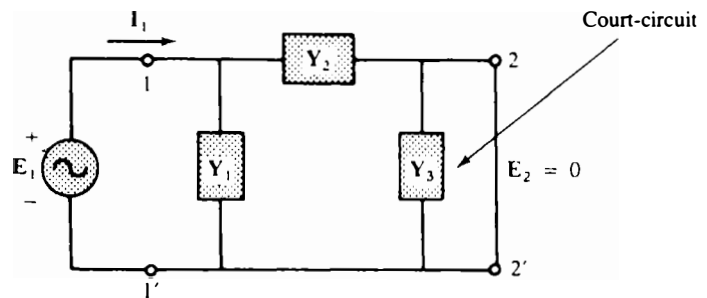


FIG. 25.22

$$I_1 = E_1 Y_T = E_1 (Y_1 + Y_2)$$

et:

$$y_{11} = \left. \frac{I_1}{E_1} \right|_{E_2=0} = \boxed{Y_1 + Y_2} \quad (25.15)$$

La figure 25.23 représente la configuration à utiliser pour déterminer  $y_{12}$ . La branche  $Y_1$  est court-circuitée, de sorte que  $I_{Y_2} = I_1$ . On a par conséquent:

$$I_{Y_2} = I_1 = -E_2 Y_2$$

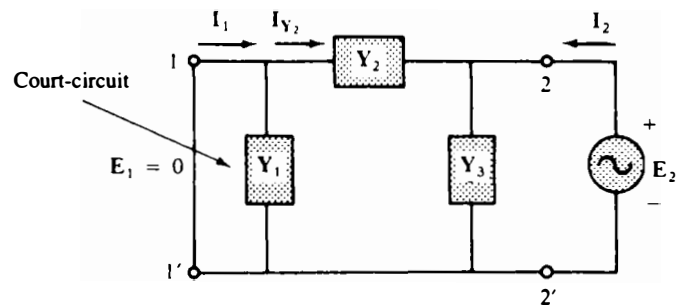


FIG. 25.23

Le signe négatif résulte du fait que le sens de  $I_1$  à la figure 25.23 est à l'opposé du sens réel de déplacement des électrons provoqué par la source  $E_2$ . On a donc:

$$y_{12} = \left. \frac{I_1}{E_2} \right|_{E_1=0} = \boxed{-Y_2} \quad (25.16)$$

La configuration à utiliser pour  $y_{21}$  est représentée à la figure 25.24. Dans ce cas,  $Y_3$  est court-circuité, d'où la relation:

$$I_{Y_2} = I_2$$

et:

$$I_{Y_2} = I_2 = -E_1 Y_2$$



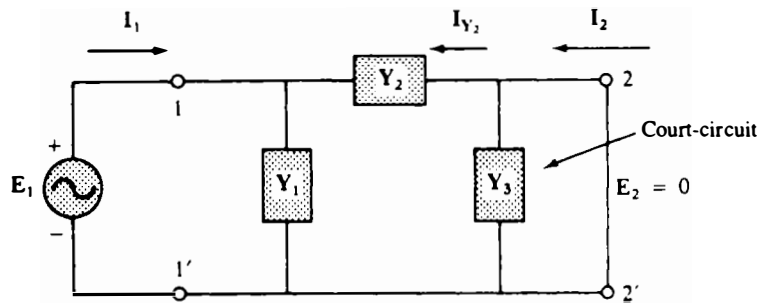


FIG. 25.24

de sorte que:

$$y_{21} = \left. \frac{I_2}{E_1} \right|_{E_2=0} = \boxed{-Y_2} \quad (25.17)$$

Dans le réseau en pi,  $y_{12} = y_{21}$ , comme on pouvait le prévoir puisque dans le réseau en T les paramètres d'impédance étaient tels que  $z_{12} = z_{21}$ . En d'autres termes, le réseau en T peut se transformer directement en un réseau en pi par une transfiguration Y- $\Delta$ .

La configuration à utiliser pour  $y_{22}$  est illustrée à la figure 25.25. On a:

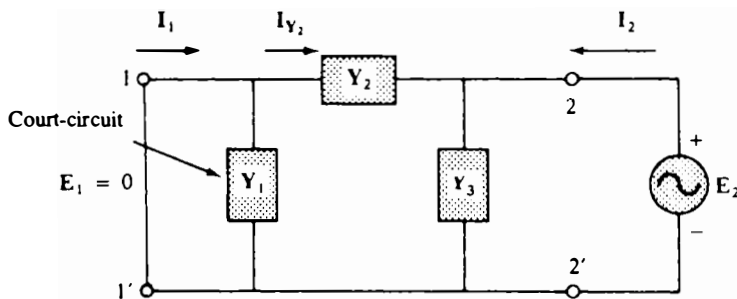


FIG. 25.25

$$Y_T = Y_2 + Y_3 \quad \text{et} \quad I_2 = E_2(Y_2 + Y_3)$$

de sorte que:

$$y_{22} = \left. \frac{I_2}{E_2} \right|_{E_1=0} = \boxed{Y_2 + Y_3} \quad (25.18)$$

Par substitution, on obtient:

$$Y_1 = 0,2 \times 10^{-3} \angle 0^\circ$$

$$Y_2 = 0,02 \times 10^{-3} \angle -90^\circ$$

$$Y_3 = 0,25 \times 10^{-3} \angle 90^\circ$$

$$y_{11} = Y_1 + Y_2 = 0,2 \times 10^{-3} - j0,02 \times 10^{-3} \text{ (inductif)}$$

$$y_{12} = y_{21} = -Y_2 = -(-j0,02 \times 10^{-3}) = j0,02 \times 10^{-3} \text{ (capacitif)}$$

$$y_{22} = Y_2 + Y_3 = -j0,02 \times 10^{-3} + j0,25 \times 10^{-3} = j0,23 \times 10^{-3} \text{ (capacitif)}$$

On aura sans doute remarqué la similitude entre les résultats de  $y_{11}$  et de  $y_{22}$  pour le réseau en pi et ceux de  $z_{11}$  et  $z_{22}$  pour le réseau en T.

La figure 25.26 représente deux réseaux satisfaisant aux équations (25.10a) et (25.10b). On y emploie des branches

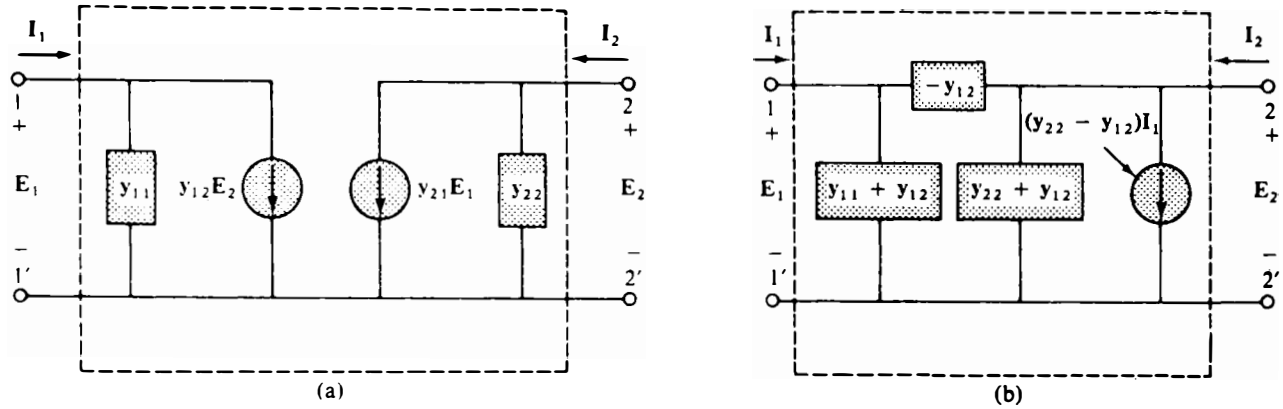


FIG. 25.26 Quadripôles équivalents en y.

parallèles, car chaque terme des équations représente un courant, et parce que la route la plus directe conduisant au circuit équivalent est l'application à rebours de la loi des courants: autrement dit, il faut trouver le circuit qui satisfait à la loi des courants. En ce qui a trait aux paramètres d'impédance, chaque terme des équations représente une tension; c'est donc la loi des tensions que nous avons appliquée à rebours pour déterminer le montage série constituant le circuit équivalent illustré à la figure 25.14a.

L'application de la loi des courants au réseau illustré à la figure 25.26b donne:

$$\begin{aligned} \text{Noeud } a: \quad \overset{\text{arrivant}}{I_1} &= \overset{\text{partant}}{y_{11}E_1 - y_{12}E_2} \\ \text{Noeud } b: \quad I_2 &= y_{22}E_2 - y_{21}E_1 \end{aligned}$$

relations qui ne sont que les équations (25.10a) et (25.10b) présentées sous une forme différente.

### 25.4 PARAMÈTRES HYBRIDES (h)

Les paramètres hybrides (h) sont d'emploi généralisé dans l'analyse des réseaux à transistor. Ils sont dits *hybrides*, car les unités de mesure ne sont pas les mêmes pour tous les paramètres, comme c'est le cas des paramètres z (ohms) et y (siemens). Les équations de détermination de ces paramètres sont ainsi constituées d'un membre droit dans lequel apparaissent à la fois un courant et une tension:

$$E_1 = h_{11}I_1 + h_{12}E_2 \quad (25.19a)$$

$$I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}E_2 \quad (25.19b)$$

Pour déterminer un paramètre hybride donné, il est nécessaire d'établir des conditions de court-circuit ou de circuit ouvert.

**h<sub>11</sub>**

$$h_{11} = \frac{E_1}{I_1} \quad (\Omega) \quad (25.20) \quad E_2 = 0$$



$h_{11}$  = paramètre d'impédance d'entrée en court-circuit

La configuration à utiliser est représentée à la figure 25.27.

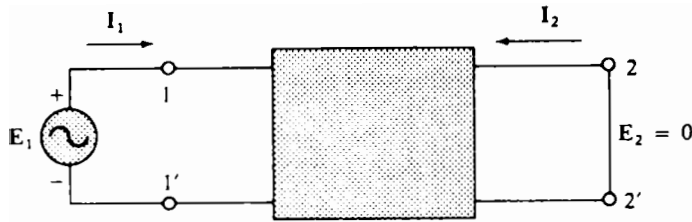


FIG. 25.27 Détermination de  $h_{11}$ .

$h_{12}$

$$h_{12} = \frac{E_1}{E_2} \quad (I_1 = 0) \quad \text{(nombre pur)} \quad (25.21)$$

$h_{12}$  = paramètre de rapport des tensions de transfert inverse en circuit ouvert

La configuration à utiliser pour déterminer  $h_{12}$  est représentée à la figure 25.28.

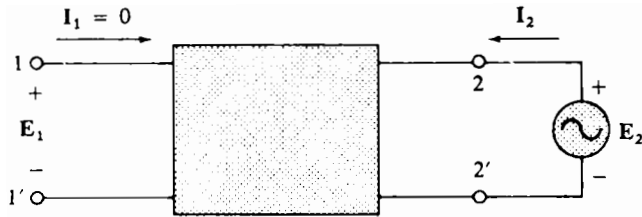


FIG. 25.28 Détermination de  $h_{12}$ .

$h_{21}$

$$h_{21} = \frac{I_2}{I_1} \quad (E_2 = 0) \quad \text{(nombre pur)} \quad (25.22)$$

$h_{21}$  = paramètre de courant de transfert inverse en court-circuit

La configuration à utiliser est représentée à la figure 25.29.

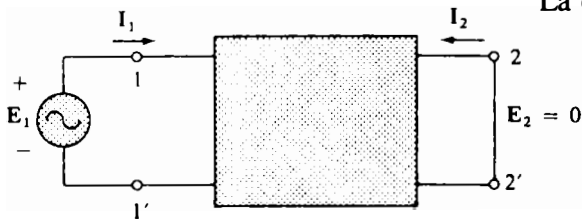


FIG. 25.29 Détermination de  $h_{21}$ .

$h_{22}$

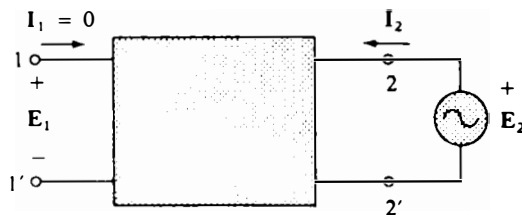


FIG. 25.30 Détermination de  $h_{22}$ .

$$h_{22} = \frac{I_2}{E_2} \quad (I_1 = 0) \quad \text{(S)} \quad (25.23)$$

$h_{22}$  = paramètre d'admittance de sortie en circuit ouvert

La configuration à utiliser pour déterminer  $h_{22}$  est représentée à la figure 25.30.



Dans la plupart des applications, on simplifie les indices inférieurs des paramètres hybrides de la façon suivante:

$$h_{11} = h_i \quad h_{12} = h_r \quad h_{21} = h_f \quad h_{22} = h_o$$

Les indices inférieurs littéraux proviennent des termes anglais utilisés pour caractériser les paramètres: *i* pour *input*, *f* pour *forward*, *r* pour *reverse* et *o* pour *output*.

La figure 25.31 illustre le circuit équivalent hybride. Puisque l'unité de mesure de chaque terme de l'équation (25.19a) est le volt, nous avons appliqué la loi des tensions à rebours pour obtenir le circuit série illustré. De même l'unité de mesure de chaque terme de l'équation (25.19b) étant l'ampère, nous avons appliqué la loi des courants à rebours pour obtenir le circuit parallèle de sortie.

On notera que le circuit d'entrée comporte une source de tension commandée par la tension apparaissant à la borne de sortie, tandis que le circuit de sortie comporte une source de courant commandée par le courant du circuit d'entrée.

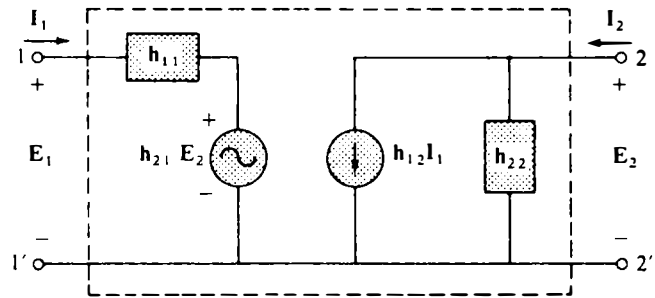


FIG. 25.31 Quadripôles équivalents hybrides.

EXEMPLE 25.4

- Déterminer le gain en courant  $I_2/I_1$  du circuit équivalent hybride illustré à la figure 25.32.
- Déterminer le gain en tension  $E_2/E_1$  de ce circuit.

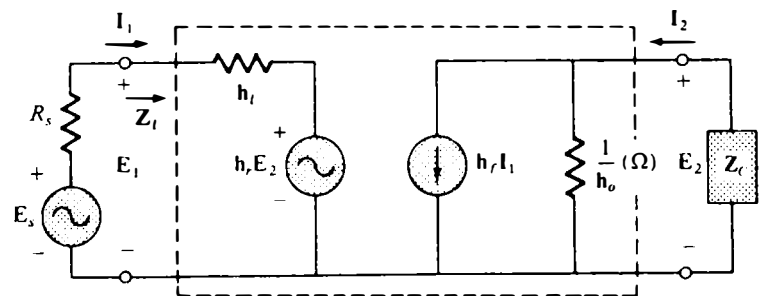


FIG. 25.32

Solution:

- La règle du diviseur de courant donne:

$$I_2 = \frac{(1/h_o)h_f I_1}{(1/h_o) + Z_c} = \frac{h_f I_1}{1 + h_o Z_c}$$

de sorte que:

$$A_i = \frac{I_2}{I_1} = \frac{h_f}{1 + h_o Z_c} \quad (25.24)$$



b. L'application de la loi des tensions au circuit d'entrée donne:

$$E_1 - h_i I_1 - h_r E_2 = 0$$

de sorte que:

$$I_1 = \frac{E_1 - h_r E_2}{h_i}$$

L'application de la loi des courants au circuit de sortie donne:

$$I_2 = h_f I_1 + h_o E_2$$

Mais:

$$I_2 = -\frac{E_2}{Z_C}$$

de sorte que:

$$-\frac{E_2}{Z_C} = h_f I_1 + h_o E_2$$

Par substitution, on a:

$$-\frac{E_2}{Z_C} = h_f \left( \frac{E_1 - h_r E_2}{h_i} \right) + h_o E_2$$

ou encore:

$$h_i E_2 = -h_f Z_C E_1 + h_r h_f Z_C E_2 - h_i h_o Z_C E_2$$

et:

$$E_2 (h_i - h_r h_f Z_C + h_i h_o Z_C) = -h_f Z_C E_1$$

ce qui donne le résultat:

$$A_v = \frac{E_2}{E_1} = \frac{-h_f Z_C}{h_i (1 + h_o Z_C) - h_r h_f Z_C} \quad (25.25)$$

**EXEMPLE 25.5** Les paramètres hybrides d'un transistor sont  $H_i = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $h'_{re} = 4 \times 10^{-4}$ ,  $h_{fe} = 50$  et  $h_o = 25 \times 10^{-6} \text{ S}$ . Déterminer son gain en courant et son gain en tension, si  $Z_C$  est une charge résistive de  $2 \text{ k}\Omega$ .

*Solution:*

$$\text{a. } A_i = \frac{h_f}{1 + h_o Z_C} = \frac{50}{1 + (25 \times 10^{-6})(2 \times 10^3)}$$

$$A_i = \frac{50}{1 + 50 \times 10^{-3}} = \frac{50}{1,050} = 47,62$$

$$\begin{aligned} \text{b. } A_v &= \frac{-h_f Z_C}{h_i (1 + h_o Z_C) - h_r h_f Z_C} \\ &= \frac{-(50)(2 \times 10^3)}{(1 \times 10^3)(1,050) - (4 \times 10^{-4})(50)(2 \times 10^3)} \end{aligned}$$

$$A_v = \frac{-100 \times 10^3}{1,050 \times 10^3 - 0,04 \times 10^3} = -\frac{100}{1,01} = -99$$



Le signe moins indique simplement qu'il existe un déphasage de 180° entre  $E_2$  et  $E_1$  pour les polarités définies à la figure 25.32.

## 25.5 IMPÉDANCES D'ENTRÉE ET DE SORTIE

Nous allons maintenant déterminer les impédances d'entrée et de sortie du circuit hybride équivalent et d'un circuit équivalent en  $z$ . L'impédance d'entrée d'un circuit quelconque peut toujours s'exprimer en termes du rapport de la tension d'entrée au courant d'entrée, qu'une charge soit reliée ou non à ce circuit. L'impédance de sortie est par ailleurs toujours déterminée à l'aide de l'hypothèse d'une tension de la source nulle ou d'un courant de la source nul.

Dans le cas du circuit équivalent hybride illustré à la figure 25.32, nous avons établi, à la section précédente, que:

$$E_1 = h_i I_1 + h_r E_2$$

$$E_2 = -I_2 Z_L$$

et que:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{h_f}{1 + h_o Z_C}$$

Par substitution dans la deuxième équation de l'expression de  $I_2$  donnée par la première, on obtient:

$$E_2 = - \left( \frac{h_f I_1}{1 + h_o Z_C} \right) Z_C$$

de sorte que la première équation devient:

$$E_1 = h_i I_1 + h_r \left( - \frac{h_f I_1 Z_C}{1 + h_o Z_C} \right)$$

et:

$$E_1 = I_1 \left( h_i - \frac{h_r h_f Z_C}{1 + h_o Z_C} \right)$$

de sorte que:

$$\boxed{Z_i = \frac{E_1}{I_1} = h_i - \frac{h_r h_f Z_C}{1 + h_o Z_C}} \quad (25.26)$$

Pour déterminer l'impédance de sortie, nous supposons nulle la tension de la source mais non sa résistance interne (figure 25.33).

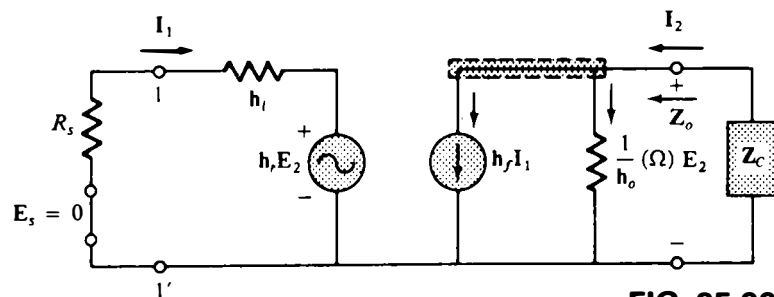


FIG. 25.33



Puisque:

$$\mathbf{E}_s = 0$$

on a:

$$\mathbf{I}_1 = -\frac{\mathbf{h}_r \mathbf{E}_2}{\mathbf{h}_i + R_s}$$

Dans le circuit de sortie, on a:

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{h}_f \mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_o \mathbf{E}_2$$

ou encore:

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{h}_f \left( -\frac{\mathbf{h}_r \mathbf{E}_2}{\mathbf{h}_i + R_s} \right) + \mathbf{h}_o \mathbf{E}_2$$

et:

$$\mathbf{I}_2 = \left( -\frac{\mathbf{h}_r \mathbf{h}_f}{\mathbf{h}_i + R_s} + \mathbf{h}_o \right) \mathbf{E}_2$$

de sorte que:

$$\mathbf{Z}_o = \frac{\mathbf{E}_2}{\mathbf{I}_2} = \frac{1}{\mathbf{h}_o - \frac{\mathbf{h}_r \mathbf{h}_f}{\mathbf{h}_i + R_s}} \quad (25.27)$$

**EXEMPLE 25.6** Déterminer  $\mathbf{Z}_i$  et  $\mathbf{Z}_o$  du transistor décrit à l'exemple 25.5 si  $R_s = 1 \text{ k}\Omega$ .

*Solution:*

$$\mathbf{Z}_i = \mathbf{h}_i - \frac{\mathbf{h}_r \mathbf{h}_f \mathbf{Z}_c}{1 + \mathbf{h}_o \mathbf{Z}_c} = 1 \times 10^3 - \frac{0,04 \times 10^3}{1,050}$$

$$= 1 \times 10^3 - 0,0381 \times 10^3 = \mathbf{961,9 \Omega}$$

$$\mathbf{Z}_o = \frac{1}{\mathbf{h}_o - \frac{\mathbf{h}_r \mathbf{h}_f}{\mathbf{h}_i + R_s}} = \frac{1}{25 \times 10^{-6} - \frac{(4 \times 10^{-4})(50)}{1 \text{ k}\Omega + 1 \text{ k}\Omega}}$$

$$= \frac{1}{25 \times 10^{-6} - \frac{200 \times 10^{-4}}{2 \times 10^3}}$$

$$= \frac{1}{25 \times 10^{-6} - 10 \times 10^{-6}}$$

$$\mathbf{Z}_o = \frac{1}{15 \times 10^{-6}} = \mathbf{66,67 \text{ k}\Omega}$$

Pour le circuit équivalent en  $z$  illustré à la figure 25.34, on a:

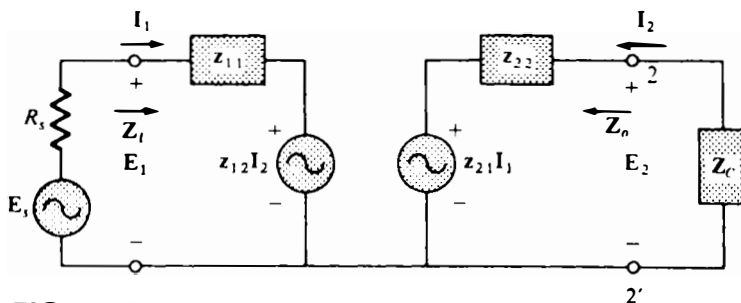


FIG. 25.34



$$I_2 = \frac{-z_{21}I_1}{z_{22} + Z_C}$$

et:

$$I_1 = \frac{E_1 - z_{12}I_2}{z_{11}}$$

ou encore:

$$E_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2 = z_{11}I_1 + z_{12}\left(\frac{-z_{21}I_1}{z_{22} + Z_C}\right)$$

de sorte que:

$$Z_i = \frac{E_1}{I_1} = z_{11} - \frac{z_{12}z_{21}}{z_{22} + Z_C} \quad (25.28)$$

Pour déterminer l'impédance de sortie, supposons que  $E_s = 0$ :

$$I_1 = -\frac{z_{12}I_2}{R_s + z_{11}} \quad \text{et} \quad I_2 = \frac{E_2 - z_{21}I_1}{z_{22}}$$

ou encore:

$$E_2 = z_{22}I_2 + z_{21}I_1 = z_{22}I_2 + z_{21}\left(-\frac{z_{12}I_2}{R_s + z_{11}}\right)$$

Enfin:

$$E_2 = z_{22}I_2 - \frac{z_{12}z_{21}I_2}{R_s + z_{11}}$$

de sorte que:

$$Z_o = \frac{E_2}{I_2} = z_{22} - \frac{z_{12}z_{21}}{R_s + z_{11}} \quad (25.29)$$

## 25.6 CONVERSION ENTRE LES PARAMÈTRES

Les équations liant les paramètres  $z$  et  $y$  peuvent se déterminer directement à partir des équations (25.1) et (25.10). L'emploi de la méthode des déterminants pour les équations (25.10a) et (25.10b):

$$\begin{aligned} I_1 &= y_{11}E_1 + y_{12}E_2 \\ I_2 &= y_{21}E_1 + y_{22}E_2 \end{aligned}$$

donne:

$$E_1 = \frac{\begin{vmatrix} I_1 & y_{12} \\ I_2 & y_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix}} = \frac{y_{22}I_1 - y_{12}I_2}{y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}}$$

En utilisant la notation:

$$\Delta_y = y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}$$





on a:

$$E_1 = \frac{y_{22}}{\Delta_y} I_1 - \frac{y_{12}}{\Delta_y} I_2$$

Cette relation, lorsqu'elle est mise en parallèle avec l'équation (25.1a):

$$E_1 = z_{11} I_1 + z_{12} I_2$$

donne:

$$z_{11} = \frac{y_{22}}{\Delta_y} \quad \text{et} \quad z_{12} = \frac{y_{12}}{\Delta_y}$$

De la même façon, on a:

$$z_{21} = \frac{y_{21}}{\Delta_y} \quad \text{et} \quad z_{22} = \frac{y_{11}}{\Delta_y}$$

Pour convertir les paramètres d'impédance ( $z$ ) en paramètres d'admittance, on applique la méthode des déterminants aux équations (25.1a) et (25.1b). La relation entre les paramètres d'impédance et les paramètres hybrides s'obtient par la résolution pour  $I_1$  des équations hybrides à l'aide de la méthode des déterminants:

$$\begin{aligned} E_1 &= h_{11} I_1 + h_{12} E_2 \\ I_2 &= h_{21} I_1 + h_{22} E_2 \end{aligned}$$

et:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} E_1 & h_{12} \\ I_2 & h_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix}} = \frac{h_{22}}{\Delta_h} E_1 - \frac{h_{12}}{\Delta_h} I_2$$

On a donc:

$$\frac{h_{22}}{\Delta_h} E_1 = I_1 - \frac{h_{12}}{\Delta_h} I_2$$

ou encore:

$$E_1 = \frac{\Delta_h I_1}{h_{22}} - \frac{h_{12}}{h_{22}} I_2$$

Cette relation, lorsqu'elle est mise en parallèle avec l'équation des paramètres d'impédances:

$$E_1 = z_{11} I_1 + z_{12} I_2$$

indique que:

$$z_{11} = \frac{\Delta_h}{h_{22}} \quad \text{et} \quad z_{12} = -\frac{h_{12}}{h_{22}}$$

Les autres conversions sont laissées à titre d'exercice. Le tableau 25.1 donne la table complète des conversions.



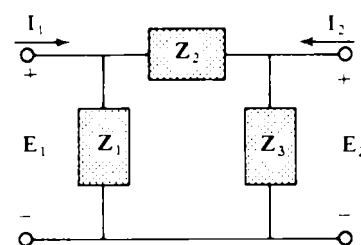
**TABEAU 25.1** Conversion entre les paramètres  $z$ ,  $y$  et  $h$ .

<b>DE</b>			
<b>À</b>	→ $[z]$	$[y]$	$[h]$
↓			
$[z]$	$\begin{matrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{y_{22}}{\Delta_y} & \frac{-y_{12}}{\Delta_y} \\ \frac{-y_{21}}{\Delta_y} & \frac{y_{11}}{\Delta_y} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta_h}{h_{22}} & \frac{h_{12}}{h_{22}} \\ \frac{-h_{21}}{h_{22}} & \frac{1}{h_{22}} \end{matrix}$
$[y]$	$\begin{matrix} \frac{z_{22}}{\Delta_z} & \frac{-z_{12}}{\Delta_z} \\ \frac{-z_{21}}{\Delta_z} & \frac{z_{11}}{\Delta_z} \end{matrix}$	$\begin{matrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{h_{11}} & \frac{-h_{12}}{h_{11}} \\ \frac{h_{21}}{h_{11}} & \frac{\Delta_h}{h_{11}} \end{matrix}$
$[h]$	$\begin{matrix} \frac{\Delta_z}{z_{22}} & \frac{z_{12}}{z_{22}} \\ \frac{-z_{21}}{z_{22}} & \frac{1}{z_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{y_{11}} & \frac{-y_{12}}{y_{11}} \\ \frac{y_{21}}{y_{11}} & \frac{\Delta_y}{y_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{matrix}$

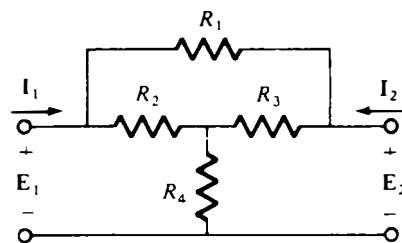
**PROBLÈMES**

**Section 25.2**

1. a. Déterminez les paramètres d'impédance ( $z$ ) du réseau en pi illustré à la figure 25.35.  
 b. Dessinez le circuit équivalent en  $z$  (sous l'une ou l'autre des formes illustrées à la figure 25.14).
  
2. a. Déterminez les paramètres d'impédance ( $z$ ) du réseau illustré à la figure 25.36.  
 b. Dessinez le circuit équivalent en  $z$  (sous l'une ou l'autre des formes illustrées à la figure 25.14).



**FIG. 25.35**



**FIG. 25.36**

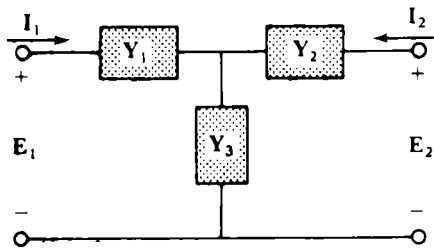


FIG. 25.37

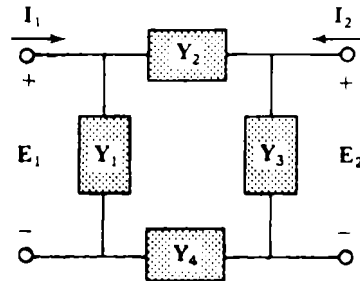


FIG. 25.38

Section 25.3

3. a. Déterminez le paramètre d'admittance ( $y$ ) du réseau en T illustré à la figure 25.37.
- b. Dessinez le circuit équivalent en  $y$  (sous l'une ou l'autre des formes illustrées à la figure 25.36).
4. a. Déterminez les paramètres d'admittance ( $y$ ) du réseau illustré à la figure 25.38.
- b. Dessinez le circuit équivalent en  $y$  (sous l'une ou l'autre des formes illustrées à la figure 25.26).

Section 25.4

5. a. Déterminez les paramètres  $h$  du réseau illustré à la figure 25.35.
- b. Dessinez le circuit équivalent hybride.
6. a. Déterminez les paramètres  $h$  du réseau illustré à la figure 25.36.
- b. Dessinez le circuit équivalent hybride.
7. a. Déterminez les paramètres hybrides du réseau illustré à la figure 25.37.
- b. Dessinez le circuit équivalent hybride.
8. a. Déterminez les paramètres hybrides du réseau illustré à la figure 25.38.
- b. Dessinez le circuit équivalent hybride.
9. Voir le circuit équivalent hybride illustré à la figure 25.39.
  - a. Calculez le gain en courant  $A_i = I_2 / I_1$ .
  - b. Calculez le gain en tension  $A_v = E_2 / E_1$ .

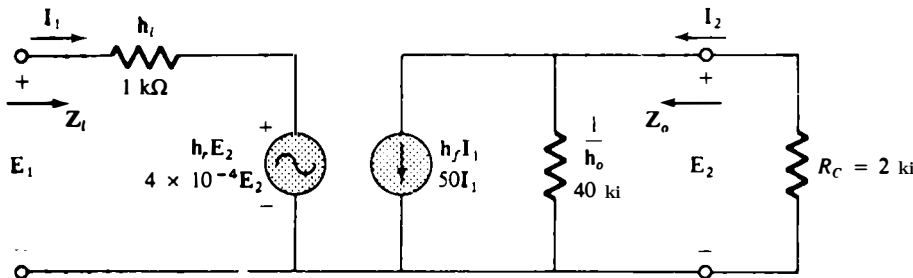


FIG. 25.39

Section 25.5

10. Voir le circuit équivalent hybride illustré à la figure 25.39.
  - a. Déterminez son impédance d'entrée.
  - b. Déterminez son impédance de sortie.
11. Déterminez les impédances d'entrée et de sortie du circuit équivalent en  $z$  illustré à la figure 25.40.

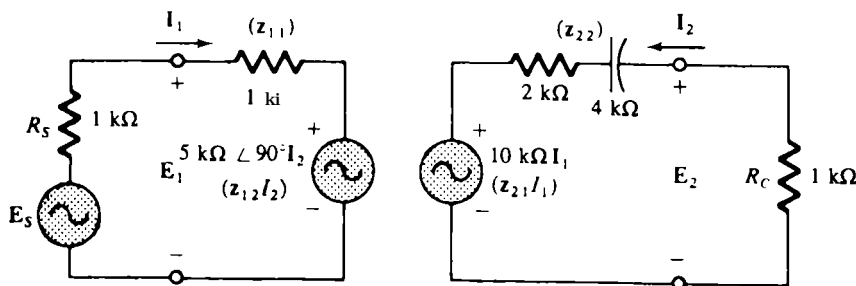


FIG. 25.40



12. Déterminez l'expression des impédances d'entrée et de sortie du circuit équivalent en  $y$ .

### Section 25.6

13. Convertissez les paramètres  $z$  suivants en paramètres  $h$ .

$$z_{11} = 4 \text{ k}\Omega$$

$$z_{12} = 2 \text{ k}\Omega$$

$$z_{21} = 3 \text{ k}\Omega$$

$$z_{22} = 4 \text{ k}\Omega$$

14. a. Convertissez les paramètres  $h$  suivants en paramètres  $z$ .

$$h_{11} = 1 \text{ k}\Omega$$

$$h_{12} = 2 \times 10^{-4}$$

$$h_{21} = 100$$

$$h_{22} = 20 \times 10^{-6} \text{ S}$$

- b. Convertissez ces paramètres en paramètres  $y$ .

## GLOSSAIRE

**Dipôle** Réseau présentant une seule paire de bornes.

**Impédance d'entrée** Impédance apparaissant aux bornes d'entrée d'un système.

**Impédance de sortie** Impédance apparaissant aux bornes de sortie d'un système quand la source d'énergie est mise hors circuit.

**Paramètres d'admittance ( $y$ )** Ensemble de paramètres ayant pour unité le siemens et pouvant servir à établir le quadripôle équivalent d'un système.

**Paramètres d'impédance ( $z$ )** Ensemble de paramètres ayant pour unité l'ohm et pouvant servir à établir le quadripôle équivalent d'un système.

**Paramètres hybrides ( $h$ )** Ensemble de paramètres d'unités différentes (ohm, siemens et nombres purs) pouvant servir à établir le quadripôle équivalent d'un système.

**Quadripôle** Réseau présentant deux paires de bornes.

# ANNEXE A

## DÉTERMINANTS D'ORDRE TROIS

Considérons le système à trois équations linéaires suivant:

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

La résolution de ce système par la méthode des déterminants est semblable à celle d'un système à deux équations. Ainsi pour obtenir  $x$ , on trouve d'abord le numérateur en remplaçant les éléments de la première colonne du déterminant apparaissant au dénominateur par les constantes constituant les membres droits des équations, le déterminant étant formé des coefficients des variables (la même technique vaut pour  $y$  et  $z$ ). Comme auparavant, le dénominateur est le même peu importe la variable. On a donc:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

Il existe plus d'une façon de développer un déterminant d'ordre trois. Chacune donne toutefois le même résultat. Voici une façon de faire le développement en termes de déterminants d'un ordre inférieur:

$$\text{Dét} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \underbrace{\left( + \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \right)}_{\text{Cofacteur}} + b_1 \underbrace{\left( - \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} \right)}_{\text{Cofacteur}} + c_1 \underbrace{\left( + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \right)}_{\text{Cofacteur}}$$

Coefficient
Coefficient
Coefficient

Ce développement s'obtient par la multiplication des éléments de la première ligne du déterminant par leurs cofacteurs correspondants. Il n'est toutefois absolument pas nécessaire d'utiliser les éléments de la première ligne comme coefficients. De fait, n'importe quelle *ligne* ou *colonne* (mais non les diagonales) peut être employée pour faire le développement d'un déterminant d'ordre trois.

Le signe affectant un cofacteur donné dépend uniquement de la position du coefficient ( $a_1$ ,  $b_1$  et  $c_1$  dans le présent cas) dans la matrice; la correspondance entre les signes et les positions des coefficients est:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ \downarrow & & \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Il est assez facile de mémoriser cette correspondance: le signe de l'élément du coin supérieur gauche est positif et il y a alternance de signe pour chaque déplacement vertical ou horizontal vers un élément voisin.

Les signes associés aux éléments d'un déterminant d'ordre trois sont ainsi:

$$\begin{vmatrix} a_1^{(+)} & b_1^{(-)} & c_1^{(+)} \\ a_2^{(-)} & b_2^{(+)} & c_2^{(-)} \\ a_3^{(+)} & b_3^{(-)} & c_3^{(+)} \end{vmatrix}$$

Les mineurs associés à chacun des coefficients sont obtenus par suppression de la colonne et de la ligne dans lesquelles apparaît le coefficient et par écriture du déterminant d'ordre deux des éléments des autres lignes et colonnes sans changer la position relative de ces derniers.

Considérons les cofacteurs associés aux coefficients  $a_1$  et  $b_1$  du développement du déterminant d'ordre trois. Le signe du cofacteur associé à  $a_1$  est positif et celui du cofacteur associé à  $b_1$  est négatif, comme permet de le déterminer la matrice de correspondance de la page précédente. En suivant la méthode exposée, nous obtenons pour  $a_1$  et  $b_1$  les mineurs suivants:

$$a_1 \text{ (mineur)} = \begin{vmatrix} \uparrow & b_1 & c_1 \\ \phi_2 & b_2 & c_2 \\ \phi_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$b_1 \text{ (mineur)} = \begin{vmatrix} a_1 & \uparrow & c_1 \\ a_2 & \phi_2 & c_2 \\ a_3 & \phi_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Nous avons précisé que n'importe quelle ligne ou colonne peut être employée pour faire le développement d'un déterminant d'ordre trois et que le résultat est le même peu importe la ligne ou la colonne choisie. Le développement obtenu en choisissant la première colonne est:

$$\text{Dét} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \left( + \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \right) + a_2 \left( - \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \right) + a_3 \left( + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \right)$$

Mais le choix judicieux de la colonne ou de la ligne peut souvent conduire à une réduction appréciable du nombre d'opérations nécessaires au développement. Ainsi le choix de la première colonne et de la troisième ligne dans les déterminants ci-dessous simplifie le développement puisque certains coefficients sont nuls.

$$\text{Dét} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 2 \left( + \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} \right) + 0 + 0 = 2(28 - 30) \\ = -4$$

$$\text{Dét} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 6 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \left( + \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} \right) + 0 + 3 \left( + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \right) \\ = 2(32 - 42) + 3(6 - 8) = 2(-10) + 3(-2) \\ = -26$$

**EXEMPLES.** Développer les déterminants d'ordre trois ci-dessous

$$\text{a. Dét} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \left( + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \right) + 3 \left( - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \right) + 2 \left( + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) \\ = 1[6 - 1] + 3[-(6 - 3)] + 2[2 - 6] \\ = 5 + 3(-3) + 2(-4) \\ = 5 - 9 - 8 \\ = -12$$

## ANNEXE B

$$\begin{aligned}
 \text{b. Dét} &= \begin{vmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \\ 8 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 \left( - \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \right) + 8 \left( + \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \right) \\
 &= 0 + 2[-(0 - 24)] + 8[(20 - 0)] \\
 &= 0 + 2(24) + 8(20) \\
 &= 48 + 160 \\
 &= \mathbf{208}
 \end{aligned}$$

# ANNEXE B

## MARQUAGE DES CONDENSATEURS AU MICA ENROBÉS SELON LE CODE DES COULEURS (EN PICO FARADS)

*Spécifications RETMA et MIL standard*

Couleur	Chiffre significatif	Multi-plicateur	Tolérance ± %	Classe	Coeff. de temp. en p.p.m./°C Inférieur à	Dérive Inférieure à
Noir	0	1	20	A	± 1000	± (5% + 1 pF)
Brun	1	10	—	B	± 500	± (3% + 1 pF)
Rouge	2	100	2	C	± 200	± (0,5% + 0,5 pF)
Orange	3	1000	3	D	± 100	± (0,3% + 0,1 pF)
Jaune	4	10 000	—	E	+100 - 20	± (0,1% + 0,1 pF)
Vert	5	—	5	—	—	—
Bleu	6	—	—	—	—	—
Violet	7	—	—	—	—	—
Gris	8	—	—	I	+150 - 50	± (0,03% + 0,2 pF)
Blanc	9	—	—	J	+100 - 50	± (0,2% + 0,2 pF)
Or	—	0,1	—	—	—	—
Argent	—	0,01	10	—	—	—

*Courtoisie de Sprague Electric Co.*

## ANNEXE C

NOTE: Si les deux rangées de points n'apparaissent pas sur la même face, tourner le condensateur autour de l'axe passant par ses sorties pour décoder sans erreur la deuxième rangée se trouvant soit sur le côté soit sur la face opposée.

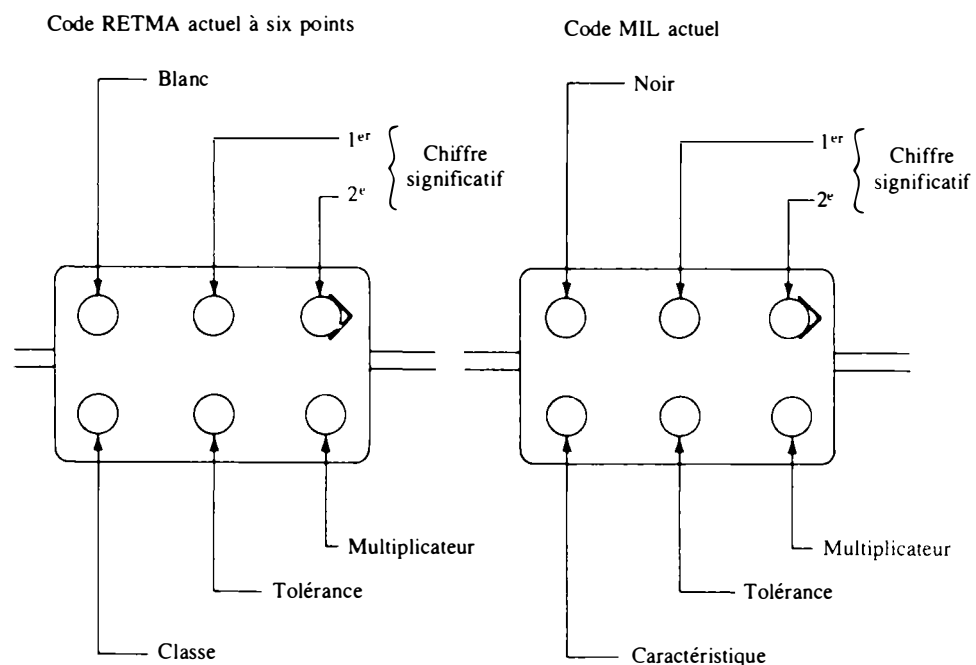


FIG. B.1

# ANNEXE C

## MARQUAGE DES CONDENSATEURS TUBULAIRES ENROBÉS SELON LE CODE DES COULEURS (EN PICO FARADS)

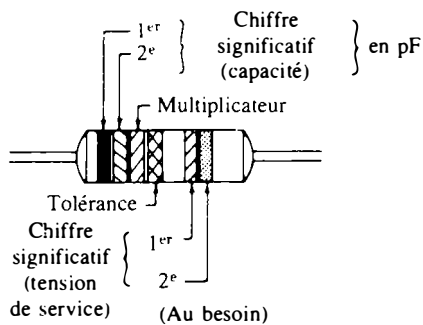


FIG. C.1

Couleur	Chiffre significatif	Multi- plicateur	Tolérance ± %
Noir	0	1	20
Brun	1	10	—
Rouge	2	100	—
Orange	3	1000	30
Jaune	4	10 000	40
Vert	5	$10^5$	5
Bleu	6	$10^6$	—
Violet	7	—	—
Gris	8	—	—
Blanc	9	—	10

Courtoisie de Sprague Electric Co.

NOTE: La tension de service nominale est donnée par un seul chiffre si elle est inférieure à 900 V; les tensions supérieures sont données par un nombre à deux chiffres suivi de deux zéros.

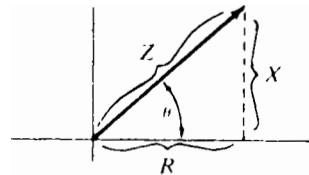


# ANNEXE D

## CONVERSION DES NOMBRES COMPLEXES

### La calculatrice

La calculatrice de poche, apparue ces dernières années, permet de faire facilement la conversion des nombres complexes, avec une précision accrue et un gain de temps considérable. Selon le type de calculatrice, la conversion peut être effectuée au moyen des équations données à la figure D.1 ou à l'aide d'un programme en mémoire comptant un nombre minimal d'étapes. Pour permettre la conversion des nombres complexes, la calculatrice doit présenter les fonctions suivantes (outre les quatre opérations mathématiques élémentaires):  $\sqrt{\quad}$ ,  $(\quad)^2$ ,  $\text{tg } \theta$ ,  $\sin \theta$ ,  $\cos \theta$ ,  $\text{tg}^{-1}$ ,  $\sin^{-1}$  et  $\cos^{-1}$ .



$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$\theta = \text{tg}^{-1} \frac{X}{R}$$

FIG. D.1

**De la forme rectangulaire à la forme polaire** Les équations nécessaires sont celles à la figure D.1:

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} \quad (\text{D.1})$$

$$\theta = \text{tg}^{-1} \frac{X}{R} \quad (\text{D.2})$$

Pour l'équation (D.1), il s'agit d'abord de mettre au carré les parties réelle et imaginaire et d'en faire la somme. On extrait ensuite la racine carrée de cette somme.

Pour l'équation (D.2), on calcule d'abord le rapport  $X/R$  puis on enfonce la touche  $\text{tg}^{-1}$ . De nombreuses calculatrices sont construites de telle sorte qu'il faut enfonce la touche « fonction » avant la touche  $\text{tg}^{-1}$ .

**De la forme polaire à la forme rectangulaire** Les équations nécessaires déterminées à l'aide de la figure D.1 sont:

$$X = Z \sin \theta \quad (\text{D.3})$$

$$R = Z \cos \theta \quad (\text{D.4})$$

Pour déterminer la partie imaginaire, on calcule d'abord le  $\sin \theta$  qu'on multiplie ensuite par  $Z$ . Pour la partie réelle, on calcule le  $\cos \theta$  qu'on multiplie ensuite par  $Z$ .

# ANNEXE E

## L'ALPHABET GREC

Lettre	Majuscule	Minuscule	Sert à représenter
Alpha	A	$\alpha$	Aire, angles, coefficients
Bêta	B	$\beta$	Angles, coefficients, induction
Gamma	$\Gamma$	$\gamma$	Densité, conductivité
Delta	$\Delta$	$\delta$	Masse spécifique, variation
Epsilon	E	$\epsilon$	Base du logarithme népérien
Zêta	Z	$\zeta$	Coefficients, coordonnées, impédance
Êta	H	$\eta$	Rendement, coefficient d'hystérésis
Thêta	$\Theta$	$\theta$	Déphasage, température
Iota	I	$\iota$	
Kappa	K	$\kappa$	Constante diélectrique, susceptibilité
Lambda	$\Lambda$	$\lambda$	Longueur d'onde
Mu	M	$\mu$	Facteur d'amplification, micro, perméabilité
Nu	N	$\nu$	Reluctivité
Xi	$\Xi$	$\xi$	
Omicron	O	$o$	
Pi	$\Pi$	$\pi$	3,1416
Rhô	P	$\rho$	Résistivité
Sigma	$\Sigma$	$\sigma$	Somme
Tau	T	$\tau$	Constante de temps
Upsilon	$\Upsilon$	$\upsilon$	
Phi	$\Phi$	$\phi$	Angles, flux magnétique
Khi	X	$\chi$	
Psi	$\Psi$	$\psi$	Flux diélectrique, déphasage
Oméga	$\Omega$	$\omega$	Ohms, pulsation

# ANNEXE F

## CONVERSION DES UNITÉS DU MAGNÉTISME

	SI (MKS)	CGS	Anglo-saxon
$\Phi$	webers (Wb) 1 Wb	maxwells = $10^8$ maxwells	lignes = $10^8$ lignes
$B$	teslas $\text{Wb/m}^2$ 1 T	gauss (maxwells/cm <sup>2</sup> ) = $10^4$ gauss	lignes/po <sup>2</sup> = $6,452 \times 10^4$ lignes/po <sup>2</sup>
$A$	1 m <sup>2</sup>	= $10^4$ cm <sup>2</sup>	= 1550 po <sup>2</sup>
$\mu_0$	$4\pi \times 10^{-7}$ H·m	= 1 gauss/oersted	= 3,20 lignes/A·m
$\mathcal{F}$	$NI$ (ampères, A) 1 A	$0,4\pi NI$ (gilberts) = 1,257 gilberts	$NI$ (At) 1 gilbert = 0,7958 At
$H$	$NI/l$ (A/m) 1 A/m	$0,4\pi NI/l$ (oersteds) = $1,26 \times 10^{-2}$ oersted	$NI/l$ (At/po) = $2,54 \times 10^{-2}$ At/po
$H_g$	$7,97 \times 10^5 B_g$ (A/m)	$B_g$ (oersteds)	0,313 $B_g$ (At/po)

## ANNEXE G

## FONCTIONS EXPONENTIELLES

$x$	$e^x$	$e^{-x}$	$x$	$e^x$	$e^{-x}$	$x$	$e^x$	$e^{-x}$	$x$	$e^x$	$e^{-x}$
0,00	1,0000	1,000000	0,70	2,0138	0,496585	1,40	4,0552	0,246597	2,10	8,1662	0,122456
0,01	1,0101	0,990050	0,71	2,0340	,491644	1,41	4,0960	,244143	2,11	8,2482	,121238
0,02	1,0202	,980199	0,72	2,0544	,486752	1,42	4,1371	,241714	2,12	8,3311	,120032
0,03	1,0305	,970446	0,73	2,0751	,481909	1,43	4,1787	,239309	2,13	8,4149	,118837
0,04	1,0408	,960789	0,74	2,0959	,477114	1,44	4,2207	,236928	2,14	8,4994	,117655
0,05	1,0513	0,951229	0,75	2,1170	0,472367	1,45	4,2631	0,234570	2,15	8,5849	0,116484
0,06	1,0618	,941765	0,76	2,1383	,467666	1,46	4,3060	,232236	2,16	8,6711	,115325
0,07	1,0725	,932394	0,77	2,1598	,463013	1,47	4,3492	,229925	2,17	8,7583	,114178
0,08	1,0833	,923116	0,78	2,1815	,458406	1,48	4,3929	,227638	2,18	8,8463	,113042
0,09	1,0942	,913931	0,79	2,2034	,453845	1,49	4,4371	,225373	2,19	8,9352	,111917
0,10	1,1052	0,904837	0,80	2,2255	0,449329	1,50	4,4817	0,223130	2,20	9,0250	0,110803
0,11	1,1163	,895834	0,81	2,2479	,444858	1,51	4,5267	,220910	2,21	9,1157	,109701
0,12	1,1275	,886920	0,82	2,2705	,440432	1,52	4,5722	,218712	2,22	9,2073	,108609
0,13	1,1388	,878095	0,83	2,2933	,436049	1,53	4,6182	,216536	2,23	9,2999	,107528
0,14	1,1503	,869358	0,84	2,3164	,431711	1,54	4,6646	,214381	2,24	9,3933	,106459
0,15	1,1618	0,860708	0,85	2,3396	0,427415	1,55	4,7115	0,212248	2,25	9,4877	0,105399
0,16	1,1735	,852144	0,86	2,3632	,423162	1,56	4,7588	,210136	2,26	9,5831	,104350
0,17	1,1853	,843665	0,87	2,3869	,418952	1,57	4,8066	,208045	2,27	9,6794	,103312
0,18	1,1972	,835270	0,88	2,4109	,414783	1,58	4,8550	,205975	2,28	9,7767	,102284
0,19	1,2092	,826959	0,89	2,4351	,410656	1,59	4,9037	,203926	2,29	9,8749	,101266
0,20	1,2214	0,818731	0,90	2,4596	0,406570	1,60	4,9530	0,201897	2,30	9,9742	0,100259
0,21	1,2337	,810584	0,91	2,4843	,402524	1,61	5,0028	,199888	2,31	10,074	,099261
0,22	1,2461	,802519	0,92	2,5093	,398519	1,62	5,0531	,197899	2,32	10,176	,098274
0,23	1,2586	,794534	0,93	2,5345	,394554	1,63	5,1039	,195930	2,33	10,278	,097296
0,24	1,2712	,786628	0,94	2,5600	,390628	1,64	5,1552	,193980	2,34	10,381	,096328
0,25	1,2840	0,778801	0,95	2,5857	0,386741	1,65	5,2070	0,192050	2,35	10,486	0,095369
0,26	1,2969	,771052	0,96	2,6117	,382893	1,66	5,2593	,190139	2,36	10,591	,094420
0,27	1,3100	,763379	0,97	2,6379	,379083	1,67	5,3122	,188247	2,37	10,697	,093481
0,28	1,3231	,755784	0,98	2,6645	,375311	1,68	5,3656	,186374	2,38	10,805	,092551
0,29	1,3364	,748264	0,99	2,6912	,371577	1,69	5,4195	,184520	2,39	10,913	,091630
0,30	1,3499	0,740818	1,00	2,7183	0,367879	1,70	5,4739	0,182684	2,40	11,023	0,090718
0,31	1,3634	,733447	1,01	2,7456	,364219	1,71	5,5290	,180866	2,41	11,134	,089815
0,32	1,3771	,726149	1,02	2,7732	,360595	1,72	5,5845	,179066	2,42	11,246	,088922
0,33	1,3910	,718924	1,03	2,8011	,357007	1,73	5,6407	,177284	2,43	11,359	,088037
0,34	1,4049	,711770	1,04	2,8292	,353455	1,74	5,6973	,175520	2,44	11,473	,087161
0,35	1,4191	0,704688	1,05	2,8577	0,349938	1,75	5,7546	0,173774	2,45	11,588	0,086294
0,36	1,4333	,697676	1,06	2,8864	,346456	1,76	5,8124	,172045	2,46	11,705	,085435
0,37	1,4477	,690734	1,07	2,9154	,343009	1,77	5,8709	,170333	2,47	11,822	,084585
0,38	1,4623	,683861	1,08	2,9447	,339596	1,78	5,9299	,168638	2,48	11,941	,083743
0,39	1,4770	,677057	1,09	2,9743	,336216	1,79	5,9895	,166960	2,49	12,061	,082910
0,40	1,4918	0,670320	1,10	3,0042	0,332871	1,80	6,0496	0,165299	2,50	12,182	0,082085
0,41	1,5068	,663650	1,11	3,0344	,329559	1,81	6,1104	,163654	2,51	12,305	,081268
0,42	1,5220	,657047	1,12	3,0649	,326280	1,82	6,1719	,162026	2,52	12,429	,080460
0,43	1,5373	,650509	1,13	3,0957	,323033	1,83	6,2339	,160414	2,53	12,554	,079659
0,44	1,5527	,644036	1,14	3,1268	,319819	1,84	6,2965	,158817	2,54	12,680	,078866
0,45	1,5683	0,637628	1,15	3,1582	0,316637	1,85	6,3598	0,157237	2,55	12,807	0,078082
0,46	1,5841	,631284	1,16	3,1899	,313486	1,86	6,4237	,155673	2,56	12,936	,077305
0,47	1,6000	,625002	1,17	3,2220	,310367	1,87	6,4883	,154124	2,57	13,066	,076536
0,48	1,6161	,618783	1,18	3,2544	,307279	1,88	6,5535	,152590	2,58	13,197	,075774
0,49	1,6323	,612626	1,19	3,2871	,304221	1,89	6,6194	,151072	2,59	13,330	,075020
0,50	1,6487	0,606531	1,20	3,3201	0,301194	1,90	6,6859	0,149569	2,60	13,464	0,074274
0,51	1,6653	,600496	1,21	3,3535	,298197	1,91	6,7531	,148080	2,61	13,599	,073535
0,52	1,6820	,594521	1,22	3,3872	,295230	1,92	6,8210	,146607	2,62	13,736	,072803
0,53	1,6989	,588605	1,23	3,4212	,292293	1,93	6,8895	,145148	2,63	13,874	,072078
0,54	1,7160	,582748	1,24	3,4556	,289384	1,94	6,9588	,143704	2,64	14,013	,071361
0,55	1,7333	0,576950	1,25	3,4903	0,286505	1,95	7,0287	0,142274	2,65	14,154	0,070651
0,56	1,7507	,571209	1,26	3,5254	,283654	1,96	7,0993	,140858	2,66	14,296	,069948
0,57	1,7683	,565525	1,27	3,5609	,280832	1,97	7,1707	,139457	2,67	14,440	,069252
0,58	1,7860	,559898	1,28	3,5966	,278037	1,98	7,2427	,138069	2,68	14,585	,068563
0,59	1,8040	,554327	1,29	3,6328	,275271	1,99	7,3155	,136695	2,69	14,732	,067881
0,60	1,8221	0,548812	1,30	3,6693	0,272532	2,00	7,3891	0,135335	2,70	14,880	0,067206
0,61	1,8404	,543351	1,31	3,7062	,269820	2,01	7,4633	,133989	2,71	15,029	,066537
0,62	1,8589	,537944	1,32	3,7434	,267135	2,02	7,5383	,132655	2,72	15,180	,065875
0,63	1,8776	,532592	1,33	3,7810	,264477	2,03	7,6141	,131336	2,73	15,333	,065219
0,64	1,8965	,527292	1,34	3,8190	,261846	2,04	7,6906	,130029	2,74	15,487	,064570
0,65	1,9155	0,522046	1,35	3,8574	0,259240	2,05	7,7679	0,128735	2,75	15,643	0,063928
0,66	1,9348	,516851	1,36	3,8962	,256661	2,06	7,8460	,127454	2,76	15,800	,063292
0,67	1,9542	,511709	1,37	3,9354	,254107	2,07	7,9248	,126186	2,77	15,959	,062662
0,68	1,9739	,506617	1,38	3,9749	,251579	2,08	8,0045	,124930	2,78	16,119	,062039
0,69	1,9937	,501576	1,39	4,0147	,249075	2,09	8,0849	,123687	2,79	16,281	,061421

$x$	$e^x$	$e^{-x}$	$x$	$e^x$	$e^{-x}$	$x$	$e^x$	$e^{-x}$	$x$	$e^x$	$e^{-x}$
2,80	16,445	0,060810	3,60	36,598	0,027324	4,40	81,451	0,012277	5,20	181,27	0,005517
2,81	16,610	,060205	3,61	36,966	,027052	4,41	82,269	,012155	5,21	183,09	,005462
2,82	16,777	,059606	3,62	37,338	,026783	4,42	83,096	,012034	5,22	184,93	,005407
2,83	16,945	,059013	3,63	37,713	,026516	4,43	83,931	,011914	5,23	186,79	,005354
2,84	17,116	,058426	3,64	38,092	,026252	4,44	84,775	,011796	5,24	188,67	,005300
2,85	17,288	0,057844	3,65	38,475	0,025991	4,45	85,627	0,011679	5,25	190,57	0,005248
2,86	17,462	,057269	3,66	38,861	,025733	4,46	86,488	,011562	5,26	192,48	,005195
2,87	17,637	,056699	3,67	39,252	,025476	4,47	87,357	,011447	5,27	194,42	,005144
2,88	17,814	,056135	3,68	39,646	,025223	4,48	88,235	,011333	5,28	196,37	,005092
2,89	17,993	,055576	3,69	40,045	,024972	4,49	89,121	,011221	5,29	198,34	,005042
2,90	18,174	0,055023	3,70	40,447	0,024724	4,50	90,017	0,011109	5,30	200,34	0,004992
2,91	18,357	,054476	3,71	40,854	,024478	4,51	90,922	,010998	5,31	202,35	,004942
2,92	18,541	,053934	3,72	41,264	,024234	4,52	91,836	,010889	5,32	204,38	,004893
2,93	18,728	,053397	3,73	41,679	,023993	4,53	92,759	,010781	5,33	206,44	,004844
2,94	18,916	,052866	3,74	42,098	,023754	4,54	93,691	,010673	5,34	208,51	,004796
2,95	19,106	0,052340	3,75	42,521	0,023518	4,55	94,632	0,010567	5,35	210,61	0,004748
2,96	19,298	,051819	3,76	42,948	,023284	4,56	95,583	,010462	5,36	212,72	,004701
2,97	19,492	,051303	3,77	43,380	,023052	4,57	96,544	,010358	5,37	214,86	,004654
2,98	19,688	,050793	3,78	43,816	,022823	4,58	97,514	,010255	5,38	217,02	,004608
2,99	19,886	,050287	3,79	44,256	,022596	4,59	98,494	,010153	5,39	219,20	,004562
3,00	20,086	0,049787	3,80	44,701	0,022371	4,60	99,484	0,010052	5,40	221,41	0,004517
3,01	20,287	,049292	3,81	45,150	,022148	4,61	100,48	,009952	5,41	223,63	,004472
3,02	20,491	,048801	3,82	45,604	,021928	4,62	101,49	,009853	5,42	225,88	,004427
3,03	20,697	,048316	3,83	46,063	,021710	4,63	102,51	,009755	5,43	228,15	,004383
3,04	20,905	,047835	3,84	46,525	,021494	4,64	103,54	,009658	5,44	230,44	,004339
3,05	21,115	0,047359	3,85	46,993	0,021280	4,65	104,58	0,009562	5,45	232,76	0,004296
3,06	21,328	,046888	3,86	47,465	,021068	4,66	105,64	,009466	5,46	235,10	,004254
3,07	21,542	,046421	3,87	47,942	,020858	4,67	106,70	,009372	5,47	237,46	,004211
3,08	21,758	,045959	3,88	48,424	,020651	4,68	107,77	,009279	5,48	239,85	,004169
3,09	21,977	,045502	3,89	48,911	,020445	4,69	108,85	,009187	5,49	242,26	,004128
3,10	22,198	0,045049	3,90	49,402	0,020242	4,70	109,95	0,009095	5,50	244,69	0,004086
3,11	22,421	,044601	3,91	49,899	,020041	4,71	111,05	,009005	5,51	247,14	,004045
3,12	22,646	,044157	3,92	50,400	,019841	4,72	112,17	,008915	5,52	249,61	,004004
3,13	22,874	,043718	3,93	50,907	,019644	4,73	113,30	,008826	5,53	252,10	,003963
3,14	23,104	,043283	3,94	51,419	,019448	4,74	114,43	,008739	5,54	254,61	,003922
3,15	23,336	0,042852	3,95	51,935	1,019255	4,75	115,58	0,008652	5,55	257,14	0,003881
3,16	23,571	,042426	3,96	52,457	,019063	4,76	116,75	,008566	5,56	259,69	,003840
3,17	23,807	,042004	3,97	52,985	,018873	4,77	117,92	,008480	5,57	262,26	,003799
3,18	24,047	,041586	3,98	53,617	,018686	4,78	119,10	,008396	5,58	264,85	,003758
3,19	24,288	,041172	3,99	54,055	,018500	4,79	120,30	,008312	5,59	267,46	,003717
3,20	24,533	0,040762	4,00	54,598	0,018316	4,80	121,51	0,008230	6,00	403,43	0,0024788
3,21	24,779	,040357	4,01	55,147	,018133	4,81	122,73	,008148	6,01	405,91	,0024379
3,22	25,028	,039955	4,02	55,701	,017953	4,82	123,97	,008067	6,10	445,86	,0022429
3,23	25,280	,039557	4,03	56,261	,017774	4,83	125,21	,007987	6,15	468,72	,0021335
3,24	25,534	,039164	4,04	56,826	,017597	4,84	125,47	,007907	6,20	492,75	,0020294
3,25	25,790	0,038774	4,05	57,397	0,017422	4,85	127,74	0,007828	6,25	518,01	0,0019305
3,26	26,050	,038388	4,06	57,974	,017249	4,86	129,02	,007750	6,30	544,57	,0018363
3,27	26,311	,038006	4,07	58,557	,017077	4,87	130,32	,007673	6,35	572,49	,0017467
3,28	26,576	,037628	4,08	59,145	,016907	4,88	131,63	,007597	6,40	601,85	,0016616
3,29	26,843	,037254	4,09	59,740	,016739	4,89	132,95	,007521	6,45	632,70	,0015805
3,30	27,113	0,036883	4,10	60,340	0,016573	4,90	134,29	0,007447	6,50	665,14	0,0015034
3,31	27,385	,036516	4,11	60,947	,016408	4,91	135,64	,007372	6,55	699,24	,0014301
3,32	27,660	,036153	4,12	61,559	,016245	4,92	137,00	,007299	6,60	735,10	,0013604
3,33	27,938	,035793	4,13	62,178	,016083	4,93	138,38	,007227	6,65	772,78	,0012940
3,34	28,219	,035437	4,14	62,803	,015923	4,94	139,77	,007155	6,70	812,41	,0012309
3,35	28,503	0,035084	4,15	63,434	0,015764	4,95	141,17	0,007083	6,75	854,06	0,0011709
3,36	28,789	,034735	4,16	64,072	,015608	4,96	142,59	,007013	6,80	897,85	,0011138
3,37	29,079	,034390	4,17	64,715	,015452	4,97	144,03	,006943	6,85	943,88	,0010575
3,38	29,371	,034047	4,18	65,366	,015299	4,98	145,47	,006874	6,90	992,27	,0010078
3,39	29,666	,033709	4,19	66,023	,015146	4,99	146,94	,006806	6,95	1043,1	,0009586
3,40	29,964	0,033373	4,20	66,686	0,014996	5,00	148,41	0,006738	7,00	1096,6	0,0009119
3,41	30,265	,033041	4,21	67,357	,014846	5,01	149,90	,006671	7,05	1152,9	,0008674
3,42	30,569	,032712	4,22	68,033	,014699	5,02	151,41	,006605	7,10	1212,0	,0008251
3,43	30,877	,032387	4,23	68,717	,014552	5,03	152,93	,006539	7,15	1274,1	,0007849
3,44	31,187	,032065	4,24	69,408	,014408	5,04	154,47	,006474	7,20	1339,4	,0007466
3,45	31,500	0,031746	4,25	70,105	0,014264	5,05	156,02	0,006409	7,25	1408,1	0,0007102
3,46	31,817	,031430	4,26	70,810	,014122	5,06	157,59	,006346	7,30	1480,3	,0006755
3,47	32,137	,031117	4,27	71,522	,013982	5,07	159,17	,006282	7,35	1556,2	,0006426
3,48	32,460	,030807	4,28	72,240	,013843	5,08	160,77	,006220	7,40	1636,0	,0006113
3,49	32,786	,030501	4,29	72,966	,013705	5,09	162,39	,006158	7,45	1719,9	,0005814
3,50	33,115	0,030197	4,30	73,700	0,013569	5,10	164,02	0,006097	7,50	1808,0	0,0005531
3,51	33,448	,029897	4,31	74,440	,013434	5,11	165,67	,006036	7,55	1900,7	,0005261
3,52	33,784	,029599	4,32	75,189	,013300	5,12	167,34	,005976	7,60	1998,2	,0005005
3,53	34,124	,029305	4,33	75,944	,013168	5,13	169,02	,005917	7,65	2100,6	,0004760
3,54	34,467	,029013	4,34	76,708	,013037	5,14	170,72	,005858	7,70	2208,3	,0004528
3,55	34,813	0,028725	4,35	77,478	0,012907	5,15	172,43	0,005799	7,75	2321,6	0,0004307
3,56	35,163	,028439	4,36	78,257	,012778	5,16	174,16	,005742	7,80	2440,6	,0004097
3,57	35,517	,028156	4,37	79,044	,012651	5,17	175,91	,005685	7,85	2565,7	,0003898
3,58	35,874	,027876	4,38	79,838	,012525	5,18	177,68	,005628	7,90	2697,3	,0003707
3,59	36,234	,027598	4,39	80,640	,012401	5,19	179,47	,005572	7,95	2835,6	,0003527

## ANNEXE H

x	e <sup>x</sup>	e <sup>-x</sup>	x	e <sup>x</sup>	e <sup>-x</sup>	x	e <sup>x</sup>	e <sup>-x</sup>	x	e <sup>x</sup>	e <sup>-x</sup>
8,00	2981,0	0,0003355	8,50	4914,8	0,0002035	9,00	8103,1	0,0001234	9,50	13360	0,0000749
8,05	3133,8	,0003191	8,55	5166,8	,0001935	9,05	8518,5	,0001174	9,55	14045	,0000712
8,10	3294,5	,0003035	8,60	5431,7	,0001841	9,10	8955,3	,0001117	9,60	14765	,0000677
8,15	3463,4	,0002887	8,65	5710,1	,0001751	9,15	9414,4	,0001062	9,65	15522	,0000644
8,20	3641,0	,0002747	8,70	6002,9	,0001666	9,20	9897,1	,0001010	9,70	16318	,0000613
8,25	3827,6	0,0002613	8,75	6310,7	0,0001585	9,25	10405	0,0000961	9,75	17154	0,0000583
8,30	4023,9	,0002485	8,80	6634,2	,0001507	9,30	10938	,0000914	9,80	18034	,0000555
8,35	4230,2	,0002364	8,85	6974,4	,0001434	9,35	11499	,0000870	9,85	18958	,0000527
8,40	4447,1	,0002249	8,90	7332,0	,0001364	9,40	12088	,0000827	9,90	19930	,0000502
8,45	4675,1	,0002139	8,95	7707,9	,0001297	9,45	12708	,0000787	9,95	20952	0,0000477
									10,00	22026	0,0000454

# ANNEXE H

## FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES NATURELLES (ANGLES EXPRIMÉS EN DEGRÉS, AVEC FRACTIONS DÉCIMALES)

Deg.	Sin	Tg	Cotg	Cos	Deg.	Deg.	Sin	Tg	Cotg	Cos	Deg.
0,0	0,00000	0,00000	∞	1,0000	90,0	3,0	0,05234	0,05241	19,081	0,9986	87,0
,1	,00175	,00175	573,0	1,0000	89,9	,1	,05408	,05416	18,464	,9985	86,9
,2	,00349	,00349	286,5	1,0000	,8	,2	,05582	,05591	17,886	,9984	,8
,3	,00524	,00524	191,0	1,0000	,7	,3	,05756	,05766	17,343	,9983	,7
,4	,00698	,00698	143,24	1,0000	,6	,4	,05931	,05941	16,832	,9982	,6
,5	,00873	,00873	114,59	1,0000	,5	,5	,06105	,06116	16,350	,9981	,5
,6	,01047	,01047	95,49	0,9999	,4	,6	,06279	,06291	15,895	,9980	,4
,7	,01222	,01222	81,85	,9999	,3	,7	,06453	,06467	15,464	,9979	,3
,8	,01396	,01396	71,62	,9999	,2	,8	,06627	,06642	15,056	,9978	,2
,9	,01571	,01571	63,66	,9999	89,1	,9	,06802	,06817	14,669	,9977	86,1
1,0	0,01745	0,01746	57,29	0,9998	89,0	4,0	0,06976	0,06993	14,301	0,9976	86,0
,1	,01920	,01920	52,08	,9998	88,9	,1	,07150	,07168	13,951	,9974	85,9
,2	,02094	,02095	47,74	,9998	,8	,2	,07324	,07344	13,617	,9973	,8
,3	,02269	,02269	44,07	,9997	,7	,3	,07498	,07519	13,300	,9972	,7
,4	,02443	,02444	40,92	,9997	,6	,4	,07672	,07695	12,996	,9971	,6
,5	,02618	,02619	38,19	,9997	,5	,5	,07846	,07870	12,706	,9969	,5
,6	,02792	,02793	35,80	,9996	,4	,6	,08020	,08046	12,429	,9968	,4
,7	,02967	,02968	33,69	,9996	,3	,7	,08194	,08221	12,163	,9966	,3
,8	,03141	,03143	31,82	,9995	,2	,8	,08368	,08397	11,909	,9965	,2
,9	,03316	,03317	30,14	,9995	88,1	,9	,08542	,08573	11,664	,9963	85,1
2,0	0,03490	0,03492	28,64	0,9994	88,0	5,0	0,08716	0,08749	11,430	0,9962	85,0
,1	,03664	,03667	27,27	,9993	87,9	,1	,08889	,08925	11,205	,9960	84,9
,2	,03839	,03842	26,03	,9993	,8	,2	,09063	,09101	10,988	,9959	,8
,3	,04013	,04016	24,90	,9992	,7	,3	,09237	,09277	10,780	,9957	,7
,4	,04188	,04191	23,86	,9991	,6	,4	,09411	,09453	10,579	,9956	,6
,5	,04362	,04366	22,90	,9990	,5	,5	,09585	,09629	10,385	,9954	,5
,6	,04536	,04541	22,02	,9990	,4	,6	,09758	,09805	10,199	,9952	,4
,7	,04711	,04716	21,20	,9989	,3	,7	,09932	,09981	10,019	,9951	,3
,8	,04885	,04891	20,45	,9988	,2	,8	,10106	,10158	9,845	,9949	,2
,9	,05059	,05066	19,74	,9987	87,1	,9	,10279	,10334	9,677	,9947	84,1
Deg.	Cos	Cotg	Tg	Sin	Deg.	Deg.	Cos	Cotg	Tg	Sin	Deg.

Deg.	Sin	Tg	Cotg	Cos	Deg.	Deg.	Sin	Tg	Cotg	Cos	Deg.
6,0	0,10453	0,10510	9,514	0,9945	84,0	11,0	0,1908	0,1944	5,145	0,9816	79,0
,1	,10626	,10687	9,357	,9943	83,9	,1	,1925	,1962	5,097	,9813	78,9
,2	,10800	,10863	9,205	,9942	,8	,2	,1942	,1980	5,050	,9810	,8
,3	,10973	,11040	9,058	,9940	,7	,3	,1959	,1998	5,005	,9806	,7
,4	,11147	,11217	8,915	,9938	,6	,4	,1977	,2016	4,959	,9803	,6
,5	,11320	,11394	8,777	,9936	,5	,5	,1994	,2035	4,915	,9799	,5
,6	,11494	,11570	8,643	,9934	,4	,6	,2011	,2053	4,872	,9796	,4
,7	,11667	,11747	8,513	,9932	,3	,7	,2028	,2071	4,829	,9792	,3
,8	,11840	,11924	8,386	,9930	,2	,8	,2045	,2089	4,787	,9789	,2
,9	,12014	,12101	8,264	,9928	83,1	,9	,2062	,2107	4,745	,9785	78,1
7,0	0,12187	0,12278	8,144	0,9925	83,0	12,0	0,2079	0,2126	4,705	0,9781	78,0
,1	,12360	,12456	8,028	,9923	82,9	,1	,2096	,2144	4,665	,9778	77,9
,2	,12533	,12633	7,916	,9921	,8	,2	,2113	,2162	4,625	,9774	,8
,3	,12706	,12810	7,806	,9919	,7	,3	,2130	,2180	4,586	,9770	,7
,4	,12880	,12988	7,700	,9917	,6	,4	,2147	,2199	4,548	,9767	,6
,5	,13053	,13165	7,596	,9914	,5	,5	,2164	,2217	4,511	,9763	,5
,6	,13226	,13343	7,495	,9912	,4	,6	,2181	,2235	4,474	,9759	,4
,7	,13399	,13521	7,396	,9910	,3	,7	,2198	,2254	4,437	,9755	,3
,8	,13572	,13698	7,300	,9907	,2	,8	,2215	,2272	4,402	,9751	,2
,9	,13744	,13876	7,207	,9905	82,1	,9	,2233	,2290	4,366	,9748	77,1
8,0	0,13917	0,14054	7,115	0,9903	82,0	13,0	0,2250	0,2309	4,331	0,9744	77,0
,1	,14090	,14232	7,026	,9900	81,9	,1	,2267	,2327	4,297	,9740	76,9
,2	,14263	,14410	6,940	,9898	,8	,2	,2284	,2345	4,264	,9736	,8
,3	,14436	,14588	6,855	,9895	,7	,3	,2300	,2364	4,230	,9732	,7
,4	,14608	,14767	6,772	,9893	,6	,4	,2317	,2382	4,198	,9728	,6
,5	,14781	,14945	6,691	,9890	,5	,5	,2334	,2401	4,165	,9724	,5
,6	,14954	,15124	6,612	,9888	,4	,6	,2351	,2419	4,134	,9720	,4
,7	,15126	,15302	6,535	,9885	,3	,7	,2368	,2438	4,102	,9715	,3
,8	,15299	,15481	6,460	,9882	,2	,8	,2385	,2456	4,071	,9711	,2
,9	,15471	,15660	6,386	,9880	81,1	,9	,2402	,2475	4,041	,9707	76,1
9,0	0,15643	0,15838	6,314	0,9877	81,0	14,0	0,2419	0,2493	4,011	0,9703	76,0
,1	,15816	,16017	6,243	,9874	80,9	,1	,2436	,2512	3,981	,9699	75,9
,2	,15988	,16196	6,174	,9871	,8	,2	,2453	,2530	3,952	,9694	,8
,3	,16160	,16376	6,107	,9869	,7	,3	,2470	,2549	3,923	,9690	,7
,4	,16333	,16555	6,041	,9866	,6	,4	,2487	,2568	3,895	,9686	,6
,5	,16505	,16734	5,976	,9863	,5	,5	,2504	,2586	3,867	,9681	,5
,6	,16677	,16914	5,912	,9860	,4	,6	,2521	,2605	3,839	,9677	,4
,7	,16849	,17093	5,850	,9857	,3	,7	,2538	,2623	3,812	,9673	,3
,8	,17021	,17273	5,789	,9854	,2	,8	,2554	,2642	3,785	,9668	,2
,9	,17193	,17453	5,730	,9851	80,1	,9	,2571	,2661	3,758	,9664	75,1
10,0	0,1736	0,1763	5,671	0,9848	80,0	15,0	0,2588	0,2679	3,732	0,9659	75,0
,1	,1754	,1781	5,614	,9845	79,9	,1	,2605	,2698	3,706	,9655	74,9
,2	,1771	,1799	5,558	,9842	,8	,2	,2622	,2717	3,681	,9650	,8
,3	,1788	,1817	5,503	,9839	,7	,3	,2639	,2736	3,655	,9646	,7
,4	,1805	,1835	5,449	,9836	,6	,4	,2656	,2754	3,630	,9641	,6
,5	,1822	,1853	5,396	,9833	,5	,5	,2672	,2773	3,606	,9636	,5
,6	,1840	,1871	5,343	,9829	,4	,6	,2689	,2792	3,582	,9632	,4
,7	,1857	,1890	5,292	,9826	,3	,7	,2706	,2811	3,558	,9627	,3
,8	,1874	,1908	5,242	,9823	,2	,8	,2723	,2830	3,534	,9622	,2
,9	,1891	,1926	5,193	,9820	79,1	,9	,2740	,2849	3,511	,9617	74,1
Deg.	Cos	Cotg	Tg	Sin	Deg.	Deg.	Cos	Cotg	Tg	Sin	Deg.

Deg.	Sin	Tg	Cotg	Cos	Deg.	Deg.	Sin	Tg	Cotg	Cos	Deg.
16,0	0,2756	0,2867	3,487	0,9613	74,0	21,0	0,3584	0,3839	2,605	0,9336	69,0
,1	,2773	,2886	3,465	,9608	73,9	,1	,3600	,3859	2,592	,9330	68,9
,2	,2790	,2905	3,442	,9603	,8	,2	,3616	,3879	2,578	,9323	,8
,3	,2807	,2924	3,420	,9598	,7	,3	,3633	,3899	2,565	,9317	,7
,4	,2823	,2943	3,398	,9593	,6	,4	,3649	,3919	2,552	,9311	,6
,5	,2840	,2962	3,376	,9588	,5	,5	,3665	,3939	2,539	,9304	,5
,6	,2857	,2981	3,354	,9583	,4	,6	,3681	,3959	2,526	,9298	,4
,7	,2874	,3000	3,333	,9578	,3	,7	,3697	,3979	2,513	,9291	,3
,8	,2890	,3019	3,312	,9573	,2	,8	,3714	,4000	2,500	,9285	,2
,9	,2907	,3038	3,291	,9568	73,1	,9	,3730	,4020	2,488	,9278	68,1
17,0	0,2924	0,3057	3,271	0,9563	73,0	22,0	0,3746	0,4040	2,475	0,9272	68,0
,1	,2940	,3076	3,251	,9558	72,9	,1	,3762	,4061	2,463	,9265	67,9
,2	,2957	,3096	3,230	,9553	,8	,2	,3778	,4081	2,450	,9259	,8
,3	,2974	,3115	3,211	,9548	,7	,3	,3795	,4101	2,438	,9252	,7
,4	,2990	,3134	3,191	,9542	,6	,4	,3811	,4122	2,426	,9245	,6
,5	,3007	,3153	3,172	,9537	,5	,5	,3827	,4142	2,414	,9239	,5
,6	,3024	,3172	3,152	,9532	,4	,6	,3843	,4163	2,402	,9232	,4
,7	,3040	,3191	3,133	,9527	,3	,7	,3859	,4183	2,391	,9225	,3
,8	,3057	,3211	3,115	,9521	,2	,8	,3875	,4204	2,379	,9219	,2
,9	,3074	,3230	3,096	,9516	72,1	,9	,3891	,4224	2,367	,9212	67,1
18,0	0,3090	0,3249	3,078	0,9511	72,0	23,0	0,3907	0,4245	2,356	0,9205	67,0
,1	,3107	,3269	3,060	,9505	71,9	,1	,3923	,4265	2,344	,9198	66,9
,2	,3123	,3288	3,042	,9500	,8	,2	,3939	,4286	2,333	,9191	,8
,3	,3140	,3307	3,024	,9494	,7	,3	,3955	,4307	2,322	,9184	,7
,4	,3156	,3327	3,006	,9489	,6	,4	,3971	,4327	2,311	,9178	,6
,5	,3173	,3346	2,989	,9483	,5	,5	,3987	,4348	2,300	,9171	,5
,6	,3190	,3365	2,971	,9478	,4	,6	,4003	,4369	2,289	,9164	,4
,7	,3206	,3385	2,954	,9472	,3	,7	,4019	,4390	2,278	,9157	,3
,8	,3223	,3404	2,937	,9466	,2	,8	,4035	,4411	2,267	,9150	,2
,9	,3239	,3424	2,921	,9461	71,1	,9	,4051	,4431	2,257	,9143	66,1
19,0	0,3256	0,3443	2,904	0,9455	71,0	24,0	0,4067	0,4452	2,246	0,9135	66,0
,1	,3272	,3463	2,888	,9449	70,9	,1	,4083	,4473	2,236	,9128	65,9
,2	,3289	,3482	2,872	,9444	,8	,2	,4099	,4494	2,225	,9121	,8
,3	,3305	,3502	2,856	,9438	,7	,3	,4115	,4515	2,215	,9114	,7
,4	,3322	,3522	2,840	,9432	,6	,4	,4131	,4536	2,204	,9107	,6
,5	,3338	,3541	2,824	,9426	,5	,5	,4147	,4557	2,194	,9100	,5
,6	,3355	,3561	2,808	,9421	,4	,6	,4163	,4578	2,184	,9092	,4
,7	,3371	,3581	2,793	,9415	,3	,7	,4179	,4599	2,174	,9085	,3
,8	,3387	,3600	2,778	,9409	,2	,8	,4195	,4621	2,164	,9078	,2
,9	,3404	,3620	2,762	,9403	70,1	,9	,4210	,4642	2,154	,9070	65,1
20,0	0,3420	0,3640	2,747	0,9397	70,0	25,0	0,4226	0,4663	2,145	0,9063	65,0
,1	,3437	,3659	2,733	,9391	69,9	,1	,4242	,4684	2,135	,9056	64,9
,2	,3453	,3679	2,718	,9385	,8	,2	,4258	,4706	2,125	,9048	,8
,3	,3469	,3699	2,703	,9379	,7	,3	,4274	,4727	2,116	,9041	,7
,4	,3486	,3719	2,689	,9373	,6	,4	,4289	,4748	2,106	,9033	,6
,5	,3502	,3739	2,675	,9367	,5	,5	,4305	,4770	2,097	,9026	,5
,6	,3518	,3759	2,660	,9361	,4	,6	,4321	,4791	2,087	,9018	,4
,7	,3535	,3779	2,646	,9354	,3	,7	,4337	,4813	2,078	,9011	,3
,8	,3551	,3799	2,633	,9348	,2	,8	,4352	,4834	2,069	,9003	,2
,9	,3567	,3819	2,619	,9342	69,1	,9	,4368	,4856	2,059	,8996	64,1
Deg.	Cos	Cotg	Tg	Sin	Deg.	Deg.	Cos	Cotg	Tg	Sin	Deg.

Deg.	Sin	Tg	Cotg	Cos	Deg.	Deg.	Sin	Tg	Cotg	Cos	Deg.
26,0	0,4384	0,4877	2,050	0,8988	64,0	31,0	0,5150	0,6009	1,6643	0,8572	59,0
.1	,4399	,4899	2,041	,8980	63,9	.1	,5165	,6032	1,6577	,8563	58,9
.2	,4415	,4921	2,032	,8973	.8	.2	,5180	,6056	1,6512	,8554	.8
.3	,4431	,4942	2,023	,8965	.7	.3	,5195	,6080	1,6447	,8545	.7
.4	,4446	,4964	2,014	,8957	.6	.4	,5210	,6104	1,6383	,8536	.6
.5	,4462	,4986	2,006	,8949	.5	.5	,5225	,6128	1,6319	,8526	.5
.6	,4478	,5008	1,997	,8942	.4	.6	,5240	,6152	1,6255	,8517	.4
.7	,4493	,5029	1,988	,8934	.3	.7	,5255	,6176	1,6191	,8508	.3
.8	,4509	,5051	1,980	,8926	.2	.8	,5270	,6200	1,6128	,8499	.2
.9	,4524	,5073	1,971	,8918	63,1	.9	,5284	,6224	1,6066	,8490	58,1
27,0	0,4540	0,5095	1,963	0,8910	63,0	32,0	0,5299	0,6249	1,6003	0,8480	58,0
.1	,4555	,5117	1,954	,8902	62,9	.1	,5314	,6273	1,5941	,8471	57,9
.2	,4571	,5139	1,946	,8894	.8	.2	,5329	,6297	1,5880	,8462	.8
.3	,4586	,5161	1,937	,8886	.7	.3	,5344	,6322	1,5818	,8453	.7
.4	,4602	,5184	1,929	,8878	.6	.4	,5358	,6346	1,5757	,8443	.6
.5	,4617	,5206	1,921	,8870	.5	.5	,5373	,6371	1,5697	,8434	.5
.6	,4633	,5228	1,913	,8862	.4	.6	,5388	,6395	1,5637	,8425	.4
.7	,4648	,5250	1,905	,8854	.3	.7	,5402	,6420	1,5577	,8415	.3
.8	,4664	,5272	1,897	,8846	.2	.8	,5417	,6445	1,5517	,8406	.2
.9	,4679	,5295	1,889	,8838	62,1	.9	,5432	,6469	1,5458	,8396	57,1
28,0	0,4695	0,5317	1,881	0,8829	62,0	33,0	0,5446	0,6494	1,5399	0,8387	57,0
.1	,4710	,5340	1,873	,8821	61,9	.1	,5461	,6519	1,5340	,8377	56,9
.2	,4726	,5362	1,865	,8813	.8	.2	,5476	,6544	1,5282	,8368	.8
.3	,4741	,5384	1,857	,8805	.7	.3	,5490	,6569	1,5224	,8358	.7
.4	,4756	,5407	1,849	,8796	.6	.4	,5505	,6594	1,5166	,8348	.6
.5	,4772	,5430	1,842	,8788	.5	.5	,5519	,6619	1,5108	,8339	.5
.6	,4787	,5452	1,834	,8780	.4	.6	,5534	,6644	1,5051	,8329	.4
.7	,4802	,5475	1,827	,8771	.3	.7	,5548	,6669	1,4994	,8320	.3
.8	,4818	,5498	1,819	,8763	.2	.8	,5563	,6694	1,4938	,8310	.2
.9	,4833	,5520	1,811	,8755	61,1	.9	,5577	,6720	1,4882	,8300	56,1
29,0	0,4848	0,5543	1,804	0,8746	61,0	34,0	0,5592	0,6745	1,4826	0,8290	56,0
.1	,4863	,5566	1,797	,8738	60,9	.1	,5606	,6771	1,4770	,8281	55,9
.2	,4879	,5589	1,789	,8729	.8	.2	,5621	,6796	1,4715	,8271	.8
.3	,4894	,5612	1,782	,8721	.7	.3	,5635	,6822	1,4659	,8261	.7
.4	,4909	,5635	1,775	,8712	.6	.4	,5650	,6847	1,4605	,8251	.6
.5	,4924	,5658	1,767	,8704	.5	.5	,5664	,6873	1,4550	,8241	.5
.6	,4939	,5681	1,760	,8695	.4	.6	,5678	,6899	1,4496	,8231	.4
.7	,4955	,5704	1,753	,8686	.3	.7	,5693	,6924	1,4442	,8221	.3
.8	,4970	,5727	1,746	,8678	.2	.8	,5707	,6950	1,4388	,8211	.2
.9	,4985	,5750	1,739	,8669	60,1	.9	,5721	,6976	1,4335	,8202	55,1
30,0	0,5000	0,5774	1,7321	0,8660	60,0	35,0	0,5736	0,7002	1,4281	0,8192	55,0
.1	,5015	,5797	1,7251	,8652	59,9	.1	,5750	,7028	1,4229	,8181	54,9
.2	,5030	,5820	1,7182	,8643	.8	.2	,5764	,7054	1,4176	,8171	.8
.3	,5045	,5844	1,7113	,8634	.7	.3	,5779	,7080	1,4124	,8161	.7
.4	,5060	,5867	1,7045	,8625	.6	.4	,5793	,7107	1,4071	,8151	.6
.5	,5075	,5890	1,6977	,8616	.5	.5	,5807	,7133	1,4019	,8141	.5
.6	,5090	,5914	1,6909	,8607	.4	.6	,5821	,7159	1,3968	,8131	.4
.7	,5105	,5938	1,6842	,8599	.3	.7	,5835	,7186	1,3916	,8121	.3
.8	,5120	,5961	1,6775	,8590	.2	.8	,5850	,7212	1,3865	,8111	.2
.9	,5135	,5985	1,6709	,8581	59,1	.9	,5864	,7239	1,3814	,8100	54,1
Deg.	Cos	Cotg	Tg	Sin	Deg.	Deg.	Cos	Cotg	Tg	Sin	Deg.



Deg.	Sin	Tg	Cotg	Cos	Deg.	Deg.	Sin	Tg	Cotg	Cos	Deg.
36,0	0,5878	0,7265	1,3764	0,8090	54,0	41,0	0,6561	0,8693	1,1504	0,7547	49,0
.1	,5892	,7292	1,3713	,8080	53,9	.1	,6574	,8724	1,1463	,7536	48,9
.2	,5906	,7319	1,3663	,8070	.8	.2	,6587	,8754	1,1423	,7524	.8
.3	,5920	,7346	1,3613	,8059	.7	.3	,6600	,8785	1,1383	,7513	.7
.4	,5934	,7373	1,3564	,8049	.6	.4	,6613	,8816	1,1343	,7501	.6
.5	,5948	,7400	1,3514	,8039	.5	.5	,6626	,8847	1,1303	,7490	.5
.6	,5962	,7427	1,3465	,8028	.4	.6	,6639	,8878	1,1263	,7478	.4
.7	,5976	,7454	1,3416	,8018	.3	.7	,6652	,8910	1,1224	,7466	.3
.8	,5990	,7481	1,3367	,8007	.2	.8	,6665	,8941	1,1184	,7455	.2
.9	,6004	,7608	1,3319	,7997	53,1	.9	,6678	,8972	1,1145	,7443	48,1
37,0	0,6018	0,7536	1,3270	0,7986	53,0	42,0	0,6691	0,9004	1,1106	0,7431	48,0
.1	,6032	,7563	1,3222	,7976	52,9	.1	,6704	,9036	1,1067	,7420	47,9
.2	,6046	,7590	1,3175	,7965	.8	.2	,6717	,9067	1,1028	,7408	.8
.3	,6060	,7618	1,3127	,7955	.7	.3	,6730	,9099	1,0990	,7396	.7
.4	,6074	,7646	1,3079	,7944	.6	.4	,6743	,9131	1,0951	,7385	.6
.5	,6088	,7673	1,3032	,7934	.5	.5	,6756	,9163	1,0913	,7373	.5
.6	,6101	,7701	1,2985	,7923	.4	.6	,6769	,9195	1,0875	,7361	.4
.7	,6115	,7729	1,2938	,7912	.3	.7	,6782	,9228	1,0837	,7349	.3
.8	,6129	,7757	1,2892	,7902	.2	.8	,6794	,9260	1,0799	,7337	.2
.9	,6143	,7785	1,2846	,7891	52,1	.9	,6807	,9293	1,0761	,7325	47,1
38,0	0,6157	0,7813	1,2799	0,7880	52,0	43,0	0,6820	0,9325	1,0724	0,7314	47,0
.1	,6170	,7841	1,2753	,7869	51,9	.1	,6833	,9358	1,0686	,7302	46,9
.2	,6184	,7869	1,2708	,7859	.8	.2	,6845	,9391	1,0649	,7290	.8
.3	,6198	,7898	1,2662	,7848	.7	.3	,6858	,9424	1,0612	,7278	.7
.4	,6211	,7926	1,2617	,7837	.6	.4	,6871	,9457	1,0575	,7266	.6
.5	,6225	,7954	1,2572	,7826	.5	.5	,6884	,9490	1,0538	,7254	.5
.6	,6239	,7983	1,2527	,7815	.4	.6	,6896	,9523	1,0501	,7242	.4
.7	,6252	,8012	1,2482	,7804	.3	.7	,6909	,9556	1,0464	,7230	.3
.8	,6266	,8040	1,2437	,7793	.2	.8	,6921	,9590	1,0428	,7218	.2
.9	,6280	,8069	1,2393	,7782	51,1	.9	,6934	,9623	1,0392	,7206	46,1
39,0	0,6293	0,8098	1,2349	0,7771	51,0	44,0	0,6947	0,9657	1,0355	0,7193	46,0
.1	,6307	,8127	1,2305	,7760	50,9	.1	,6959	,9691	1,0319	,7181	45,9
.2	,6320	,8156	1,2261	,7749	.8	.2	,6972	,9725	1,0283	,7169	.8
.3	,6334	,8185	1,2218	,7738	.7	.3	,6984	,9759	1,0247	,7157	.7
.4	,6347	,8214	1,2174	,7727	.6	.4	,6997	,9793	1,0212	,7145	.6
.5	,6361	,8243	1,2131	,7716	.5	.5	,7009	,9827	1,0176	,7133	.5
.6	,6374	,8273	1,2088	,7705	.4	.6	,7022	,9861	1,0141	,7120	.4
.7	,6388	,8302	1,2045	,7694	.3	.7	,7034	,9896	1,0105	,7108	.3
.8	,6401	,8332	1,2002	,7683	.2	.8	,7046	,9930	1,0070	,7096	.2
.9	,6414	,8361	1,1960	,7672	50,1	.9	,7059	,9965	1,0035	,7083	45,1
40,0	0,6428	0,8391	1,1918	0,7660	50,0	45,0	0,7071	1,0000	1,0000	0,7071	45,0
.1	,6441	,8421	1,1875	,7649	49,9	Deg.	Cos	Cotg	Tg	Sin	Deg.
.2	,6455	,8451	1,1833	,7638	.8						
.3	,6468	,8481	1,1792	,7627	.7						
.4	,6481	,8511	1,1750	,7615	.6						
40,5	0,6494	0,8541	1,1708	0,7604	49,5						
.6	,6508	,8571	1,1667	,7593	.4						
.7	,6521	,8601	1,1626	,7581	.3						
.8	,6534	,8632	1,1585	,7570	.2						
.9	,6547	,8662	1,1544	,7559	49,1						
Deg.	Cos	Cotg	Tg	Sin	Deg.						

# ANNEXE I

## JAUGES AWG

Nous donnons au tableau ci-dessous les jauges AWG (American Wire Gage) d'utilisation courante en Amérique du Nord.

N° AWG	Section (CM)	$\Omega/1000$ pi (à 20°C)	Courant* admissible (A)	N° AWG	Section (CM)	$\Omega/1000$ pi (à 20°C)
0000	211 600	0,0490	230	19	1288,1	8,051
000	167 810	0,0618	200	20	1021,5	10,15
00	133 080	0,0780	175	21	810,10	12,80
0	105 530	0,0983	150	22	642,40	16,14
1	83 694	0,1240	130	23	509,45	20,36
2	66 373	0,1563	115	24	404,01	25,67
3	52 634	0,1970	100	25	320,40	32,37
4	41 742	0,2485	85	26	254,10	40,81
5	33 102	0,3133	—	27	201,50	51,47
6	26 250	0,3951	65	28	159,79	64,90
7	20 816	0,4982	—	29	126,72	81,83
8	16 509	0,6282	45	30	100,50	103,2
9	13 094	0,7921	—	31	79,70	130,1
10	10 381	0,9989	30	32	63,21	164,1
11	8 234,0	1,260	—	33	50,13	206,9
12	6 529,0	1,588	20	34	39,75	260,9
13	5 178,4	2,003	—	35	31,52	329,0
14	4 106,8	2,525	15	36	25,00	414,8
15	3 256,7	3,184	—	37	19,83	523,1
16	2 582,9	4,016	—	38	15,72	659,6
17	2 048,2	5,064	—	39	12,47	831,8
18	1 624,3	6,385	—	40	9,89	1049,0

\* Pour conducteurs de câbles de construction résidentielle; mode de pose: pas plus de trois conducteurs sur chemins de câbles, sous une même gaine ou enfouis.

Les sections des conducteurs sont exprimées en *circular mils* (CM). Le *mil* est égal à 0,001 po (1000 mils = 1 po). Par définition, le circular mil est la section d'un conducteur dont le diamètre est un mil. Par conséquent:

$$A_{CM} = (d_{mils})^2$$

Ainsi la section d'un conducteur dont le diamètre est de 3 mils mesure 9 CM.

La jauge du fil est déterminée par l'aire de sa section. L'aire de la section d'un fil de numéro de jauge  $n$  est approximativement égale à 1,99 fois l'aire du fil de numéro de jauge  $n + 3$ . En d'autres termes, l'aire double quand le numéro de jauge chute de trois unités. De façon semblable, l'aire décuple quand le numéro de jauge chute de 10 unités.

## ANNEXE J

## FACTEURS DE CONVERSION

Pour convertir les	en	multiplier par	Pour convertir les	en	multiplier par	
Années	Jours	365	Jours	Heures	24	
	Heures	8760		Minutes	1440	
	Minutes	525 600		Secondes	86 400	
	Secondes	$3,1536 \times 10^7$	Kilogrammes	Dynes	980,665	
Btu	Calories-grammes	251,996		Livres	2,6792	
	Ergs	$1,054 \times 10^{10}$		Onces	32,1507	
	HP-heures	0,000 393		Lignes	Maxwells	1,0
	Joules	1054,35			Lignes/cm <sup>2</sup>	Gauss
	Kilowattheures	0,000 293	Lignes/po <sup>2</sup>	Gauss	0,1550	
	Livres-pieds	777,649		Webers/po <sup>2</sup>	$1 \times 10^{-8}$	
	Watts-secondes	1054,35	Litres	Centimètres cubes	1000,028	
Candelas-pieds	Lumens/pied carré	1		Gallons (anglo-saxons)	0,2200	
	Lumens/mètre carré	10,764		Pouces cubes	61,025	
	Centimètres	Angströms		$1 \times 10^8$	Onces	35,196
		Mètres	0,01	Livres-pieds	Dynes-centimètres	$1,3558 \times 10^7$
		Milles	$6,214 \times 10^{-6}$		Ergs	$1,3558 \times 10^7$
		Millimètres	10		HP-heures	$5,050 \times 10^{-7}$
		Pieds	0,0328		Joules	1,3558
Pouces		0,3937	Newton-mètres		1,3558	
Dynes		Livres	$2,248 \times 10^{-6}$		Lumens/cm <sup>2</sup>	Lamberts
	Newton	0,000 01	Lumens/pi <sup>2</sup>			Candelas-pieds
Électronvolts	Ergs	$1,602 09 \times 10^{-12}$	Maxwells	Lignes	1,0	
	Ergs	Dynes-centimètres	1,0	Webers	$1 \times 10^{-8}$	
		Électronvolts	$6,242 \times 10^{11}$	Mètres	Angströms	$1 \times 10^{10}$
		Joules	$1 \times 10^7$		Centimètres	100
		Kilowattheures	$2,777 \times 10^{-14}$		Milles	0,000 621
Livres-pieds		$7,376 \times 10^{-8}$	Pieds		3,2808	
		Pouces	39,370			
Gallons (anglo-saxons)	Litres	4,546	Mètres cubes	Pieds cubes	35,315	
	Onces	160	Milles/heure	Kilomètres/heure	1,609 344	
	Pouces cubes	277	Mils circulaires	Centimètres carrés	$5,067 \times 10^{-6}$	
Gauss	Lignes/cm <sup>2</sup>	1,0		Pouces carrés	$7,854 \times 10^{-7}$	
	Lignes/po <sup>2</sup>	6,4516	Newton-mètres	Dynes-centimètres	$1 \times 10^7$	
	Maxwells/cm <sup>2</sup>	1,0		Kilogrammes-mètres	0,101 97	
Gilberts	Ampères	0,7958	Oersteds	Ampères/pouce	2,0212	
	Grammes	Dynes		980,665	Ampères/mètre	79,577
Livres		0,002 68		Gilberts/centimètre	1,0	
Onces		0,0322	Pieds	Centimètres	30,48	
Heures	Secondes	3600		Mètres	0,3048	
	Joules	Btu		0,000 948		
Ergs		$1 \times 10^7$				
HP-heures		$3,725 \times 10^{-7}$				
Kilowattheures		$2,777 \times 10^{-7}$				
Livres-pieds		0,7376				
Watt-secondes		1,0				

<b>Pour convertir les</b>	<b>en</b>	<b>multiplier par</b>	<b>Pour convertir les</b>	<b>en</b>	<b>multiplier par</b>
Pouces	Angströms	$2,53 \times 10^8$	Slugs	Kilogrammes	14,5939
	Centimètres	2,54		Livres	32,1740
	Pieds	0,083	Watts	Btu/heure	3,4144
	Mètres	0,0254		Ergs/seconde	$1 \times 10^7$
Pouces cubes	Centimètres cubes	16,387	HP	0,001 34	
	Gallons (anglo-saxons)	0,003 61	Joules/seconde	1,0	
Radians	Degrés	57,2958	Webers	Lignes	$1 \times 10^8$
				Maxwells	$1 \times 10^8$

## RÉPONSES DES PROBLÈMES IMPAIRS

## Chapitre 1

1. a.  $10^4$  b.  $10^{-4}$  c.  $10^3$  d.  $10^6$   
e.  $10^{-7}$  f.  $10^{-5}$
3. a.  $10^4$  b. 10 c.  $10^9$  d.  $10^{-2}$   
e. 10 f.  $10^{31}$
5. a.  $10^6$  b.  $10^{-2}$  c.  $10^{32}$  d.  $10^{-63}$
7. a.  $9 \times 10^2$  b.  $2 \times 10^5$   
c.  $9 \times 10^{12}$  d.  $\frac{1}{7} \times 10^{-6}$   
e.  $24 \times 10^{10}$  f.  $8 \times 10^{20}$   
g.  $\cong 109 \times 10^{-12}$
9. a.  $10^5$  pF b. 467  $\Omega$   
c.  $63,9 \times 10^{-3}$  H  
d.  $69 \times 10^{-5}$  km  
e.  $11,52 \times 10^6$  ms  
f. 16  $\mu$ H g.  $60 \times 10^{-4}$  m<sup>2</sup>
11. a. (10 po)(2 s), (72 po) (6 cm/s)  
b. 40 h/200 min, (50 s)(2 min)
13. 0,57 min
15. 2,6823 m/s

## Chapitre 2

3. a. 288 N  
b.  $288 \times 10^4$  N  
c.  $288 \times 10^6$  N
5. 13 A
7. 2400 C
9. 2,3 s
11.  $374,5 \times 10^{18}$  électrons
13. 1,194 A > 1 A (oui)
15. a. 9 V b. 3 V c. 12 V
17. 6 C
19. 2,67 V
21. 5 A
23. 25 h
25. 0,773 h

## Chapitre 3

1. 26,326  $\Omega$
3. 228,31 m
5. a. 0,69 mm<sup>2</sup>  
b. plus grande  
c. plus petite
7. Aluminium
9. 2,409  $\Omega$
11. 3,334  $\Omega$
13. a.  $1,842 \times 10^{-3}$   $\Omega$  (0°C),  
 $2,628 \times 10^{-3}$   $\Omega$  (100°C)  
b.  $39,25 \times 10^{-6}$   $\Omega/5^\circ\text{C}$
15. a. 40,29°C b. -195,61°C
17. 39,371  $\Omega$
19. a. 15,48  $\Omega$  et 7,74  $\Omega$   
b. deux fois moindre
21. a. 4 mm<sup>2</sup>  
b. 10 mm<sup>2</sup>
27. a. 0,233 S
23.  $10^4$   $\Omega$ ,  $10^1$   $\Omega$  et 10  $\Omega$

23. a. 195 V, 200 V, 205 V et 215 V  
b. 20 V
27. a. 11,628 S  
b.  $2,5 \times 10^{-4}$  S  
c.  $20 \times 10^{-6}$  S
29. 100 S

## Chapitre 4

1. 15 V
3. 4 k $\Omega$
5. 72 nV
7. 54,55  $\Omega$
9. 1,68 kV
11. 6 A
13. 1 W
15. a. 57 600 J b.  $16 \times 10^{-3}$  kWh
17. 2 s
19. 196  $\mu$ W
21. 4 A
23. 795,99 V
25. 0,833 A, 144,058  $\Omega$
27. 70,71 mA, 1,414 kV
29. 80%
31. 84,77%
33. a. 1657,78 W b. 15,07 A  
c. 19,38 A
35. 38,40 J
37.  $\eta_1 = 40\%$ ,  $\eta_2 = 80\%$
39. a. 1350 J  
b. L'énergie double, la puissance demeure la même.
41. 6,67 h
43. 1,64\$
45. 49,28¢

## Chapitre 5

1. a. 20  $\Omega$ , 3 A b. 14 k $\Omega$ , 10 mA  
c. 110  $\Omega$ , 318,2 mA  
d. 10 k $\Omega$ , 12 mA
3. a. 16 V b. 1,56 V
5. a. 6 k $\Omega$ , 20 mA,  $V_1 = 60$  V,  
 $V_2 = 20$  V,  $V_3 = 40$  V  
c.  $P_1 = 1,2$  W,  $P_2 = 0,4$  W,  
 $P_3 = 0,8$  W,  $P_{\text{dél.}} = 2,4$  W  
d.  $R_1 = 2$  W,  $R_2 = \frac{1}{2}$  W,  
 $R_3 = 1$  W
7. a. 60 V, 2 A, 30  $\Omega$   
b. 4 A,  $V_1 = 16$  V,  $V_2 = 24$  V,  
 $E = 48$  V

- c. 21  $\Omega$ ,  $V_1 = 2$  V,  $V_2 = 1$  V,  
 $V_3 = 21$  V,  $E = 24$  V
- d. 2 A,  $R_1 = 2$   $\Omega$ ,  $R_2 = 13$   $\Omega$ ,  
 $E = 32$  V

9. a.  $V_{ab} = 66,67$  V b.  $V_{ab} = 8$  V  
c.  $V_{ab} = 20$  V d.  $V_{ab} = 0,18$  V
11. a. 0,25 S, 4  $\Omega$ , 30 A  
b.  $1 \times 10^{-3}$  S, 1 k $\Omega$ , 40 mA  
c. 0,2 S, 5  $\Omega$ , 12 A  
d.  $\frac{3}{4}$  S,  $\frac{4}{3}$   $\Omega$ , 15 A  
e. 0,100525 S, 9,948  $\Omega$   
201,05 mA  
f. 1,333 S, 0,75  $\Omega$ , 53,33 A
13. a. 18  $\Omega$  b.  $R_1 = R_2 = 24$   $\Omega$
15. a. 1,167 S, 0,8571  $\Omega$   
b.  $I_T = 1,050$  A,  $I_1 = 0,30$  A,  
 $I_2 = 0,15$  A,  $I_3 = 0,60$  A  
d.  $P_1 = 0,27$  W,  
 $P_2 = 0,135$  W,  
 $P_3 = 0,54$  W,  
 $P_{\text{dél.}} = 0,945$  W  
e.  $R_1 = \frac{1}{2}$  W,  $R_2 = \frac{1}{2}$  W,  
 $R_3 = 1$  W
17. a.  $R_1 = 5$   $\Omega$ ,  $I_2 = 1$  A,  
 $R_2 = 10$   $\Omega$   
b.  $E = 12$  V,  $I_2 = 1,333$  A,  
 $I_3 = 1$  A,  $R_3 = 12$   $\Omega$ ,  
 $I = 4,333$  A  
c.  $I_1 = 220$  mA,  $I_3 = 55$  mA,  
 $I_2 = 725$  mA,  
 $R = 303,45$   $\Omega$   
d.  $V_1 = 30$  V,  $E = 30$  V,  
 $I_1 = 1$  A,  $I_2 = 0,5$  A,  
 $R_2 = 60$   $\Omega = R_3$
19. a. ampoules :  $I = 5$  A,  
laveuse :  $I = \frac{10}{3}$  A,  
téléviseur :  $I = 3$  A  
b.  $11\frac{1}{3}$  A, non c. 10,59  $\Omega$   
d.  $P_{\text{dél.}} = 1360$  W
21. a.  $I = 4$  A,  $I_1 = 3$  A  
b.  $I_3 = I = 6$   $\mu$ A,  $I_2 = 2$   $\mu$ A,  
 $I_1 = 2$   $\mu$ A,  $R = 9$   $\Omega$
23. 2  $\Omega$
25. 100  $\Omega$
27. 1,471%

## Chapitre 6

1. a. Oui; loi des courants  
b.  $I_2 = 3$  A c. oui d.  $V_2 = 4$  V

- e.  $R_T = 2 \Omega$  f.  $I = 5 \text{ A}$   
 g.  $P_{\text{del.}} = 50 \text{ W}$ ,  $P_1 = 12 \text{ W}$ ,  
 $P_2 = 18 \text{ W}$   
 3. a.  $I = I_1 = 1.4 \text{ A}$   
 b.  $V_1 = 2.8 \text{ V}$ ,  $V_2 = 7.0 \text{ V}$ ,  
 $V_3 = 4.2 \text{ V}$   
 c.  $I_3 = I_4 = 0.7 \text{ A}$   
 d.  $9.8 \text{ W}$  e.  $10.8 \text{ V}$   
 5. a.  $4 \text{ A}$   
 b.  $I_2 = 1.333 \text{ A}$ ,  
 $I_3 = 0.6665 \text{ A}$   
 c.  $V_A = 8 \text{ V}$ ,  $V_B = 4 \text{ V}$   
 7. a.  $I = 16 \text{ mA}$ ,  $I_6 = 2 \text{ mA}$   
 b.  $V_1 = 28 \text{ V}$ ,  $V_5 = 7.2 \text{ V}$   
 c.  $8.64 \text{ mW}$   
 9. a.  $V_G = 3.2 \text{ V}$ ,  $V_S = 1.45 \text{ V}$   
 b.  $10.382 \text{ V}$  c.  $12.132 \text{ V}$   
 11. a.  $2 \text{ A}$   
 b.  $I_1 = I_3 = \frac{2}{3} \text{ A}$ ,  $I_8 = \frac{2}{3} \text{ A}$   
 c.  $1.037 \text{ W}$   
 13. a.  $I_2 = 1\frac{1}{3} \text{ A}$ ,  $I_3 = 3\frac{1}{3} \text{ A}$ ,  
 $I_8 = 0 \text{ A}$   
 b.  $V_4 = 10 \text{ V}$ ,  $V_8 = 0 \text{ V}$   
 15. a.  $24 \text{ A}$  b.  $8 \text{ A}$   
 c.  $V_3 = 48 \text{ V}$ ,  $V_5 = 24 \text{ V}$ ,  
 $V_7 = 16 \text{ V}$   
 d.  $P(R_7) = 128 \text{ W}$ ,  
 $P_{\text{del.}} = 5760 \text{ W}$   
 17. a.  $12 \text{ A}$  b.  $0.5 \text{ A}$   
 c.  $0.5 \text{ A}$  d.  $6 \text{ A}$

Chapitre 7

1.  $V_{ab} = 28 \text{ V}$   
 3. a.  $V_{ab} = 45.33 \text{ V}$   
 b.  $V_{cd} = 5.33 \text{ V}$   
 5. a.  $I = 3 \text{ A}$ ,  $R_P = 6 \Omega$   
 b.  $I = 3.5 \text{ A}$ ,  $R_P = 2 \Omega$   
 7. a.  $8 \text{ A}$   
 b.  $E = 48 \text{ V}$ ,  $R_S = 4 \Omega$ ,  
 $I = 8 \text{ A}$   
 9.  $2.4 \text{ A}$ ,  $9.6 \text{ V}$   
 11. a.  $I_2 = 0.5107 \text{ A}$ ,  $I_5 = 2 \text{ A}$   
 b.  $3.575 \text{ V}$  c.  $782.4 \text{ mW}$   
 13. a.  $29$  b.  $18$   
 15. a.  $x = 1.705$ ,  $y = 2.591$   
 $z = 0.546$   
 b.  $x = 6$ ,  $y = -7.33$   
 $z = -2.5$   
 17. a.  $I_1 (s.h.) = I_{50} = 0.1613 \text{ A}$ ,  
 $I_2 (s.a.h.) = I_{30} = 0.9355 \text{ A}$ ,  
 $I_3 (\text{bas}) = I_{20} = 1.097 \text{ A}$ ,  
 $V_{ab} = 1.935 \text{ V}$

- b.  $I_1 (s.a.h.) = I_{20v} = 7.286 \text{ A}$ ,  
 $I_2 (s.h.) = I_{12v} = -0.714 \text{ A}$ ,  
 $I_3 (\mu p) = I_4 = 6.572 \text{ A}$ ,  
 $V_{ab} = 70 \text{ V}$   
 19. a.  $I_1 (s.h.) = I_4 = -\frac{1}{7} \text{ A}$ ,  
 $I_2 (s.a.h.) = I_2 = \frac{5}{7} \text{ A}$ ,  
 $V_{ab} = 2 \text{ V}$   
 b.  $I_1 (s.h.) = I_4 = 3.0625 \text{ A}$ ,  
 $I_2 (s.h.) = I_{12} = 0.1875 \text{ A}$ ,  
 $V_{ab} = 22 \text{ V}$   
 21. a.  $I_1 (s.h.) = I_2 = 1.871 \text{ A}$ ,  
 $I_2 (s.a.h.) = I_5 = 8.548 \text{ A}$ ,  
 $V_{ab} = 22.74 \text{ V}$   
 b.  $I_1 (s.h.) = I_4 = 1.274 \text{ A}$ ,  
 $I_2 (s.h.) = I_8 = 0.260 \text{ A}$ ,  
 $V_{ab} = 0.904 \text{ V}$   
 23. a.  $I_1 (s.h.) = I_2 = 1.231 \text{ A}$ ,  
 $I_2 (s.h.) = I_7 = -0.4957 \text{ A}$ ,  
 $I_3 (s.h.) = I_3 = -0.6638 \text{ A}$   
 b.  $I_1 (s.h.) = I_{R_5} = -0.2385 \text{ A}$ ,  
 $I_2 (s.h.) = I_{10} = -0.5169 \text{ A}$ ,  
 $I_3 (s.h.) = I_7 = -1.278 \text{ A}$   
 25. a.  $I_1 (s.h.) = I_4 = -\frac{1}{7} \text{ A}$ ,  
 $I_2 (s.h.) = I_2 = -\frac{5}{7} \text{ A}$   
 b.  $I_1 (s.h.) = I_4 = -3.0625 \text{ A}$ ,  
 $I_2 (s.h.) = I_{12} = 0.1875 \text{ A}$   
 27. a.  $I_1 (s.h.) = I_2 = 1.871 \text{ A}$ ,  
 $I_2 (s.h.) = I_5 = -8.548 \text{ A}$   
 b.  $I_1 (s.h.) = I_4 = 1.274 \text{ A}$ ,  
 $I_2 (s.h.) = I_8 = 0.26 \text{ A}$   
 29. a.  $I_1 (s.h.) = I_2 = 1.231 \text{ A}$ ,  
 $I_2 (s.h.) = I_7 = -0.4957 \text{ A}$ ,  
 $I_3 (s.h.) = I_3 = -0.6638 \text{ A}$   
 b.  $I_1 (s.h.) = I_{R_5} = -0.2385 \text{ A}$ ,  
 $I_2 (s.h.) = I_{10} = -0.5169 \text{ A}$ ,  
 $I_3 (s.h.) = I_7 = -1.268 \text{ A}$   
 31. a.  $V_1 (\text{nœud gauche}) = 8.077 \text{ V}$ ,  
 $V_2 (\text{nœud droit}) = 9.385 \text{ V}$   
 b.  $V_1 (\text{nœud gauche}) = 4.8 \text{ V}$ ,  
 $V_2 (\text{nœud droit}) = 6.4 \text{ V}$   
 33. a.  $V_1 (\text{nœud gauche}) = -2.462 \text{ V}$ ,  
 $V_2 (\text{nœud droit}) = 1.009 \text{ V}$   
 b.  $V_1 (\text{nœud gauche sup.}) = 8.877 \text{ V}$   
 $V_2 (\text{nœud droit sup.}) = 9.831 \text{ V}$   
 $V_3 (\text{nœud central}) = -3.005 \text{ V}$   
 35. a.  $V_1 (\text{nœud gauche}) = -5.311 \text{ V}$   
 $V_2 (\text{nœud central}) = -0.6219 \text{ V}$

- $V_3 (\text{nœud droit}) = 3.751 \text{ V}$   
 b.  $V_1 (\text{nœud gauche sup.}) = -6.917 \text{ V}$ ,  
 $V_2 (\text{nœud droit sup.}) = 12 \text{ V}$ ,  
 $V_3 (\text{nœud gauche inf.}) = 2.3 \text{ V}$   
 37. b.  $V_{R_1} = 0.1967 \text{ V}$  c. non  
 39. b.  $V_{R_3} = 0 \text{ V}$  c. équilibré  
 41. a.  $I_{10 \text{ v}} = 3.33 \text{ mA}$   
 b.  $I_{20 \text{ v}} = 0.8235 \text{ A}$   
 43. a.  $133.33 \text{ mA}$  b.  $7 \text{ A}$

Chapitre 8

1. a.  $I_{R_1} = \frac{5}{8} \text{ A}$ ,  $I_{R_2} = 0 \text{ A}$ ,  
 $I_{R_3} = \frac{5}{8} \text{ A}$   
 b.  $E_1 : P = 5.333 \text{ W}$ ,  
 $E_2 : P = 0.333 \text{ W}$   
 c.  $P_1 = 8.333 \text{ W}$  d. non  
 3. a.  $0.143 \text{ A}$  b.  $0.1916 \text{ A}$   
 5. a.  $R_{Th} = 6 \Omega$ ,  $E_{Th} = 6 \text{ V}$   
 b.  $2 \Omega : I = 0.75 \text{ A}$ ,  
 $30 \Omega : I = 0.1667 \text{ A}$ ,  
 $100 \Omega : I = 0.0566 \text{ A}$   
 7. (I) a.  $R_{Th} = 2 \Omega$ ,  $E_{Th} = 84 \text{ V}$   
 b.  $2 \Omega : 882 \text{ W}$ ,  
 $100 \Omega : 67.82 \text{ W}$   
 (II) a.  $R_{Th} = 2 \Omega$ ,  $E_{Th} = 8 \text{ V}$   
 b.  $2 \Omega : 8 \text{ W}$ ,  
 $100 \Omega : 0.6152 \text{ W}$   
 9. (I)  $R_{Th} = 45 \Omega$ ,  $E_{Th} = -5 \text{ V}$   
 (II)  $R_{Th} = 13.5 \Omega$ ,  
 $E_{Th} = 207 \text{ V}$   
 11. (I) a.  $R_N = 14 \Omega$ ,  
 $I_N = 2.571 \text{ A}$   
 (II) a.  $R_N = 7.5 \Omega$ ,  
 $I_N = 1.333 \text{ A}$   
 13. (I) a.  $R_N = 13 \Omega$ ,  
 $I_N = 1.539 \text{ A}$   
 (II) a.  $R_N = 2 \Omega$ ,  
 $I_N = 30 \text{ A}$   
 15. (I) a.  $R_N = 9.333 \Omega$ ,  
 $I_N = 4.429 \text{ A}$   
 (II) a.  $R_N = 1.8462 \Omega$ ,  
 $I_N = 50 \text{ A}$   
 17. a. (I)  $R = 14 \Omega$   
 (II)  $R = 7.5 \Omega$   
 b. (I)  $23.14 \text{ W}$ ,  
 (II)  $3.332 \text{ W}$   
 19. a. (I)  $R = 13 \Omega$ ,  
 (II)  $R = 2 \Omega$   
 b. (I)  $7.698 \text{ W}$ ,  
 (II)  $450 \text{ W}$

21.  $R_1 = 0 \Omega$   
 23.  $V_r = 18,34 \text{ V}$ ,  $I_c = 6,113 \text{ A}$   
 25.  $V_c = 89,5 \text{ V}$ ,  $I_c = 0,448 \text{ A}$   
 27.  $I_c = 2,2 \text{ mA}$ ,  $V_c = 13,2 \text{ V}$   
 29. Source de tension =  $9,75 \text{ V}$  ou  
 Source de courant =  $0,5 \text{ mA}$   
 31. a.  $0,5 \text{ mA}$  b.  $0,5 \text{ mA}$  c. oui  
 33. a.  $4 \text{ V}$  b.  $4 \text{ V}$  c. oui

## Chapitre 9

1.  $9 \times 10^3 \text{ N/C}$   
 3.  $70 \mu\text{F}$   
 5.  $50 \text{ V/m}$   
 7.  $8 \times 10^3 \text{ V/m}$   
 9.  $937,5 \text{ pF}$   
 11. 5 (mica)  
 13. a.  $10^6 \text{ V/m}$  b.  $4,96 \mu\text{C}$   
 c.  $0,0248 \mu\text{F}$   
 15.  $29\,028 \text{ V}$   
 17. a.  $v_C = 20(1 - e^{-t/1 \times 10^{-3}})$   
 b.  $1\tau : 12,64 \text{ V}$ ,  $3\tau : 19,02 \text{ V}$ ,  
 $5\tau : 19,86 \text{ V}$   
 c.  $i_C = 50 \times 10^{-6} e^{-t/1 \times 10^{-3}}$   
 $v_R = 20e^{-t/1 \times 10^{-3}}$   
 d.  $i_C : 1\tau = 31,6 \mu\text{A}$ ,  
 $3\tau = 47,55 \mu\text{A}$ ,  
 $5\tau = 49,65 \mu\text{A}$ ,  
 $v_R : 1\tau = 7,36 \text{ V}$ ,  
 $3\tau = 0,98 \text{ V}$ ,  
 $5\tau = 0,14 \text{ V}$   
 19. a.  $v_C = 50(1 - e^{-t/0,46})$   
 b.  $i_C = 2,174 \times 10^{-3} e^{-t/0,46}$ ,  
 $v_{R_2} = 43,48 e^{-t/0,46}$   
 c.  $v_C = 33,14 \text{ V}$ ,  
 $i_C = 0,733 \text{ mA}$ ,  
 $v_{R_2} = 14,66 \text{ V}$   
 d.  $v_C = 33,14 e^{-t/0,4}$ ,  
 $i_C = -1,657 \times 10^{-3} e^{-t/0,4}$ ,  
 $v_{R_2} = -33,14 e^{-t/0,4}$   
 21. a.  $v_C = 60(1 - e^{-t/0,6})$   
 b.  $i_C = 120 \times 10^{-6} e^{-t/0,6}$ ,  
 $v_{R_1} = 24e^{-t/0,6}$   
 c.  $v_C = 60e^{-t/0,6}$ ,  
 $i_C = -120 \times 10^{-6} e^{-t/0,6}$ ,  
 $v_{R_1} = -24e^{-t/0,6}$   
 23. a.  $v_C = 66,67(1 - e^{-t/0,08})$ ,  
 $i_C = 16,67 \times 10^{-3} e^{-t/0,08}$   
 25.  $0 \rightarrow 2 \mu\text{s} : 90 \text{ mA}$ ,  
 $2 \rightarrow 4 \mu\text{s} : -180 \text{ mA}$ ,  
 $4 \rightarrow 6 \mu\text{s} : 90 \text{ mA}$ ,  
 $6 \rightarrow 8 \mu\text{s} : 60 \text{ mA}$ ,  
 $8 \rightarrow 10 \mu\text{s} : -30 \text{ mA}$ ,  
 $10 \rightarrow 15 \mu\text{s} : 0 \text{ mA}$ ,  
 $15 \rightarrow 16 \mu\text{s} : -60 \text{ mA}$

27. a.  $6 \mu\text{F}$  (branche droite);  
 $Q = 60 \mu\text{C}$ ,  
 $V = 10 \text{ V} : 12 \mu\text{F}$ ;  
 $Q = 40 \mu\text{C}$ ,  
 $V = 3,33 \text{ V} : 6 \mu\text{F}$ ;  
 $Q = 40 \mu\text{C}$ ,  
 $V = 6,67 \text{ V}$   
 b.  $1200 \text{ pF}$ ;  $Q = 9600 \text{ pC}$ ,  
 $V = 8 \text{ V} : 200 \text{ pF}$ ;  
 $Q = 3200 \text{ pC}$ ,  
 $V = 16 \text{ V} : 400 \text{ pF}$ ;  
 $Q = 6400 \text{ pC}$ ,  
 $V = 16 \text{ V} : 600 \text{ pF}$ ;  
 $Q = 9600 \text{ pC}$ ,  $V = 16 \text{ V}$   
 29.  $8640 \times 10^{-12} \text{ J}$   
 31. a.  $5 \text{ J}$  b.  $0,1 \text{ C}$  c.  $200 \text{ A}$   
 d.  $10\,000 \text{ W}$  e.  $10 \text{ s}$

## Chapitre 10

1. CGS :  $5 \times 10^4 \text{ Mx}$   
 Anglo-saxon,  $5 \times 10^4 \text{ lignes}$ ,  
 $51,616 \text{ lignes/po}^2$   
 3. a.  $4 \times 10^{-3} \text{ T}$   
 5.  $952,4 \times 10^3 \text{ H}^{-1}$   
 7.  $2624,67 \text{ A/m}$   
 9. a.  $\mu_r = 7,62 \times 10^{-3} \text{ Wb/Am}$   
 b.  $\mu_\Delta = 3,08 \times 10^{-3} \text{ Wb/Am}$   
 c.  $\mu_m = 10 \times 10^{-3} \text{ Wb/Am}$   
 11.  $2,133 \text{ A}$   
 13.  $2,76 \text{ A}$   
 15. a.  $187,53 \text{ A}$   
 b.  $\mu$  (tôle d'acier)  
 $= 28,9 \times 10^{-4} \text{ Wb/Am}$ ,  
 $\mu$  (acier moulé)  
 $= 9,5 \times 10^{-4} \text{ Wb/Am}$   
 17.  $27,27 \text{ A}$   
 19. a.  $2,55 \text{ A}$  b.  $3,58 \text{ N}$   
 21.  $1,45 \text{ A}$   
 23.  $0,592 \times 10^{-4} \text{ Wb}$   
 $= 5920 \text{ lignes}$

## Chapitre 11

1.  $4,25 \text{ V}$   
 3. 14 spires  
 5.  $15,65 \mu\text{H}$   
 7. a.  $2,5 \text{ V}$  b.  $0,3 \text{ V}$  c.  $200 \text{ V}$   
 9.  $0-3 \text{ ms} : 0 \text{ V}$ ,  
 $3-8 \text{ ms} : 1,6 \text{ V}$ ,  
 $8-13 \text{ ms} : -1,6 \text{ V}$ ,  
 $13-14 \text{ ms} : 0 \text{ V}$ ,  
 $14-15 \text{ ms} : 8 \text{ V}$ ,  
 $15-16 \text{ ms} : -8 \text{ V}$ ,  
 $16-17 \text{ ms} : 0 \text{ V}$

11. a.  $i_L = 2 \times 10^{-6}$   
 $\times (1 - e^{-t/12,5 \times 10^{-6}})$   
 b.  $1\tau = 1,264 \mu\text{A}$ ,  
 $2\tau = 1,730 \mu\text{A}$ ,  
 $3\tau = 1,902 \mu\text{A}$ ,  
 $4\tau = 1,962 \mu\text{A}$ ,  
 $5\tau = 1,986 \mu\text{A}$   
 c.  $v_L = 40 \times 10^{-3}$   
 $\times e^{-t/12,5 \times 10^{-6}}$ ,  
 $v_R = 40 \times 10^{-3}$   
 $\times (1 - e^{-t/12,5 \times 10^{-6}})$   
 d.  $v_L$ ;  $1\tau = 14,72 \text{ mV}$ ,  
 $2\tau = 5,4 \text{ mV}$ ,  
 $3\tau = 1,96 \text{ mV}$ ,  
 $4\tau = 0,76 \text{ mV}$ ,  
 $5\tau = 0,28 \text{ mV} : v_R$ ;  
 $1\tau = 25,28 \text{ mV}$ ,  
 $2\tau = 34,60 \text{ mV}$ ,  
 $3\tau = 38,04 \text{ mV}$ ,  
 $4\tau = 39,24 \text{ mV}$ ,  
 $5\tau = 39,72 \text{ mV}$   
 13. a.  $i_L = 8 \times 10^{-3}$   
 $\times (1 - e^{-t/0,5 \times 10^{-3}})$   
 b.  $v_L = 32e^{-t/0,5 \times 10^{-3}}$ ,  
 $v_{R_1} = 32$   
 $\times (1 - e^{-t/0,5 \times 10^{-3}})$   
 c.  $i_L = 8 \times 10^{-3} e^{-t/31,3 \times 10^{-6}}$ ,  
 $v_{R_1} = 32e^{-t/31,3 \times 10^{-6}}$ ,  
 $v_{R_2} = 480e^{-t/31,3 \times 10^{-6}}$ ,  
 $v_L = 512e^{-t/31,3 \times 10^{-6}}$   
 15. a.  $i_L = 3(1 - e^{-t/0,5})$   
 b.  $v_L = 18e^{-t/0,5}$   
 c.  $i_L = 174 \times 10^{-3} e^{-t}$ ,  
 $v_L = v_{R_1} = 0,522e^{-t}$   
 17. a.  $i_L = 2,75e^{-t/5,25 \times 10^{-3}}$   
 b.  $v_L = 22e^{-t/5,25 \times 10^{-3}}$   
 19.  $I_1 = 4 \text{ mA}$ ,  $V_1 = 16 \text{ V}$ ,  
 $V_2 = 0 \text{ V}$   
 21.  $I_1 = 2 \text{ A}$ ,  $V_1 = 12 \text{ V}$   
 23. a.  $W_{2H} = 16 \mu\text{J}$ ,  
 $W_{3H} = 24 \mu\text{J}$   
 b.  $W_{3mH} = 6 \text{ nJ}$ ,  
 $W_{6mH} = 27 \text{ nJ}$   
 25.  $W_{0,5H} = 1 \text{ J}$ ,  
 $W_{4H} = 3,56 \text{ J}$

## Chapitre 12

1. a.  $1 \text{ mA}$  b.  $R_{\text{shunt}} = 5 \text{ m}\Omega$   
 3. a.  $R_s = 300 \text{ k}\Omega$   
 b.  $\Omega/v = 20\,000$   
 5.  $0,05 \mu\text{A}$   
 9.  $3 \text{ A}$   
 11. b.  $\cong 50 \mu\text{A}$  c.  $25 \mu\text{A}$   
 13. b.  $\cong 61 \text{ mA}$

15. a.  $V_1 = 20 \text{ V}$ ,  $V_2 = 10 \text{ V}$   
 b-c.  $R_{\text{int}} = 1 \text{ M}\Omega$ ,  
 $V_e = 19,99 \text{ V vs } 20 \text{ V}$   
 d.  $\cong 20 \text{ V}$   
 17. b.  $P_{\text{réelle}} = 57,6 \text{ W}$ ,  
 $P_{10 \text{ k}\Omega} = 230,4 \text{ mW}$   
 (plus que la puissance réelle)

Chapitre 13

1. a. 1,2 s b. 2 c. 0,833 Hz  
 d. 2 V  
 3. a. 40 ms b. 28,57 ns  
 c. 18,18  $\mu\text{s}$  d. 1 s  
 5. 0,3 ms  
 7. 142,86 ms  
 9. a. 45° b. 30° c. 150°  
 d. 210° e. 240° f. 99°  
 11. a. 314 rad/s b. 3768 rad/s  
 c. 0,628 rad/s  
 d.  $25,12 \times 10^{-3} \text{ rad/s}$   
 13. a. 20, 60,03 Hz  
 b. 5, 120,06 Hz  
 c.  $10^6$ , 1592,36 Hz  
 d. 0,001, 150 Hz  
 e. 7,6, 6,94 Hz  
 f.  $\frac{1}{42}$ , 1 Hz  
 15. 0,628 ms  
 17. 20 ms  
 21. a.  $v$  et  $i$  sont en phase  
 b.  $i$  en avance de 90° sur  $v$   
 c.  $v$  en avance de 190° sur  $i$   
 23. a.  $v = 0,01 \sin$   
 $\times (157t - 110^\circ)$   
 b.  $v = 2 \times 10^{-3} \sin$   
 $\times (62,8t + 135^\circ)$   
 25. a.  $V_{\text{moy}} = 2,5 \text{ V}$   
 b.  $I_{\text{moy}} = -4,78 \text{ mA}$   
 27. a. 14,14 V b. 5 V  
 c. 4,24 mA d. 1,244 A  
 29. 1,43 V  
 31.  $V_{\text{moy}} = 0 \text{ V}$ ,  $V_{\text{eff}} = 10 \text{ V}$   
 33. a.  $i = 30 \sin 377t$   
 b.  $i = 6 \sin (377t + 20^\circ)$   
 c.  $i = 8 \sin (\omega t + 100^\circ)$   
 d.  $i = 16 \sin (\omega t + 220^\circ)$   
 35. a. 0 b. 314  $\Omega$  c. 753,6  $\Omega$   
 d. 25,13 k $\Omega$  e. 1,256 M $\Omega$   
 37. a. 0,796 Hz b. 60,03 Hz  
 c. 250 Hz d. 3,87 Hz  
 39. a.  $v = 90 \sin (30t + 90^\circ)$   
 b.  $v = 226,2 \times 10^3$   
 $\sin (377t + 90^\circ)$

- c.  $v = 200 \times 10^{-6}$   
 $\sin (400t + 110^\circ)$   
 d.  $v = 8 \sin (20t - 70^\circ)$   
 41. a.  $i = 0,125 \sin (60t - 90^\circ)$   
 b.  $i = 80 \times 10^{-3} \sin (t - 86^\circ)$   
 c.  $i = 480 \sin (0,05t + 140^\circ)$   
 d.  $i = 0,1194 \times 10^{-3} \sin 377t$   
 43. a. 10,62  $\mu\text{F}$  b. 9,28  $\mu\text{F}$   
 c. 636,94  $\mu\text{F}$   
 45. a.  $i = 40 \sin (\omega t + 90^\circ)$   
 b.  $i = 0,16 \sin (\omega t + 110^\circ)$   
 c.  $i = 3,2 \sin (\omega t + 190^\circ)$   
 d.  $i = 28 \sin (\omega t - 50^\circ)$   
 47. a.  $v = 500 \sin (\omega t - 90^\circ)$   
 b.  $v = 400 \sin (\omega t - 30^\circ)$   
 c.  $v = 60 \sin (\omega t + 60^\circ)$   
 d.  $v = 30 \sin (\omega t + 10^\circ)$   
 49. a.  $L = 132,63 \text{ mH}$   
 b.  $C = 147,36 \mu\text{F}$   
 c.  $R = 7 \Omega$   
 51. a. 0 W b. 0 W c. 7,875 W  
 53. a. 389,7 W, 0,866  
 b. 25 W, 0,5  
 c. 64,9 W, 0,866  
 d. 2,598 W, 0,866  
 55. 100 W : 0,333, 0 W : 0,  
 300 W : 1  
 57. a.  $i = 10 \sin (377t + 20^\circ)$   
 b. 150 W c.  $\cong 0,1 \text{ s}$   
 59. a.  $e = 1200 \sin (377t - 110^\circ)$   
 b. 6,63  $\mu\text{F}$  c. 0 W

Chapitre 14

1. a. 5,0 /36,87° b. 2,83 /45°  
 c. 16,38 /77,66°  
 d. 657,65 /81,25°  
 e. 1250 /36,87°  
 f. 0,00658 /81,25°  
 g. 11,78 /-49,82°  
 h. 6,72 /143,47°  
 i. 61,85 /-104,04°  
 j. 101,53 /-39,81°  
 k. 4326,66 /123,69°  
 l.  $25,495 \times 10^{-3} /-78,69^\circ$   
 3. a. 15,033 /86,19°  
 b. 60,208 /4,76°  
 c. 0,30 /88,09°  
 d. 2504,50 /-86,57°  
 e. 86,182 /93,73°  
 f. 38,694 /-94,0°  
 5. a. 11,80 + j6,82  
 b. 151,90 + j49,90  
 c.  $4,72 \times 10^{-6} + j75,10$   
 d. 5,20 + j1,60

- e. 209,30 + j311,0  
 f. -21,20 + j12,0  
 g. 14,30 + j7,05  
 h. 95,698 + j22,768  
 7. q. 6,0 /-50,0°  
 r. 0,000120 /140,0°  
 s. 109,0 /-230,0°  
 t. 76,471 /-80,0°  
 u. 4,0 /0°  
 v. 0,645 /-15,975°  
 w.  $4,21 \times 10^{-3} /161,10^\circ$   
 x. 18,191 /-50,91°  
 9. a. 100,0 /30,0°  
 b. 0,250 /-40,0°  
 c. 70,71 /-90,0°  
 d. 29,69 /0,0°  
 e.  $4,242 \times 10^{-6} /90,0^\circ$   
 f.  $2,546 \times 10^{-6} /70^\circ$   
 11.  $v_a = 41,769$   
 $\sin (377t + 29,43^\circ)$   
 13.  $v_c = 140,940 \sin (\omega t - 58,37^\circ)$

Chapitre 15

1. a.  $R = 7,5 /0^\circ = 7,5$   
 b.  $X_L = 754 /90^\circ = j754$   
 c.  $X_L = 10 /90^\circ = +j10$   
 d.  $X_C = 265,25 /-90^\circ$   
 $= -j265,25$   
 e.  $X_C = 3 /-90^\circ = -j3$   
 f.  $R = 200 /0^\circ = 200$   
 3. a.  $v = 100 \times 10^{-3} \sin \omega t$   
 b.  $v = 9,045 \sin (377t + 70^\circ)$   
 c.  $v = 2545 \sin (157t - 50^\circ)$   
 5. a.  $Z_T = 3 - j3 = 4,24 /-45^\circ$   
 b.  $Z_T = 0,05 - j1$   
 $= 1,001 /-87,14^\circ$   
 c.  $Z_T = 4 - j167,42$   
 $= 167,47 /-88,63^\circ$   
 7. a.  $Z_T = 10 /36,87^\circ$   
 c.  $I = 10 /-36,87^\circ$ ,  
 $V_R = 80 /-36,87^\circ$ ,  
 $V_L = 60 /53,13^\circ$   
 f. 800 W g.  $F_p = 0,8$  inductif  
 9. a.  $Z_T = 4,47 /-63,43^\circ$   
 c.  $C = 265,25 \mu\text{F}$ ,  
 $L = 15,92 \text{ mH}$   
 d.  $I = 11,19 /93,43^\circ$ ,  
 $V_R = 22,38 /93,43^\circ$ ,  
 $V_L = 67,14 /183,43^\circ$ ,  
 $V_C = 111,90 /3,43^\circ$   
 g. 250,43 W  
 h.  $F_p = 0,447$  capacitif



- i.  $i = 15,82 \sin(377t + 93,43^\circ)$   
 $v_R = 31,65 \sin(377t + 93,43^\circ)$   
 $v_L = 94,94 \sin(377t + 183,43^\circ)$   
 $v_C = 158,23 \sin(377t + 3,43^\circ)$
11. a.  $V_1 = 37,97 \angle -51,57^\circ$   
 $V_2 = 113,92 \angle 38,43^\circ$   
 b.  $V_1 = 55,71 \angle 26,8^\circ$   
 $V_2 = 12,53 \angle -63,20^\circ$
13. a.  $I = 38,72 \times 10^{-3} \angle 122,66^\circ$   
 $V_R = 2,56 \angle 122,66^\circ$   
 $V_C = 25,68 \angle 32,66^\circ$   
 b.  $F_p = 0,128$  capacitif  
 c.  $98,95$  mW  
 f.  $2,92 \angle 212,66^\circ$   
 g.  $V_R = 2,56 \angle 122,66^\circ$   
 $V_C = 25,68 \angle 32,66^\circ$   
 h.  $Z_T = 66 - j512,33$
15.  $Z_T = 3,2 + j2,4$
17. a.  $Z = 42 \angle 0^\circ$ ,  $Y = 0,0238$   
 b.  $Z = 200 \angle 90^\circ$   
 $Y = 5 \times 10^{-3} \angle -90^\circ$   
 c.  $Z = 0,6 \angle -90^\circ$   
 $Y = 1,667 \angle 90^\circ$   
 d.  $Z = 8,544 \angle 69,44^\circ$   
 $Y = 0,117 \angle -69,44^\circ$   
 e.  $Z = 92,195 \angle -49,40^\circ$   
 $Y = 0,0109 \angle 49,40^\circ$   
 f.  $Z = 223,61 \angle -26,57^\circ$   
 $Y = 4,47 \times 10^{-3} \angle 26,57^\circ$   
 g.  $Z_T = 9,86 \angle 9,46^\circ$   
 $Y_T = 0,1014 \angle -9,46^\circ$   
 h.  $Z_T = 2,68 \angle -26,57^\circ$   
 $Y_T = 0,373 \angle 26,57^\circ$   
 i.  $Y_T = 0,3379 \angle -9,47^\circ$   
 $Z_T = 2,959 \angle 9,47^\circ$
19. a.  $Y_T = 0,539 \angle -21,8^\circ$   
 c.  $E = 3,71 \angle 21,8^\circ$   
 $I_R = 1,855 \angle 21,8^\circ$   
 $I_L = 0,742 \angle -68,2^\circ$   
 f.  $6,88$  W  
 g.  $F_p = 0,928$  inductif  
 h.  $e = 5,25 \sin(377t + 21,8^\circ)$   
 $i_R = 2,62 \sin(377t + 21,8^\circ)$   
 $i_L = 1,049 \sin(377t - 68,2^\circ)$   
 $i_T = 2,828 \sin 377t$
21. a.  $Y_T = 0,13 \angle -50,31^\circ$   
 c.  $I_T = 7,8 \angle -50,31^\circ$   
 $I_R = 5 \angle 0^\circ$ ,  $I_L = 6 \angle -90^\circ$   
 f.  $300$  W  
 g.  $F_p = 0,638$  inductif  
 h.  $e = 84,84 \sin 377t$   
 $i_R = 7,07 \sin 377t$   
 $i_L = 8,484 \sin(377t - 90^\circ)$   
 $i_T = 11,03 \sin(377t - 50,31^\circ)$
23. a.  $Y_T = 0,32 \angle 51,24^\circ$   
 c.  $C = 1326 \mu\text{F}$   
 $L = 10,61$  mH  
 $E = 11,05 \times 10^{-3} \angle -71,34^\circ$   
 $I_R = 2,21 \times 10^{-3} \angle -71,34^\circ$   
 $I_L = 2,76 \times 10^{-3} \angle -161,34^\circ$   
 $I_C = 5,53 \times 10^{-3} \angle 18,66^\circ$   
 g.  $24,42 \mu\text{W}$   
 h.  $F_p = 0,625$  capacitif  
 i.  $e = 15,62 \times 10^{-3} \sin(377t - 71,34^\circ)$   
 $i_R = 3,12 \times 10^{-3} \sin(377t - 71,34^\circ)$   
 $i_L = 3,90 \times 10^{-3} \sin(377t - 161,34^\circ)$   
 $i_C = 7,82 \times 10^{-3} \sin(377t + 18,66^\circ)$
25. a.  $I_1 = 17,37 \angle 69,74^\circ$   
 $I_2 = 9,92 \angle -20,26^\circ$   
 $Z_T = 30,16 + j17,23$   
 b.  $I_1 = 15 \angle 30^\circ$   
 $I_2 = 9 \angle 210^\circ$   
 $Z_T = 15 \angle 90^\circ$
27. a.  $E = 10 \angle -66,87^\circ$   
 $I_R = 4 \angle -66,87^\circ$   
 $I_L = 5 \angle -156,87^\circ$   
 b.  $F_p = 0,8$  capacitif  
 c.  $40$  W f.  $4 \angle 23,13^\circ$   
 g.  $Z_T = 1,6 - j1,2$
29.  $Y = G_T - jB_L = 0,3 - j0,265$   
 $= >R = 20 \Omega$ ,  $X_L = 3,77 \Omega$
- b.  $I_T = 14,74 \angle 42,53^\circ$   
 c.  $I_2 = 3,997 \angle 83,13^\circ$   
 d.  $V_C = 47,96 \angle -6,87^\circ$   
 e.  $863,17$  W
5. a.  $I = 179,89 \times 10^{-3} \angle 23,48^\circ$   
 b.  $V_C = 70,71 \angle -45^\circ$   
 c.  $16,5$  W  
 7. a.  $I_1 = 0,674 \angle 48,13^\circ$   
 b.  $V_1 = 22,99 \angle 16,70^\circ$   
 c.  $17,99$  W
9. a.  $Y_T = 0,107 \angle -10,31^\circ$   
 b.  $V_1 = 18 \angle 30^\circ$   
 c.  $I_3 = 1,91 \angle 10,81^\circ$   
 d.  $V_2 = 10,77 \angle 57,81^\circ$   
 $V_{ab} = 13,37 \angle 100,81^\circ$
11.  $I = 30,86 \angle 22,87^\circ$
13.  $257,07$  mW

## Chapitre 17

3. a.  $E = 8,245 \angle -15,96^\circ$   
 $Z_s = 4 - j16$   
 b.  $E = 8,485 \angle 165^\circ$   
 $Z_s = 3 + j3$
5. a.  $5,15 \angle 24,5^\circ$   
 b.  $0,442 \angle 143,48^\circ$
7. a.  $13,07 \angle -33,71^\circ$   
 b.  $28,49 \angle -3,13^\circ$
9. a.  $5,15 \angle 24,5^\circ$   
 b.  $0,442 \angle 143,48^\circ$
11. a.  $13,07 \angle -33,71^\circ$   
 b.  $28,49 \angle -3,13^\circ$
13.  $I_c = 3,165 \times 10^{-3} \text{ V} \angle 137,29^\circ$
15. a.  $V_1$  (nœud gauche)  
 $= 14,68 \angle 68,89^\circ$   
 $V_2$  (nœud droit)  
 $= 12,97 \angle 155,88^\circ$   
 b.  $V_1$  (nœud gauche)  
 $= 5,12 \angle -79,36^\circ$   
 $V_2$  (nœud droit)  
 $= 2,71 \angle 39,96^\circ$
17. a.  $V_1$  (nœud gauche)  
 $= 5,74 \angle 122,76^\circ$   
 $V_2$  (nœud central)  
 $= 4,04 \angle 145,03^\circ$   
 $V_3$  (nœud droit)  
 $= 25,94 \angle 78,07^\circ$   
 b.  $V_1$  (nœud gauche sup.)  
 $= 15,13 \angle 1,29^\circ$   
 $V_2$  (nœud central gauche)  
 $= 17,24 \angle 3,73^\circ$   
 $V_3$  (nœud central droit)  
 $= 10,59 \angle -0,11^\circ$

## Chapitre 16

1. a.  $Z_T = 1,2 \angle 90^\circ$   
 b.  $I = 10 \angle -90^\circ$   
 c.  $I_1 = 10 \angle -90^\circ$   
 d.  $I_2 = 6 \angle -90^\circ$   
 $I_3 = 4 \angle -90^\circ$   
 e.  $V_L = 60 \angle 0^\circ$
3. a.  $Z_T = 4,07 \angle -12,53^\circ$   
 $Y_T = 0,246 \angle 12,53^\circ$

19.  $V_L = 171,631 \angle -120,70^\circ$   
 21. a. oui b.  $I_C = 0 \text{ A}$   
 c.  $V_C = 0 \text{ V}$   
 23.  $L_x = 5 \text{ mH}$ ,  $R_x = 5 \Omega$   
 27. a.  $I = 12,02 \angle -38,61^\circ$   
 b.  $I = 7,02 \angle 20,56^\circ$

Chapitre 18

1. a.  $9,18 \angle -25,9^\circ$   
 b.  $3,77 \angle -93,8^\circ$   
 3.  $178,55 \times 10^{-3} \angle -26,57^\circ$   
 5.  $70,61 \times 10^{-3} \angle -11,31^\circ$   
 7.  $2,944 \times 10^{-3} \angle 0^\circ$   
 9. a.  $Z_{Th} = 12,9 \angle -7,12^\circ$   
 $E_{Th} = 36,41 \angle -88,8^\circ$   
 b.  $Z_{Th} = 6,32 \angle -33,46^\circ$   
 $E_{Th} = 60,68 \angle 30,21^\circ$   
 11.  $Z_{Th} = 5,1 \times 10^3 \angle -11,31^\circ$   
 $E_{Th} = 10 \text{ V}$   
 13.  $Z_{Th} = 20 \times 10^3 \angle 0^\circ$   
 $E_{Th} = -3990 \angle 0^\circ$   
 15.  $Z_{Th} = 25 \times 10^3 \angle 0^\circ$   
 $E_{Th} = -1800 \angle 0^\circ$   
 17.  $Z_{Th} = 105 \times 10^3 \angle 0^\circ$   
 $E_{Th} = 315 \angle 0^\circ$   
 19. a.  $Z_N = 12,9 \angle -7,12^\circ$   
 $I_N = 2,82 \angle 95,94^\circ$   
 b.  $Z_N = 6,32 \angle -33,46^\circ$   
 $I_N = 9,6 \angle 63,73^\circ$   
 21. a.  $Z_N = 9,66 \angle 14,93^\circ$   
 $I_N = 2,15 \angle -42,87^\circ$   
 b.  $Z_N = 4,37 \angle 55,67^\circ$   
 $I_N = 22,83 \angle -34,65^\circ$   
 23.  $Z_N = 4,44 \times 10^3 \angle -0,031^\circ$   
 $I_N = 1001 \angle 0,286^\circ$   
 25.  $Z_N = 25 \times 10^3 \angle 0^\circ$   
 $I_N = 72 \times 10^{-3} \angle 0^\circ$   
 27.  $Z_N = 1,9625 \times 10^3 \angle 0^\circ$   
 $I_N = 2 \times 10^{-3} \angle 0^\circ$   
 29. a.  $Z_c = 11,035 \angle 77,03^\circ$   
 $P_M = 90 \text{ W}$   
 b.  $Z_c = 5,71 \angle 64,30^\circ$   
 $P_M = 618,33 \text{ W}$   
 31.  $I_{ab} = \frac{4}{3} \times 10^{-3} \angle 0^\circ$  (source de courant de cette valeur)  
 $V_{ab} = 10,67 \angle 0^\circ$  (source de tension de cette valeur)  
 33.  $25,77 \times 10^{-3} \angle 104,04^\circ$

Chapitre 19

1. a.  $R : 300 \text{ W}$ ,  $L : 0 \text{ W}$ ,  $C : 0 \text{ W}$   
 b.  $R : 0 \text{ var}$ ,  $L : 900 \text{ vars}$   
 $C : 500 \text{ vars}$

- c.  $R : 300 \text{ VA}$ ,  $L : 900 \text{ VA}$ ,  
 $C : 500 \text{ VA}$   
 d.  $P_T = 300 \text{ W}$ ,  
 $Q_T = 400 \text{ vars (L)}$ ,  
 $S_T = 500 \text{ VA}$ ,  
 $F_p = 0,6 \text{ inductif}$   
 f.  $W_R = 5 \text{ J}$   
 g.  $W_C = 1,327 \text{ J}$ ,  
 $W_L = 2,389 \text{ J}$   
 3. a.  $P_T = 1200 \text{ W}$ ,  
 $Q_T = 1200 \text{ vars (L)}$ ,  
 $S_T = 1697 \text{ VA}$ ,  
 $F_p = 0,7071 \text{ inductif}$   
 c.  $I = 8,485 \angle -45^\circ$   
 5. a.  $720 \text{ W}$ ,  $0 \text{ var}$ ,  $720 \text{ VA}$   
 b.  $0 \text{ W}$ ,  $360 \text{ vars}$ ,  $360 \text{ VA}$   
 c.  $P_T = 1095 \text{ W}$ ,  
 $Q_T = 960 \text{ vars (L)}$ ,  
 $S_T = 1456,24 \text{ VA}$ ,  
 $F_p = 0,752 \text{ inductif}$   
 d.  $I = 24,271 \angle -11,24^\circ$   
 7. a.  $R : 150 \text{ W}$ ,  $L : 0 \text{ W}$   
 b.  $R : 0 \text{ var}$ ,  $L : 200 \text{ vars}$   
 $C : 250 \text{ vars}$   
 c.  $R : 150 \text{ VA}$ ,  $L : 200 \text{ VA}$ ,  
 $C : 250 \text{ VA}$   
 d.  $P_T = 150 \text{ W}$ ,  
 $Q_T = 50 \text{ vars (C)}$ ,  
 $S_T = 158,11 \text{ VA}$ ,  
 $F_p = 0,949 \text{ capacitif}$   
 f.  $W_R = 2,5 \text{ J}$   
 g.  $W_L = 0,531 \text{ J}$ ,  
 $W_C = 0,663 \text{ J}$   
 9. a.  $Z_T = 2 - j3,464$   
 b.  $5000 \text{ W}$   
 11. a.  $P_T = 300 \text{ W}$ ,  
 $Q_T = 400 \text{ vars (C)}$ ,  
 $S_T = 500 \text{ VA}$ ,  
 $F_p = 0,6 \text{ capacitif}$   
 b.  $I_T = 16,67 \angle 53,13^\circ$   
 d. Boîte (600 vars (c)) :  $R = 0$ ,  
 $L = 0$ ,  $X_C = 2,159 \Omega$ ,  
 Boîte (200 vars (L)) :  $C = 0$ ,  
 $R = 1,0796 \Omega$ ,  
 $X_L = 0,7197 \Omega : Z_T = 1,0796 - j1,4393$   
 13. a.  $P_T = 1250 \text{ W}$ ,  
 $Q_T = 2366,26 \text{ vars (C)}$ ,  
 $S_T = 2676,14 \text{ VA}$ ,  
 $F_p = 0,4671 \text{ capacitif}$   
 b.  $E = 535,23 \angle -62,15^\circ$   
 c. Boîte (100 W) :  
 $R = 1743,38 \Omega$ ,

$X_C = 1307,53 \Omega$ ,  
 Boîte (1000 W) :  $R = 43,59 \Omega$ ,  
 $X_C = 99,88 \Omega$

15. a.  $128,14 \text{ W}$   
 b. a-b :  $42,69 \text{ W}$ ,  
 b-c :  $64,03 \text{ W}$ ,  
 a-c :  $106,72 \text{ W}$ ,  
 a-d :  $106,72 \text{ W}$ ,  
 c-d :  $0 \text{ W}$ , d-e :  $0 \text{ W}$ ,  
 f-e :  $21,34 \text{ W}$   
 17. a.  $I = 2,358 \text{ A}$ ,  
 $P = 22,24 \text{ W}$   
 b.  $I = 2,070 \text{ A}$ ,  
 $L = 89,6 \text{ mH}$   
 c.  $P = 28,9 \text{ W}$ ,  
 $L = 107,77 \text{ mH}$

Chapitre 20

1. a.  $\omega_s = 250 \text{ rad/s}$ ,  
 $f_s = 39,81 \text{ Hz}$   
 b.  $\omega_s = 3535,53 \text{ rad/s}$ ,  
 $f_s = 562,98 \text{ Hz}$   
 c.  $\omega_s = 21\,880 \text{ rad/s}$ ,  
 $f_s = 3484,08 \text{ Hz}$   
 3. a.  $30 \Omega$   
 b.  $I = 10 \angle 0^\circ$ ,  $V_R = 50 \angle 0^\circ$ ,  
 $V_L = 300 \angle 90^\circ$ ,  
 $V_C = 300 \angle -90^\circ$   
 d.  $P_T = 500 \text{ W}$ ,  
 $Q_L = 3 \text{ kvars}$ ,  
 $Q_C = 3 \text{ kvars}$   
 e. 6  
 5. a.  $3,91 \text{ mH}$   
 b.  $I = 2,5 \angle 0^\circ$ ,  $V_R = 10 \angle 0^\circ$ ,  
 $V_L = 110,5 \angle 90^\circ$ ,  
 $V_C = 110,5 \angle -90^\circ$ ,  
 $Q_S = 11,05$   
 c.  $f_2 = 1883,92 \text{ Hz}$ ,  
 $f_1 = 1721,1 \text{ Hz}$   
 d.  $LB = 162,82 \text{ Hz}$   
 7. a.  $250 \text{ Hz}$   
 b.  $f_2 = 10\,125 \text{ Hz}$ ,  
 $f_1 = 9875 \text{ Hz}$   
 c. 40  
 d.  $V_L = 1200 \angle 90^\circ$ ,  
 $V_C = 1200 \angle -90^\circ$   
 e.  $180 \text{ W}$   
 9. a.  $600 \text{ Hz}$  b.  $5700 \text{ Hz}$   
 c.  $X_L = X_C = 19 \Omega$   
 d.  $L = 0,531 \text{ mH}$ ,  
 $C = 1,47 \mu\text{F}$   
 11.  $X_L = X_C = 40 \Omega$ ,  
 $f_s = 8 \times 10^3 \text{ Hz}$

- $L = 0,796 \text{ mH}$ ,  
 $C = 0,5 \mu\text{F}$ ,  
 $f_2 = 8200 \text{ Hz}$ ,  
 $f_1 = 7800 \text{ Hz}$
- 13. a.**  $30 \Omega$  **b.**  $225,5 \Omega$   
**c.**  $I_C \cong 0,6 \angle 90^\circ$ ,  
 $I_L \cong 0,6 \angle -86,19^\circ$   
**d.**  $L = 238,85 \mu\text{H}$ ,  
 $C = 265 \text{ nF}$   
**e.**  $Q_p = 7,52$ ,  
 $LB = 2659,6 \text{ Hz}$
- 15. a.**  $10\,071 \text{ Hz}$   
**b.**  $X_L = X_C = 316,23 \Omega$   
**c.**  $158,12$  (élevé) **d.**  $22,22 \text{ k}\Omega$   
**e.**  $I_C = 0,281 \angle 90^\circ$ ,  
 $I_L = 0,281 \angle -89,64^\circ$   
**f.**  $Q_p = 70,27$ ,  
 $LB = 143,32 \text{ Hz}$
- 17. a.**  $3560,7 \text{ Hz}$   
**b.**  $V_C = 138,2 \angle 0^\circ$   
**c.**  $691 \text{ mW}$  **d.**  $576,17 \text{ Hz}$
- 19. a.**  $1000 \Omega$  **b.**  $500$   
**c.**  $19,23 \text{ kHz}$  **d.**  $1,923 \text{ V}$
- 21.**  $X_L = X_C = 3 \Omega$ ,  
 $f_p = 15 \text{ kHz}$ ,  $L = 31,85 \mu\text{H}$ ,  
 $C = 3,54 \mu\text{F}$ ,  $R_l = 0,1 \Omega$
- 23. a.**  $20$   
**b.**  $LB = 1000 \text{ Hz}$ ,  
 $f_1 = 19\,500 \text{ Hz}$ ,  
 $f_2 = 20\,500 \text{ Hz}$   
**c.**  $Q_{p(\text{avec charge})} = 18,52$ ,  
 $LB = 1079,91 \text{ Hz}$ ,  
 $f_2 = 20\,539,96 \text{ Hz}$ ,  
 $f_1 = 19\,460,04 \text{ Hz}$   
**d.**  $Q_{p(\text{avec charge})} = 14,29$ ,  
 $LB = 1399,58 \text{ Hz}$ ,  
 $f_2 = 20\,699,79 \text{ Hz}$ ,  
 $f_1 = 19\,300,21 \text{ Hz}$
- 25. b.** complément du problème 23  
**c.**  $100 \text{ k}\Omega$ ,  $20 \text{ k}\Omega \gg 400 \Omega$   
 $\therefore Q_p$  inchangé
- 27. a.**  $L_s = 12,68 \text{ mH}$ ,  
 $L_p = 128,19 \text{ mH}$

## Chapitre 21

- 1. a.**  $120,1 \text{ V}$  **b.**  $120,1 \text{ V}$   
**c.**  $12,01 \text{ A}$  **d.**  $12,01 \text{ A}$
- 3. a.**  $120,1 \text{ V}$  **b.**  $120,1 \text{ V}$   
**c.**  $16,98 \text{ A}$  **d.**  $16,98 \text{ A}$
- 5. a.**  $\theta_2 = -120^\circ$ ,  $\theta_3 = +120^\circ$   
**b.**  $V_{an} = 120 \angle 0^\circ$ ,  
 $V_{bn} = 120 \angle -120^\circ$ ,  
 $V_{cn} = 120 \angle 120^\circ$

- c.**  $I_{an} = 8 \angle -53,13^\circ$ ,  
 $I_{bn} = 8 \angle -173,13^\circ$ ,  
 $I_{cn} = 8 \angle 66,87^\circ$   
**e.**  $8 \text{ A}$  **f.**  $207,84 \text{ V}$
- 7.**  $V_{an} = V_{bn} = V_{cn} = 127,0 \text{ V}$ ,  
 $I_{an} = I_{bn} = I_{cn} = 8,98 \text{ A}$ ,  
 $I_{Aa} = I_{Bb} = I_{Cc} = 8,98 \text{ A}$
- 9. a.**  $120,1 \text{ V}$  **b.**  $208 \text{ V}$   
**c.**  $10,4 \text{ A}$  **d.**  $18,0 \text{ A}$
- 11. a.**  $120,1 \text{ V}$  **b.**  $208 \text{ V}$   
**c.**  $36,75 \text{ A}$  **d.**  $63,651 \text{ A}$
- 13. a.**  $\theta_2 = -120^\circ$ ,  $\theta_3 = +120^\circ$   
**b.**  $V_{ab} = 208 \angle 0^\circ$ ,  
 $V_{bc} = 208 \angle -120^\circ$ ,  
 $V_{ac} = 208 \angle 120^\circ$   
**d.**  $I_{ab} = 1,471 \angle 45^\circ$ ,  
 $I_{bc} = 1,471 \angle -75^\circ$ ,  
 $I_{ca} = 1,471 \angle 165^\circ$   
**e.**  $2,548 \text{ A}$  **f.**  $120,1 \text{ V}$
- 15.**  $V_{ab} = V_{bc} = V_{ac} = 220 \text{ V}$ ,  
 $I_{ab} = I_{bc} = I_{ac} = 15,56 \text{ A}$ ,  
 $I_{Aa} = I_{Bb} = I_{Cc} = 26,95 \text{ A}$
- 17. a.**  $208 \text{ V}$  **b.**  $120,1 \text{ V}$   
**c.**  $9,43 \text{ A}$  **d.**  $9,43 \text{ A}$
- 19.**  $V_{an} = V_{bn} = V_{cn} = 69,28 \text{ V}$ ,  
 $I_{an} = I_{bn} = I_{cn} = 2,89 \text{ A}$ ,  
 $I_{Aa} = I_{Bb} = I_{Cc} = 2,89 \text{ A}$
- 21.**  $V_{an} = V_{bn} = V_{cn} = 69,28 \text{ V}$ ,  
 $I_{an} = I_{bn} = I_{cn} = 5,77 \text{ A}$ ,  
 $I_{Aa} = I_{Bb} = I_{Cc} = 5,77 \text{ A}$
- 23. a.**  $440 \text{ V}$  **b.**  $440 \text{ V}$   
**c.**  $29,33 \text{ A}$  **d.**  $50,8 \text{ A}$
- 25. a.**  $\theta_2 = -120^\circ$ ,  $\theta_3 = +120^\circ$   
**b.**  $V_{ba} = 100 \angle 0^\circ$ ,  
 $V_{cb} = 100 \angle -120^\circ$ ,  
 $V_{ac} = 100 \angle 120^\circ$   
**d.**  $I_{ab} = 4 \angle 0^\circ$ ,  
 $I_{bc} = 4 \angle -120^\circ$ ,  
 $I_{ca} = 4 \angle 120^\circ$   
**e.**  $I_{Aa} = I_{Bb} = I_{Cc} = 6,928 \text{ A}$
- 27. a.**  $\theta_2 = -120^\circ$ ,  $\theta_3 = 120^\circ$   
**b.**  $V_{ba} = 100 \angle 0^\circ$ ,  
 $V_{cb} = 100 \angle -120^\circ$ ,  
 $V_{ac} = 100 \angle 120^\circ$   
**d.**  $I_{ab} = 7,072 \angle 45^\circ$ ,  
 $I_{bc} = 7,072 \angle -75^\circ$ ,  
 $I_{ca} = 7,072 \angle 165^\circ$   
**e.**  $I_{Aa} = I_{Bb} = I_{Cc} = 12,25 \text{ A}$
- 29.**  $8640 \text{ W}$ ,  $0 \text{ var}$ ,  $8640 \text{ A}$ ,  
 $F_p = 1$
- 31.**  $16,224 \text{ kW}$ ,  $16,224 \text{ kvars (cap.)}$ ,  
 $22,944 \text{ kVA}$ ,  
 $F_p = 0,7072 \text{ capacitif}$

- 33.**  $7,263 \text{ kW}$ ,  $7,263 \text{ kvars (ind.)}$ ,  
 $10,272 \text{ kVA}$ ,  
 $F_p = 0,7072 \text{ inductif}$
- 35.**  $287,93 \text{ W}$ ,  $575,86 \text{ vars (ind.)}$ ,  
 $643,83 \text{ VA}$ ,  
 $F_p = 0,4472 \text{ inductif}$
- 37.**  $900 \text{ W}$ ,  $1200 \text{ vars (ind.)}$ ,  $1500 \text{ VA}$ ,  
 $0,6 \text{ inductif}$
- 39.**  $Z = 12,98 - j17,31$
- 41. b.**  $P_T = 2419,2 \text{ W}$ ,  
 $P(\text{chacun}) = 806,4 \text{ W}$
- 43. b.**  $285 \text{ W}$   
**c.**  $P_h = 200 \text{ W}$ ,  $P_T = 100 \text{ W}$
- 45. a.**  $V_{an} = 120,1 \angle 0^\circ$ ,  
 $V_{bn} = 120,1 \angle -120^\circ$ ,  
 $V_{cn} = 120,1 \angle 120^\circ$   
**b.**  $I_{an} = 21,22 \angle -45^\circ$ ,  
 $I_{bn} = 7,077 \angle -165^\circ$ ,  
 $I_{cn} = 10,62 \angle 75^\circ$   
**c.**  $3304,44 \text{ W}$ ,  
 $3304,44 \text{ vars (L)}$ ,  
 $4673,18 \text{ VA}$ ,  
 $F_p = 0,7071 \text{ inductif}$

## Chapitre 22

- 1. a.**  $125 \text{ V}$  **b.**  $277,5 \text{ V}$   
**c.**  $138,75 \text{ V}$  **d.**  $125 \text{ V}$

## Chapitre 23

- 1. (a)** **a.** non **b.** non **c.** oui **d.** non  
**e.** oui
- (b)** **a.** oui **b.** oui **c.** non **d.** oui  
**e.** oui
- (c)** **a.** oui **b.** oui **c.** non **d.** oui  
**e.** oui
- (d)** **a.** non **b.** non **c.** oui **d.** oui  
**e.** oui
- 5. a.**  $V_{\text{moy}} = 100 \text{ V}$ ,  
 $V_{\text{eff}} = 107,53 \text{ V}$   
**b.**  $I_{\text{moy}} = 3 \text{ A}$ ,  $I_{\text{eff}} = 3,36 \text{ A}$
- 7.**  $333,52 \text{ W}$
- 9. a.**  $i = 3 + 3$   
 $\sin(400t - 53,13^\circ)$
- b.**  $3,67 \text{ A}$
- c.**  $v_R = 18 + 18$   
 $\sin(400t - 53,13^\circ)$
- d.**  $22,05 \text{ V}$
- e.**  $v_L = 0 + 24$   
 $\sin(400t + 36,87^\circ)$
- f.**  $16,97 \text{ V}$  **g.**  $80,81 \text{ W}$

11. a.  $i = -10 + 2,36 \sin(300t - 45^\circ) - 0,75 \sin(600t - 63,43^\circ)$   
 b. 10,15 A  
 c.  $v_R = -60 + 14,17 \sin(300t - 45^\circ) - 4,5 \sin(600t - 63,43^\circ)$   
 d. 60,91 V  
 e.  $v_L = 0 + 14,17 \sin(300t + 45^\circ) - 8,99 \sin(600t + 26,57^\circ)$   
 f. 11,87 V g. 618,14 W

13. a.  $v_0 = 2,54 \sin(754t - 94,57^\circ) - 2,45 \sin(1508t - 101,1^\circ)$   
 b. 2,495 V c. 6,225 mW  
 15. a.  $80 + 100 \sin \omega t + 0 + 14,55 \sin(3\omega t + 69,9^\circ)$   
 b.  $15 + 70 \sin \alpha + 10 \sin(2\alpha - 180^\circ) + 8,69 \sin(3\alpha + 166,7^\circ)$   
 17.  $e = 10 + 102,66 \sin(600t + 133,07^\circ) + 100 \sin(1200t + 90^\circ) + 108,97 \sin(1800t + 23,41^\circ)$

Chapitre 24

1. a. 0,2 H  
 b.  $e_p = 1,6 \text{ V}$ ,  $e_s = 5,12 \text{ V}$   
 c.  $e_p = 15 \text{ V}$ ,  $e_s = 24 \text{ V}$   
 3. a. 158,02 mH  
 b.  $e_p = 24 \text{ V}$ ,  $e_s = 1,8 \text{ V}$   
 c.  $e_p = 15 \text{ V}$ ,  $e_s = 24 \text{ V}$   
 5. 1,354 H  
 7.  $I_1(\mathbf{R}_1 + \mathbf{X}_{L_1}) + I_2(\mathbf{X}_m) = \mathbf{E}_1$   
 $I_1(\mathbf{X}_m) + I_2(\mathbf{X}_{L_2} + \mathbf{R}_L) = 0$   
 $x_m = -\omega M / 90^\circ$   
 9. a. 3,125 V  
 b.  $391,02 \times 10^{-6} \text{ Wb}$   
 11. 56,31 Hz  
 13. 400  $\Omega$   
 15. 12 000 spires  
 17. a.  $a = 3$  b. 2,78 W  
 19. a.  $360,56 / 86,82^\circ$   
 b.  $332,82 \times 10^{-3} / -86,82^\circ$   
 c.  $\mathbf{V}_{R_e} = 6,656 / -86,82^\circ$   
 $\mathbf{V}_{X_e} = 13,313 / 3,18^\circ$   
 $\mathbf{V}_{X_L} = 106,50 / 3,18^\circ$   
 23. a. 20 b. 83,33 A c. 4,167 A  
 d.  $a = \frac{1}{20}$ ,  $I_s = 4,167 \text{ A}$ ,  
 $I_p = 83,33 \text{ A}$

25. a.  $V_c = 25 / 0^\circ$ ,  $I_L = 5 / 0^\circ$   
 b.  $80 / 0^\circ$  c.  $20 / 0^\circ$   
 27. a.  $\mathbf{E}_2 = 40 / 60^\circ$ ,  
 $\mathbf{I}_2 = 3,33 / 60^\circ$ ,  
 $\mathbf{E}_3 = 30 / 60^\circ$ ,  
 $\mathbf{I}_3 = 3 / 60^\circ$   
 b. 64,478  $/ 0^\circ$   
 29.  $[\mathbf{Z}_1 + \mathbf{X}_{L_1}] \mathbf{I}_1 - \mathbf{Z}_{M_{12}} \mathbf{I}_2 + \mathbf{Z}_{M_{13}} \mathbf{I}_3 = \mathbf{E}_1$   
 $\mathbf{Z}_{M_{12}} \mathbf{I}_1 - [\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 + \mathbf{X}_{L_2}] \mathbf{I}_2 + \mathbf{Z}_2 \mathbf{I}_3 = 0$   
 $\mathbf{Z}_{M_{13}} \mathbf{I}_1 - \mathbf{Z}_2 \mathbf{I}_2 + [\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_4 + \mathbf{X}_{L_3}] \mathbf{I}_3 = 0$

Chapitre 25

1. a.  $\mathbf{Z}_{11} = \frac{\mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3}$ ,  
 $\mathbf{Z}_{12} = \mathbf{Z}_{21} = \frac{\mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3}$ ,  
 $\mathbf{Z}_{22} = \frac{\mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2 \mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3}$   
 3. a.  $y_{11} = \frac{\mathbf{Y}_1 \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_1 \mathbf{Y}_3}{\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3}$ ,  
 $y_{12} = y_{21} = \frac{-\mathbf{Y}_1 \mathbf{Y}_2}{\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3}$ ,  
 $y_{22} = \frac{\mathbf{Y}_1 \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_2 \mathbf{Y}_3}{\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3}$   
 5. a.  $\mathbf{h}_{11} = \frac{\mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2}$ ,  
 $\mathbf{h}_{21} = \frac{-\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2}$ ,  
 $\mathbf{h}_{12} = \frac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2}$ ,  
 $\mathbf{h}_{22} = \frac{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2 \mathbf{Z}_3}$   
 7. a.  $\mathbf{h}_{11} = \frac{\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3}{\mathbf{Y}_1 \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_1 \mathbf{Y}_3}$ ,  
 $\mathbf{h}_{21} = \frac{-\mathbf{Y}_2}{\mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3}$ ,  
 $\mathbf{h}_{12} = \frac{\mathbf{Y}_2}{\mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3}$ ,  
 $\mathbf{h}_{22} = \frac{\mathbf{Y}_2 \mathbf{Y}_3}{\mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3}$   
 9. a. 47,62 b. -99  
 11.  $\mathbf{Z}_i = 9219,5 / -139,40^\circ$ ,  
 $\mathbf{Z}_0 = 29,07 \times 10^3 / -86,05^\circ$   
 13.  $\mathbf{h}_{11} = 2,5 \text{ k}\Omega$ ,  $\mathbf{h}_{12} = 0,5$ ,  
 $\mathbf{h}_{21} = -0,75$ ,  
 $\mathbf{h}_{22} = 0,25 \times 10^{-3} \text{ S}$

# INDEX

## A

Abaque de réactance, 580, 590, 607

Admittance, 431, 455  
diagramme, 433, 455  
paramètres, 715, 729

Aimant permanent, 257, 323

Aimantation  
courbe, 268  
force, 263, 297

Alimentation  
courant continu, 21  
non sinusoïdale, 662  
tension fixe, 30

Alphabet grec, 736

Alternateur  
diphasé, 610  
monophasé, 609, 641  
polyphasé, 609, 641  
triphase, 609, 610  
étoile, 612, 614, 641  
triangle, 619, 641

Ampère, 17, 36  
loi, 257, 274, 297

Ampère-heure, 27

Amplitude d'une onde, 349, 391

Amortissement  
bobine, 300

Ampèremètre, 325, 342

Analyse  
branches, 127, 139, 177  
mailles, 127, 142, 148, 177,  
476, 481, 506  
noeuds, 127, 151, 154, 177, 484,  
506

réseaux en échelle, 118  
réseaux série-parallèle, 110

Analyseur d'ondes, 657

Appareil de mesure  
équipage électro-  
dynamométrique, 644, 651

numérique, 336, 342  
redresseur, 643, 652  
schéma, 332

Armatures, 219

Argument des nombres complexes,  
395

Arsonval  
équipage, 323

Atome, 15  
hydrogène, 15  
neutre, 15

Autotransformateur, 698, 707

American Wire Gage, 744

## B

Bande  
largeur, 574, 607  
passante, 574

Batteries, 21  
capacité, 27, 36

Bobine, 299, 321  
amortissement, 300, 321  
couplage

magnétique, 702  
mutuel, 676

énergie, 316  
parallèle, 314  
réactance, 372  
série, 314

tension induite, 304  
type, 303

Bouchon  
circuit, 582

Boucle, 79, 108  
courant, 177

Branche, 78, 108

analyse, 127, 139, 177

Bulle, 257, 270

## C

Cadre mobile, 323, 324, 342, 643

Capacité, 219, 255  
parasite, 250, 255

Capacité d'une batterie, 27, 36

Capacimètre, 232

Cellule, 21, 36  
photoconductrice, 52, 60  
primaire, 21, 36  
secondaire, 21, 36

Champ électrique, 217  
intensité, 218, 255

Champ magnétique, 258, 299

Champ moléculaire, 269

Circuit, 108  
bouchon, 582  
branche, 78, 108

équivalent, 443, 455, 474

non sinusoïdal, 653

magnétique, 257

série, 275

série-parallèle, 284

parallèle, 85, 108

purement capacitif, 546

purement inductif, 544

purement résistif, 540

résonance, 565

résonant parallèle, 582

résonant série, 566

*R-L*, 306, 315

*R-L-C*, 315

série, 78, 108, 415

Circular mils, 744

Claquage  
tension, 225, 255

Code de couleurs  
condensateur, 231, 685, 733,  
734

Coefficient  
couplage, 674, 707  
température, 44, 45  
négatif, 44, 60  
positif, 60

Compteur d'électricité, 68

Condensateur, 217, 255  
céramique, 227  
charge, 232  
code de couleurs, 231, 685, 733,  
734

constante de temps, 235

décharge, 232

effet de bord, 220, 255

électrolytique, 229

énergie, 250

film polyester, 230

fixe, 226

marquage, 231, 685, 733, 734

mica, 227, 733

monolithique sur puce, 228

parallèle, 246

pointe, 230, 255

réactance, 374

série, 246

tantale, 230

tension  
source, 230  
crête, 230, 255

- type, 226
- variable, 232
- Conductance, 56, 60, 431
- Conducteur, 17, 32, 36
  - section nominale, 45, 46
- Conducteur de phase, 612
- Conductivité, 32
- Conjugué d'un nombre complexe, 399, 414
- Constante diélectrique, 222, 255
- Constante de temps, 235, 255, 313
- Convention des points, 678, 707
- Conversion d'unités, 9
  - facteurs, 745
  - magnétisme, 736
- Conversion des nombres complexes, 396, 406, 735
- Couche électronique, 16
- Coulomb, 20, 36
  - loi, 16, 37
- Coupe-bande
  - filtre, 594, 598, 607
- Couplage
  - coefficient, 674, 707
  - lâche, 674, 707
  - magnétique, 702
  - mutuel, 676
- Courant
  - alternatif, 343, 344
  - circuit parallèle, 431
  - circuit série, 415
  - réseau en échelle, 466, 471
  - réseau série-parallèle, 457, 471
  - boucle, 177
  - continu, 21, 36, 77
    - source, 31, 37
  - Foucault, 555, 562
  - fuite, 226, 255
  - intensité, 18, 19, 244
  - ligne, 612, 641
  - loi de Kirchhoff, 82, 108
  - phase, 612, 641
  - polarité, 348
  - règle du diviseur, 91, 108, 442, 455
  - réseau parallèle, 436
  - sensibilité, 324
  - sens du déplacement des électrons, 19, 108
  - source, 128, 132, 133
- Courbe d'aimantation, 268
  - normale, 268
  - phase, 573
- Courbe de puissance, 541
- Courbe de sélectivité, 574, 584
- Court-circuit, 94, 108
- Crête
  - tension, 230, 255
  - valeur, 349, 355, 391
- Cuivre, 17, 36
- Cycle, 316
  - onde, 349, 391
- Cycle d'hystérésis, 266
- D**
- Densité relative, 36
- Déphasage, 357
- Déplacement électrique, 218
- Dérivée d'une fonction, 233, 368
- Déterminants, 133, 178, 731
- Diagramme
  - admittance, 433, 455
  - impédance, 421, 455
  - phase, 408, 414, 455
- Diélectrique, 221, 255
- Différence de potentiel, 20, 36, 61
- Diode, 62, 75, 644
- Dipôle, 221, 702, 729
- Disjoncteur, 71, 75
- Diviseur de courant
  - règle, 91, 108, 442, 455
- Diviseur de tension
  - règle, 82, 108, 428, 455
- Domaine, 269
- Données de la plaque signalétique, 695, 707
- Double accord
  - filtre, 594, 601, 607
- Dual, 86, 128
- Dualité, 128
- Ductilité, 36
- E**
- Échelle
  - réseau, 118, 126, 466
- Effet
  - bord, 220, 255, 282
  - Kelvin, 555, 563
- Électro-aimant, 259
- Électrolyte, 21, 36
- Électron, 15, 36
  - libre, 17, 36
- Énergie, 68, 75
  - bobine, 316
  - condensateur, 250
  - potentielle, 20, 36
- Entrefer, 281, 283
- Équipage électrodynamométrique, 338, 342
  - appareil, 644, 651
- F**
- Facteur
  - capacitif, 383, 391
  - conversion, 745
  - inductif, 383, 389
  - puissance, 379, 391, 624, 626
  - qualité, 569, 607
- Farad, 220
- Faraday
  - loi, 299, 321
- Ferrite, 271
- Filtre, 594, 607
  - coupe-bande, 594, 598, 607
  - double accord, 594, 601, 607
  - passé-bande, 594, 607
- Flux
  - fuite, 687, 707
  - magnétique, 259, 275, 288
- Fonction
  - exponentielle, 233, 737
  - impaire, 656
  - paire, 655
  - trigonométrique, 739
- Fondamentale, 656, 672
- Force
  - aimantation, 263, 297
  - cœrcitive, 266
  - contre-électromotrice, 301, 305, 321
  - électrique
    - lignes, 217, 255
  - électro-motrice, 20, 37
  - magnétique
    - lignes, 258, 297
  - magnétomotrice, 263, 297
- Forme d'onde, 343, 344, 348, 391
  - carrée, 343
  - non sinusoïdale, 653
  - sinusoïdale, 343
  - triangulaire, 343
- Forme polaire des nombres complexes, 395
- Forme rectangulaire des nombres complexes, 394
- Fourier, 654
  - séries, 654, 672
- Fréquence, 349, 391, 565
  - coupure, 574, 607
  - demi-puissance, 574, 607
  - limite, 574, 607

- propre, 565  
trois décibels, 599, 607
- Fréquence-mètre  
analogique, 648, 652  
numérique, 647, 652
- Fuite  
flux, 687, 707
- Fusible, 71, 75
- G**
- Gaussmètre, 261
- Générateur de fonctions, 347
- Génératrice, 21, 30, 37
- H**
- Harmonique, 656, 672  
impaire, 656, 672  
paire, 657, 672
- Hay  
pont, 494, 506
- Henry, 301
- Hertz, 349
- Homogénéité  
règle, 10
- Horsepower, 64, 75
- Hydrogène  
atome, 15
- Hystérésis, 265  
cycle, 266  
perte, 555, 563, 687, 697
- I**
- Image  
impédance, 684, 707
- Impédance, 421  
diagramme, 421, 455  
entrée, 723, 729  
image, 684, 707  
paramètres, 710, 729  
pont, 649, 652  
sortie, 723, 729
- Inductance  
mutuelle, 673, 707  
propre, 301, 321
- Induction  
électromagnétique, 299  
magnétique, 260, 297  
résiduelle, 266
- Intensité de courant, 18, 19, 244
- Intensité de champ électrique, 218, 255
- Inverse d'un nombre complexe, 399
- Ion positif, 18, 37
- Isolant, 32, 37
- Isolateur, 33
- J**
- Jauge AWG, 744
- Joule, 4, 13, 20
- K**
- Kelvin, 4, 13  
effets, 555, 563
- Kilogramme, 4, 6, 13
- Kilowattheure, 68
- Kirchhoff  
loi des courants, 89, 108  
loi des tensions, 79, 108
- L**
- Largeur de bande, 574, 607
- Lenz  
loi, 300, 321
- Ligne, 612  
courant, 612, 641  
tension, 613, 641
- Lignes de force  
électrique, 217, 255  
magnétique, 258, 297
- Loi  
Ampère, 257, 274, 297  
Coulomb, 16, 37  
courant de Kirchhoff, 89, 108  
Faraday, 299, 321  
Lenz, 300, 321  
Ohm, 61, 75  
circuits magnétiques, 263  
tensions de Kirchhoff, 79, 108
- M**
- Maille  
analyse, 127, 177, 506  
approche générale (c.a.), 476  
approche générale (c.c.), 142
- approche programmée (c.a.), 481  
approche programmée (c.c.), 148
- Marquage  
condensateur, 231, 685, 733, 734  
résistance, 54
- Masse, 30
- Matériau  
diamagnétique, 262, 297  
ferromagnétique, 262, 297  
magnétique, 261  
paramagnétique, 262, 297
- Maxwell  
pont, 495, 506
- Mégohmmètre, 330, 342
- Méthode  
déterminants, 134, 178, 731  
deux wattmètres, 628, 641  
trois wattmètres, 627, 641
- Mètre, 3, 4, 5, 13
- Microcircuits, 51
- Millman  
théorème, 203, 216, 532, 538
- Module d'un nombre complexe, 395
- Montage  
étoile, 178  
pi, 178  
té, 178  
triangle, 178
- Multimètre, 331, 342, 645, 652
- N**
- Neutre, 612, 641
- Neutron, 15, 37
- Newton, 4, 13
- Noeud  
analyse, 127, 177, 506  
approche générale (c.c.), 151  
approche programmée (c.a.), 484  
approche programmée (c.c.), 154
- Nombre complexe, 393  
argument, 395  
conjugué, 399, 414  
conversion, 396, 735  
forme polaire, 395  
forme rectangulaire, 394  
inverse, 399  
module, 395

- opérations, 398
- plan complexe, 394
- Norton
  - théorème, 192, 216, 523, 538
- Notation scientifique, 6, 13
- Noyau d'atome, 15
- Noyau d'air
  - transformateur, 691
- Noyau de fer
  - transformateur, 679, 687
- O**
- Ohm
  - loi, 60, 75
  - circuits magnétiques, 263
- Ohmètre, 328
  - série, 328, 342
  - parallèle, 342
- Onde, 391
  - alternative, 349, 391
  - amplitude, 349, 391
  - cosinoïdale, 357
  - cycle, 349, 391
  - déphasage, 357
  - forme, 348, 391
  - fréquence, 349, 391
  - période, 349, 391
  - périodique, 349, 391
  - valeur instantanée, 349
- Opérations sur les nombres complexes, 398
- Ordre des phases, 614, 621, 641
- Oscilloscope, 650, 652, 695
- P**
- Panneau solaire, 28
- Paramètres
  - admittance, 715, 729
  - conversion, 725
  - hybrides, 719, 729
  - impédance, 710, 729
- Passe-bande
  - filtre, 594, 697
- Période, 349, 391
- Perméabilité, 261, 297
  - différentielle, 273, 297
  - moyenne, 273, 297
  - relative, 262, 297
  - statique, 272, 297
- Permittivité, 222, 255
  - relative, 222, 255
- Perte
  - hystérésis, 555, 563
  - rayonnement, 555, 563
- Phase, 356
  - conducteur, 612
- courant, 612, 641
- diagramme, 408, 414, 415
- ordre, 614, 621
- relation, 356, 391
- tension, 611, 641
- vecteur, 406, 414
- Phonogramme, 653
- Pile solaire, 21, 37
- Pince ampèremétrique, 649, 652
- Plan complexe, 394
- Plaque signalétique, 695, 707
- Point neutre, 612
- Pointe
  - tension, 230, 255
- Points
  - convention, 678, 707
- Polarité
  - courant, 348
  - tension, 348
- Pont
  - capacimétrique, 496, 506
  - Hay, 494, 506
  - impédance, 649, 652
  - Maxwell, 495, 506
  - réseau, 159, 178, 491, 506
  - Wheatstone, 330, 342
- Potentiel
  - différence, 20
- Potentiomètre, 49, 60
- Préfixes, 6
- Primaire
  - transformateur, 674
- Proton, 13, 57
- Puissance, 63, 75, 365, 623
  - apparente, 539, 542, 563, 624, 626
  - courbe, 541
  - facteur, 379, 391, 624
  - instantanée, 379
  - moyenne, 365, 379, 391, 623, 626
  - réelle, 563
  - réactive, 539, 544, 563, 624, 626
  - réelle, 380, 391
  - théorème du transfert maximal, 197, 216
  - totale, 540
  - triangle, 548
- Puissance de dix, 6
- préfixes, 6
- Pulsation, 352, 391
- Q**
- Quadripôle, 709, 729
- Qualité
  - facteur, 569, 607
- R**
- Radian, 351, 391
- Rapport de transformation, 682, 707
- Rayonnement
  - perte, 555, 563
- Réactance, 374, 391
  - abaque, 580, 590, 607
  - capacitive, 374
  - inductive, 372
- Récepteur polyphasé déséquilibré, 641
- Récepteur triphasé, 630, 631
- Réciprocité
  - théorème, 208, 216, 532, 538
- Redressement, 37, 643
- Redresseur, 21, 30
  - appareil de mesure, 643, 651
- Règle
  - diviseur de courant, 91, 108, 442, 455
  - diviseur de tension, 82, 108, 428, 455
  - homogénéité, 10
  - main droite, 345
- Régulation de tension, 99
  - taux, 108
- Relais, 282
- Relation de phase, 356, 391
- Reluctance, 262, 274, 297
- Rémanence, 266
- Rendement, 65, 75
- Réseau
  - capacitif, 232
  - échelle, 118, 126, 466, 471
  - linéaire bilatéral, 127
  - pi, 497
  - pont, 159, 178, 491, 506
  - série-parallèle, 109, 126, 457, 471
  - té, 497
  - triangulaire, 146
- Résistance, 38, 60, 555
  - code de couleurs, 54
  - efficace, 555, 563
  - interne, 96, 108
  - marquage, 54
  - type, 47
  - valeur standard, 56
- Résistivité, 41, 63
- Résonance, 565, 607
  - circuit, 566, 582, 584
  - parallèle, 582, 584
  - série, 566



- Rhéostat, 41, 60  
 Rigidité diélectrique, 33, 225, 255  
 Rotor, 344, 610
- S**
- Secondaire  
 transformateur, 674, 707  
 Seconde, 3, 4, 6, 13  
 Sélectivité, 573, 584, 607  
 courbe, 574, 584  
 Semi-conducteur, 28, 37  
 Sens du courant, 19, 108  
 Sensibilité  
 courant, 324  
 nominale, 327, 342  
 tension, 327  
 Série de Fourier, 654, 672  
 Service  
 tension, 230, 255  
 Siemens, 56  
 Sinusoïde, 355  
 Source  
 commandée, 474, 506, 511, 515, 526  
 courant continu, 21, 31, 37, 128, 178  
 parallèle, 132  
 série, 95, 133  
 indépendante, 474, 506, 508, 513, 523  
 résistance interne, 96  
 tension, 21  
 parallèle, 100  
 série, 96  
 Stator, 344  
 Substitution  
 théorème, 207, 216, 532, 538  
 Superposition  
 théorème, 179, 216, 507, 538  
 Susceptance, 431, 455  
 Symboles algébriques, 11  
 Symétrie  
 axiale, 655, 672  
 centrale, 656, 672  
 inversion et translation, 657, 672  
 Système  
 $\Delta$ - $\Delta$ , 621  
 $\Delta$ -Y, 621  
 polyphasé, 609  
 triangle, 619  
 triphasé, 609, 610  
 étoile, 612, 614  
 triangle, 619  
 Y- $\Delta$ , 618  
 Y-Y, 615
- Systèmes d'unités, 3  
 anglo-saxon, 3  
 CGS, 3, 4, 13  
 métrique, 3  
 MKS, 3, 4, 13  
 SI, 3, 4, 13
- T**
- Taux de régulation, 99, 108  
 Température  
 coefficient, 44, 45  
 négatif, 44, 60  
 positif, 60  
 Temps  
 constante, 235, 308  
 Tension, 17, 25  
 claquage, 225, 255  
 composée, 613  
 flottante, 30  
 ligne, 613, 641  
 phase, 611, 641  
 pointe, 230, 255  
 polarité, 348  
 règle du diviseur, 82, 108, 428, 455  
 régulation, 99  
 sensibilité, 327  
 service, 230, 255  
 source, 21  
 parallèle, 100  
 série, 95  
 Tesla, 260  
 Théorème  
 Millman, 203, 216, 532, 538  
 Norton, 192, 216, 523, 538  
 réciprocité, 208, 216, 532, 538  
 substitution, 207, 216, 532, 538  
 superposition, 179, 216, 507, 538  
 Thévenin, 185, 216, 513, 538  
 transfert maximal de puissance, 197, 216, 529, 538  
 Thermistance, 51, 60  
 Thévenin  
 théorème, 185, 216, 513, 538  
 Transfert maximal de puissance  
 théorème, 197, 216, 529, 538  
 Transfiguration  
 $\Delta$ -Y, 163, 496  
 Y- $\Delta$ , 163, 496  
 Transformateur  
 abaisseur, 682, 707  
 courbe de réponse fréquentielle, 691  
 dispositif d'isolement, 694
- élévateur, 682, 707  
 noyau d'air, 691  
 noyau de fer, 679, 687  
 plusieurs secondaires, 700, 707  
 primaire, 674, 707  
 prise médiane, 700, 707  
 secondaire, 674, 707  
 type, 697  
 Transformation  
 rapport, 682, 707  
 Transistor, 126  
 Transposition de sources, 131, 475, 506  
 Triangle des puissances, 549  
 Trimmer, 232
- U**
- Unités de mesure, 3, 9  
 conversion, 9, 736, 745  
 système, 3
- V**
- Valeur  
 crête, 349, 355, 391  
 efficace, 364, 391  
 instantanée, 349, 391  
 moyenne, 360, 391  
 Var, 545  
 Varistance, 53, 60  
 Vecteur de phase, 406, 414  
 Vitesse angulaire, 352, 391  
 Volt, 20, 37  
 Voltampère, 542  
 réactif, 545  
 Voltmètre, 326, 342, 645  
 électronique, 645  
 vectoriel, 648, 652
- W**
- Watt, 64  
 Watt-heure, 68, 75  
 Wattmètre, 338, 342  
 monophasé, 646, 652  
 Wattmètres  
 méthode des deux, 628, 641  
 méthode des trois, 627, 641  
 Watt-seconde, 68  
 Webers, 260  
 Wheatstone  
 pont, 330, 342
- Z**
- Zéro absolu, 42, 43, 60  
 extrapolé, 43, 60



ISBN 2-7613-0107-2

